Приложение 1. Свойства линий второго порядка на плоскости

В § 4.4 были перечислены конкретные типы линий второго порядка, различие между которыми сохраняется при переходе из одной декартовой системы координат в другую. В данном приложении будут рассмотрены характерные свойства линий этих типов.

Приложение 1.1. Вырожденные линии второго порядка

К вырожденным линиям второго порядка будем относить все типы, перечисленные во всех строках таблицы теоремы 4.4.1, кроме последней. Кратко опишем их свойства [1].

[1] Напомним, что свойства линий и поверхностей второго порядка по умолчанию рассматриваются в прямоугольной (ортонормированной) системе координат.

1°. Тип линии «Несовпадающие прямые»

Уравнение $\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 0$ определяет пару пересекающихся прямых в системе координат $\left\{O', \vec{e'}_1, \vec{e'}_2\right\}$. В свою очередь уравнение вида $y'^2 = a^2 \quad \forall x'$ при $a > 0$ определяет пару параллельных прямых.

Пример Прил. 1.1.1. Пусть на плоскости Oxy задана линия второго порядка $3x^2 + 4xy + y^2 = 0$.

Преобразовав ее уравнение выделением полных квадратов к виду $(2x + y)^2 - x^2 = 0$ (*метод Лагранжа*), получим $(3x + y)(x + y) = 0$, то есть две прямые $y = -3x$ и $y = -x$ (см. рис. Прил. 1.1.1).

Проверьте самостоятельно, что в данном случае параметр $\Delta = -1 < 0$, а угол поворота осей системы координат $\alpha = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} 2$.

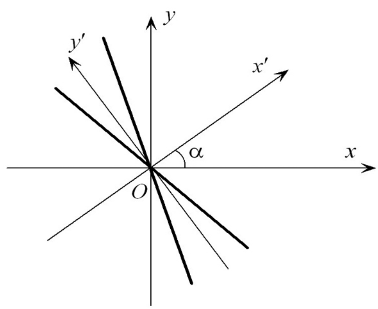

Рис. Прил. 1.1.1

2°. Тип линии «Совпадающие прямые»

Уравнение $y'^2 = 0 \quad \forall x'$ определяет прямую $y' = 0$ в системе координат $\left\{O', \vec{e'}_1, \vec{e'}_2\right\}$. Оно получается из уравнения линии типа 1° предельным переходом при $b \to +0$.

3°. Тип линии «Изолированная точка»

Уравнение $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 0$ определяет единственную точку O' — начало координат системы $\left\{O', \vec{e'}_1, \vec{e'}_2\right\}$.

4°. Тип линии «Пустые множества»

На плоскости не существует точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = -1$ или $y'^2 = -a^2 \quad \forall x'$ при $a \geq 0$. Однако эти случаи иногда называют *мнимыми линиями*.

Приложение 1.2.
Эллипс и его свойства

Определение Прил. 1.2.1	Линия, уравнение которой в некоторой прямоугольной декартовой системе координат есть $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, где $a \geq b > 0$, называется *эллипсом*.

Определение Прил. 1.2.2	Число $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ называется *эксцентриситетом* эллипса. Точки $\left\Vert \begin{matrix} \pm\varepsilon a \\ 0 \end{matrix} \right\Vert$ называются *фокусами* эллипса. Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* эллипса. Число $p = \dfrac{b^2}{a}$ называется *фокальным параметром* эллипса.

Свойства эллипса

1. Эллипс — *ограниченная* линия: $|x| \le a$ и $|y| \le b$, что следует из записи его канонического уравнения в виде $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

