Приложение 2. СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В теореме 4.5.1 были перечислены конкретные типы поверхностей второго порядка, различие между которыми сохраняется при переходе из одной декартовой системы координат в другую. В данном приложении будут рассмотрены основные свойства поверхностей этих типов.

Приложение 2.1. Вырожденные поверхности второго порядка

К вырожденным поверхностям второго порядка относятся типы, указанные в табл. 4.5.1.

В первых двух столбцах этой таблицы перечислены типы пустых множеств, а также объекты точечного и линейного типа, исследование которых полностью аналогично случаям, рассмотренным в приложении 1, в ортонормированной, канонической системе координат $\{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$.

Первые три типа поверхностей, содержащиеся в третьей колонке таблицы, являются частными случаями цилиндрической поверхности, образующая которых параллельна оси Oz, а направляющими служат плоские кривые — эллипс, гипербола и парабола, соответственно расположенные в плоскости Oxy.

Описание свойств невырожденных поверхностей второго порядка (табл. 4.5.2) будет (как и в случае линий 2-го порядка) выполняться в ортонормированной системе координат.

Нетрудно убедиться, что в общем случае в сечении поверхности второго порядка плоскостью получается линия второго порядка. При этом для описания основных свойств поверхностей второго порядка достаточно рассмотреть сечения, параллельные координатным плоскостям.

Приложение 2.2. Эллипсоид

Определение Прил. 2.2.1	Поверхность, задаваемая в некоторой ортонормированной системе координат уравнением вида $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \text{где } a>0,\ b>0,\ c>0\,,$$ называется *эллипсоидом*.

Свойства эллипсоида

1°. Эллипсоид — ограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что $|x| \leq a, \quad |y| \leq b, \quad |z| \leq c$.

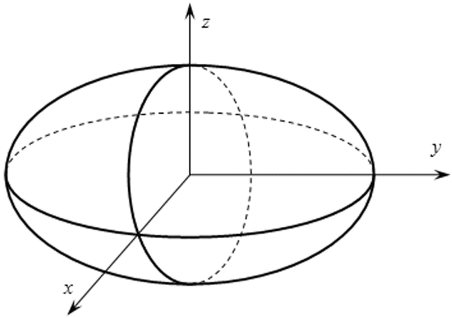

Рис. Прил. 2.2.1

2°. Эллипсоид обладает:

- центральной симметрией относительно начала координат;
- осевой симметрией относительно координатных осей;
- плоскостной симметрией относительно каждой из координатных плоскостей.

3°. В сечении эллипсоида плоскостью, ортогональной любой из осей координат, получается эллипс, точка или пустое множество. Например, используя секущую плоскость $z = z_0$, где $|z_0| < c$, получаем следующую систему уравнений, задающую линию сечения:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\dfrac{z_0^2}{c^2}}\,\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\dfrac{z_0^2}{c^2}}\,\right)^2} & = & 1\,, \\ z & = & z_0\,, \end{array} \right.$$

являющейся эллипсом (см. рис. Прил. 2.2.1).

Приложение 2.3. Эллиптический параболоид

Определение Прил. 2.3.1	Поверхность, задаваемая в некоторой ортонормированной системе координат уравнением вида $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z, \quad \text{где } a>0,\ b>0\,,$$ называется *эллиптическим параболоидом.*

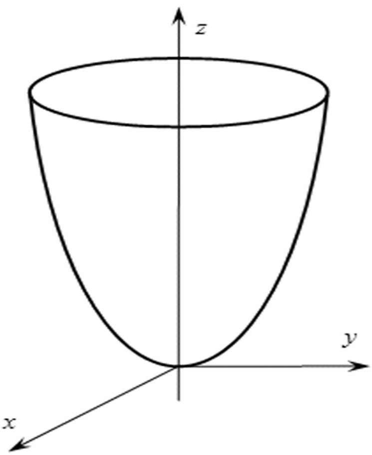

Рис. Прил. 2.3.1

Свойства эллиптического параболоида

1°. Эллиптический параболоид – *неограниченная* поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что $z \geq 0$ и принимает сколь угодно большие значения.

2°. Эллиптический параболоид обладает
- *осевой симметрией* относительно оси Oz;
- *плоскостной симметрией* относительно координатных плоскостей Oxz и Oyz.