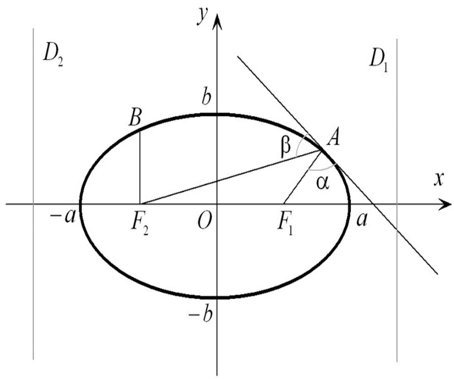

Рис. Прил. 1.2.1

2. Эллипс обладает *осевой симметрией* относительно осей Ox и Oy, а также *центральной симметрией* относительно начала координат O. Это вытекает из отношений

$$\left\| \begin{matrix} -x \\ y \end{matrix} \right\| \in L \quad \Leftrightarrow \quad \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| \in L \quad \Leftrightarrow \quad \left\| \begin{matrix} x \\ -y \end{matrix} \right\| \in L \quad \Leftrightarrow \quad \left\| \begin{matrix} -x \\ -y \end{matrix} \right\| \in L\,,$$

очевидных для канонического уравнения эллипса L.

Обозначим как $\rho(P,Q)$ расстояние между геометрическими объектами P и Q (например, между точкой и прямой), а через α и β обозначим углы между касательной к эллипсу в точке A и фокальными радиусами — отрезками F_1A и F_2A.

Теорема Прил. 1.2.1 **Пусть $A = \| \, x \; y \, \|^{\mathrm{T}}$ есть некоторая точка, принадлежащая эллипсу L, заданному каноническим уравнением, тогда имеют место следующие соотношения:**

1°. $r_1 = |\overrightarrow{F_1 A}| - \varepsilon a,$

$r_2 = |\overrightarrow{F_2 A}| + \varepsilon a$**;**

2°. $r_1 + r_2 = |\overrightarrow{F_1 A}| + |\overrightarrow{F_2 A}| = 2a$**;**

3°. $\dfrac{\rho(A, F_1)}{\rho(A, D_1)} = \dfrac{\rho(A, F_2)}{\rho(A, D_2)} = \varepsilon$**;**

4°. $\dfrac{\rho(M, F_1)}{\rho(M, D_1)} = \varepsilon \quad \forall M \in L$**;**

5°. $|\overrightarrow{F_2 B}| = p$**, где** $\overrightarrow{F_2 B}$ **ортогонален оси** Ox**;**

6°. $\alpha = \beta$**.**

Проведение касательных к эллипсу

Теорема Прил. 1.2.2 **Пусть A есть точка с координатами $\{x_0\, y_0\}$, принадлежащая эллипсу L, заданному каноническим уравнением, тогда уравнение касательной к этому эллипсу, проходящей через точку A, имеет вид** $\dfrac{x_0 x}{a^2}+\dfrac{y_0 y}{b^2}=1$ **.**

Утверждения теорем Прил. 1.2.1 и Прил. 1.2.2 допускают следующие геометрические интерпретации:

> *Фокальное свойство эллипса*: эллипс есть геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух фокусов постоянна и равна $2a$.
>
> *Директрисальное свойство эллипса*: эллипс (исключая случай окружности) есть геометрическое место точек, отношение расстояния от которых до данной точки (фокуса) к расстоянию до данной прямой (директрисе) постоянно и меньше единицы.
>
> *Оптическое свойство эллипса*: любой луч света, исходящий из одного фокуса, после отражения в эллипсе (по правилу: «угол падения равен углу отражения») проходит через другой фокус.

Уравнение эллипса в полярной системе координат

Поместим полюс полярной системы координат в левый фокус эллипса, а полярную ось направим по линии, соединяющей его фокусы. Для произвольной точки A, лежащей на эллипсе (рис. Прил. 1.2.2), имеем

$$\rho = r_2 = a + \varepsilon x = a + \varepsilon(\rho\cos\varphi - a\varepsilon) = a + \varepsilon\rho\cos\varphi - a\varepsilon^2 \,.$$

Откуда $\quad \rho(1-\varepsilon\cos\varphi) = a - a\varepsilon^2 \quad$ и окончательно

$$\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}\,.$$

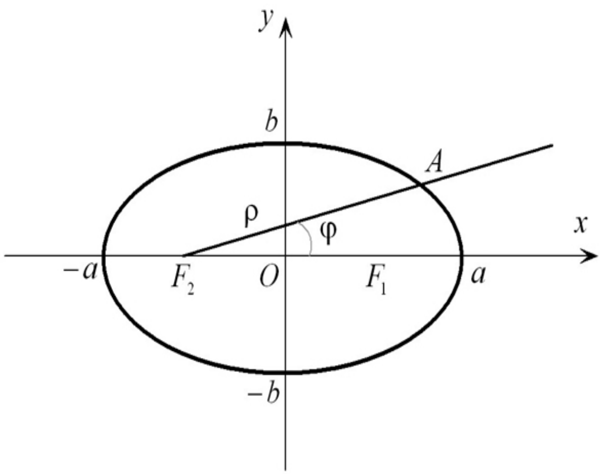

Рис. Прил. 1.2.2

Приложение 1.3. Гипербола и ее свойства

Определение Прил. 1.3.1	Линия, уравнение которой в некоторой прямоугольной декартовой системе координат есть $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где $a > 0,\ b > 0,$ называется *гиперболой*.

Определение Прил. 1.3.2	Число $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ называется *эксцентриситетом* гиперболы. Точки $\left\Vert \begin{matrix} \pm\varepsilon a \\ 0 \end{matrix} \right\Vert$ называются *фокусами* гиперболы. Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* гиперболы. Число $p = \dfrac{b^2}{a}$ называется *фокальным параметром* гиперболы.

Свойства гиперболы

1°. Гипербола — неограниченная линия, существующая для $|x| \geq a$, что следует из записи ее канонического уравнения в следующем виде: $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

2°. Гипербола обладает осевой симметрией относительно осей Ox и Oy, а также центральной симметрией относительно начала координат. Это вытекает из отношений

$$\left\| \begin{matrix} -x \\ y \end{matrix} \right\| \in L \;\Leftrightarrow\; \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| \in L \;\Leftrightarrow\; \left\| \begin{matrix} x \\ -y \end{matrix} \right\| \in L \;\Leftrightarrow\; \left\| \begin{matrix} -x \\ -y \end{matrix} \right\| \in L\,,$$

очевидных для канонического уравнения гиперболы L.

Через α и β обозначим углы между касательной и фокальными радиусами (рис. Прил. 1.3.1).

Напомним также введенное в курсе математического анализа

Определение Прил. 1.3.3	Прямая $y = ux + v$ называется *асимптотой* для графика функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если $$u = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{и} \qquad v = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ux).$$

3°. Гипербола обладает асимптотами вида $y = \pm\dfrac{b}{a}x.$

Свойства гиперболы иллюстрирует рис. Прил. 1.3.1.

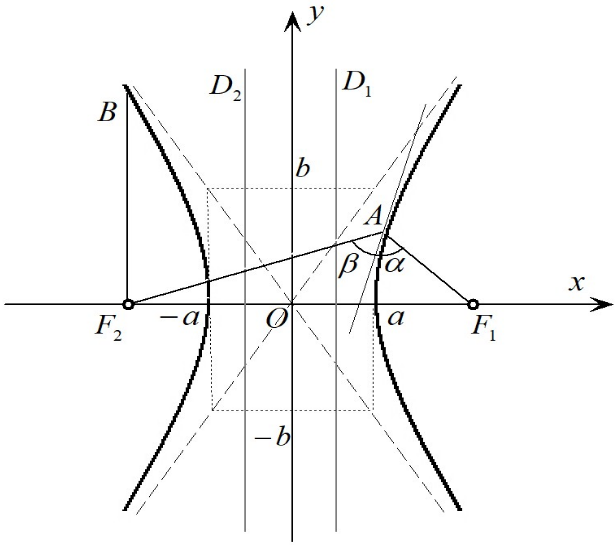

Рис. Прил. 1.3.1

Теорема Прил. 1.3.1

Пусть $A = \| \, x \; y \, \|^{\mathrm{T}}$ есть точка, принадлежащая гиперболе L, заданной каноническим уравнением, тогда имеют место следующие соотношения:

1°. Для правой ветви $(x > a)$:

$$r_1 = |\vec{F_1 A}| = -a + \varepsilon x,$$
$$r_2 = |\vec{F_2 A}| = a + \varepsilon x.$$

Для левой ветви $(x < -a)$:

$$r_1 = |\vec{F_1 A}| = a - \varepsilon x,$$
$$r_2 = |\vec{F_2 A}| = -a - \varepsilon x.$$

2°. $|\, r_1 - r_2| = 2a$;

3°. $\dfrac{\rho(A, F_1)}{\rho(A, D_1)} = \dfrac{\rho(A, F_2)}{\rho(A, D_2)} = \varepsilon$;

4°. $\dfrac{\rho(M, F_1)}{\rho(M, D_1)} = \varepsilon \quad \forall M \in L$;

5°. $|\vec{F_2 B}| = p$, **где** $\vec{F_2 B}$ **ортогонален оси** Ox;

6°. $\alpha = \beta$.

Замечания о свойствах гиперболы

Каноническое уравнение, изучаемой в курсе элементарной математики, гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ в прямоугольной системе координат находится путем следующей замены координат:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' \, , \\ y & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' \, , \end{array} \right.$$

реализующей поворот плоскости Oxy на угол $\dfrac{\pi}{4}$ против часовой стрелки вокруг начала координат.

Из теоремы Прил. 1.3.1 следуют альтернативные формулировки геометрических свойств гиперболы:

Фокальное свойство гиперболы: гипербола есть геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний от которых до двух фокусов постоянна и равна $2a$.

Директрисальное свойство гиперболы: гипербола есть геометрическое место точек, отношение расстояния от которых до данной точки (фокуса) к расстоянию до данной прямой (директрисы) постоянно и больше единицы.

Оптическое свойство гиперболы: касательная в любой точке гиперболы образует с фокальными радиусами точки касания равные углы. (Изображение точечного источника света, расположенного в одном из фокусов, есть мнимое и находится в другом фокусе гиперболы.)

Проведение касательных к гиперболе

Теорема Прил. 1.3.2 **Пусть $A = \| \, x_0 \; y_0 \, \|^{\mathrm{T}}$ есть точка, принадлежащая гиперболе L, заданной каноническим уравнением. Тогда уравнение касательной к L, проходящей через точку A, имеет вид** $\dfrac{x_0 x}{a^2} - \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$ **.**

Уравнение гиперболы в полярной системе координат

Поместим полюс полярной системы координат в правый фокус гиперболы, а полярную ось направим по положительной полуоси Ox (см. рис. Прил. 1.3.2).

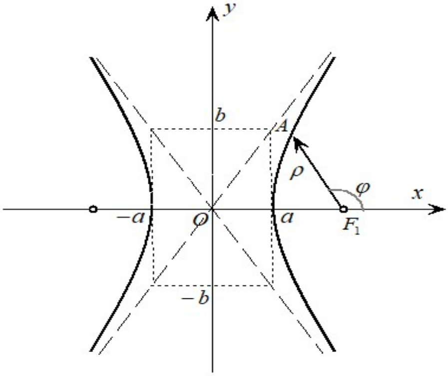

Рис. Прил. 1.3.2

Тогда для произвольной точки A, лежащей на правой ветви гиперболы:

$$\rho = r_1 = -a + \varepsilon x = -a + \varepsilon(\rho\cos\varphi + a\varepsilon) = -a + \varepsilon\rho\cos\varphi + a\varepsilon^2\,.$$

Откуда

$$\rho(1 - \varepsilon\cos\varphi) = -a + a\varepsilon^2 = -a + a\,\frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a} = p$$

и окончательно $\rho = \dfrac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}\,.$

Приложение 1.4. Парабола и ее свойства

Определение Прил. 1.4.1	Линия, уравнение которой в некоторой прямоугольной декартовой системе координат есть $y^2 = 2px$, где $p > 0$, называется *параболой*.

Определение Прил. 1.4.2	Точка $\left\Vert \begin{matrix} \dfrac{p}{2} \\ 0 \end{matrix} \right\Vert$ называется *фокусом* параболы. Прямая $x = -\dfrac{p}{2}$ называется *директрисой* параболы. Число p называется *фокальным параметром* параболы.

Свойства параболы иллюстрирует рис. Прил. 1.4.1, на котором через α обозначен угол между касательной и фокальным радиусом, а через β — угол между касательной и положительным направлением оси Ox.

Свойства параболы

1°. Парабола — неограниченная кривая, существующая $\forall x \geq 0$.

2°. Парабола L обладает осевой симметрией относительно оси Ox, что вытекает из отношения

$$\left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| \in L \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\| \begin{matrix} x \\ -y \end{matrix} \right\| \in L\,,$$

очевидного для канонического уравнения параболы.

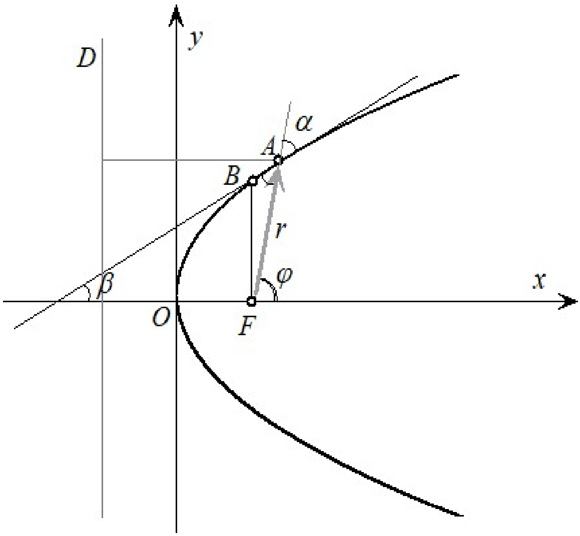

Рис. Прил. 1.4.1

3°. Для параболы имеет место монотонное возрастание абсолютной величины y при возрастании x, причем в нуле касательная к параболе вертикальна.

Теорема Прил. 1.4.1 **Пусть $A = \| \, x \; y \, \|^{\mathrm{T}}$ есть точка, принадлежащая параболе L, заданной каноническим уравнением, тогда имеют место следующие соотношения:**

1°. $r = |\vec{FA}| = x + \dfrac{p}{2}$**;**

2°. $\dfrac{\rho(A,F)}{\rho(A,D)} = 1 \quad \forall A \in L$ **,** **то есть** $\varepsilon = 1$**;**

3°. $|\vec{FB}| = p$ **;**

4°. $\alpha = \beta$**.**

Замечания о свойствах параболы

Каноническое уравнение параболы вида $y = ax^2$, изучаемой в курсе элементарной математики, получается путем взаимного переименования координатных переменных x и y.

Из теоремы Прил. 1.4.1 следует возможность альтернативных формулировок свойств параболы.

Директориальное свойство параболы: парабола есть геометрическое место точек, отношение расстояния от которых до данной точки (фокуса) к расстоянию до данной прямой (директрисы) постоянно и равно единице.

Оптическое свойство параболы: касательная в любой точке гиперболы образует равные углы с фокальным радиусом точки касания и положительным направлением оси абсцисс. (Каждый луч света, выходящий из фокуса параболы, после отражения от параболы распространяется параллельно ее оси.)

Проведение касательных к параболе

Теорема Прил. 1.4.2 **Пусть $A = \|\, x_0\, y_0 \,\|^{\mathrm{T}}$ есть точка, принадлежащая параболе, заданной каноническим уравнением, тогда уравнение касательной к этой параболе, проходящей через точку A, будет $y_0 y = p(x + x_0)$.**

Уравнение параболы в полярной системе координат

Поместим полюс полярной системы координат в фокус параболы, а полярную ось направим по линии, перпендикулярной директрисе и проходящей через ее фокус (рис. Прил. 1.4.1). Для произвольной точки A, лежащей на параболе:

$$r = \frac{p}{2} + x = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} + r\cos\varphi = p + r\cos\varphi\,.$$

Откуда $r(1-\cos\varphi) = p$ и окончательно $r = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$.