3°. В сечении эллиптического параболоида плоскостью, ортогональной оси Oz, получается *эллипс, точка или пустое множество*, а плоскостями, ортогональными осям Ox или Oy, — *параболы.* Например, рассматривая сечение плоскостью $z = z_0 > 0$, получаем плоскую линию

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{2z_0}\,\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{2z_0}\,\right)^2} & = & 1\,, \\ z & = & z_0\,, \end{array} \right.$$

являющуюся эллипсом. С другой стороны, сечение плоскостью $y = y_0$ дает линию

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 & = & 2a^2\left(z - \dfrac{y_0^2}{2b^2}\right)\,, \\ y & = & y_0\,, \end{array} \right.$$

которая есть парабола. Для случая плоскости $x = x_0$ система уравнений, задающая линию сечения, имеет аналогичный вид

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y^2 & = & 2b^2\left(z - \dfrac{x_0^2}{2a^2}\right)\,, \\ x & = & x_0\,. \end{array} \right.$$

Приложение 2.4. Гиперболический параболоид

Определение Прил. 2.4.1	Поверхность, задаваемая в некоторой ортонормированной системе координат уравнением вида $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z, \quad \text{где } a>0,\ b>0\,,$$ называется *гиперболическим параболоидом.*

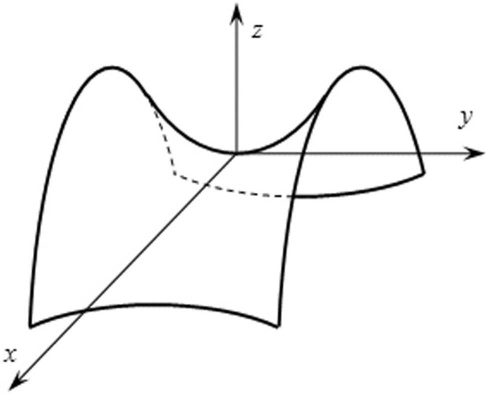

Рис. Прил. 2.4.1

Свойства гиперболического параболоида

1°. Гиперболический параболоид – *неограниченная* поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что z — любое.

2°. Гиперболический параболоид обладает
- *осевой симметрией* относительно оси Oz;
- *плоскостной симметрией* относительно координатных плоскостей Oxz и Oyz.

3°. В сечении гиперболического параболоида плоскостью, ортогональной оси Oz, получается *гипербола*, а плоскостями, ортогональными осям Ox или Oy, — *параболы*. Например, используя секущую плоскость $z = z_0 > 0$, получаем плоскую линию

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{2z_0}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{2z_0}\right)^2} & = & 1\,, \\ z & = & z_0\,, \end{array} \right.$$

являющуюся гиперболой. При $z = z_0 < 0$ в сечении будет также получаться гипербола

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{-2z_0}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{-2z_0}\right)^2} & = & -1\,, \\ z & = & z_0\,. \end{array} \right.$$

С другой стороны, сечение плоскостью $y = y_0$ дает линию

$$\begin{cases} x^2 & = & 2a^2\left(z + \dfrac{y_0^2}{2b^2}\right), \\ y & = & y_0\,, \end{cases}$$

которая есть парабола. Для случая сечения плоскостью $x = x_0$ система уравнений имеет аналогичный вид

$$\begin{cases} y^2 & = & 2b^2\left(z + \dfrac{x_0^2}{2a^2}\right), \\ x & = & x_0\,. \end{cases}$$

Из полученных уравнений следует, что гиперболический параболоид может быть получен поступательным перемещением в пространстве параболы так, что ее вершина перемещается вдоль другой параболы, ось которой параллельна оси первой параболы, ветви направлены противоположно, а плоскости парабол взаимно перпендикулярны.

4°. Гиперболический параболоид имеет два семейства *прямолинейных образующих.*

Действительно, если записать уравнение данной поверхности в виде

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2z\,,$$

то можно прийти к заключению, что при любых значениях параметра α точки, лежащие на прямых (проверьте самостоятельно, что это — прямые!)

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} & = & 2\alpha\,,\\ \alpha\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right) & = & z\end{array}\right. \qquad \text{и} \qquad \left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b} & = & 2\alpha\,,\\ \alpha\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right) & = & z\,,\end{array}\right.$$

также принадлежат и гиперболическому параболоиду, поскольку почленное перемножение уравнений плоскостей, задающих эти прямые, дает уравнение гиперболического параболоида.

Заметим, что для каждой точки гиперболического параболоида существует *пара прямых*, проходящих через эту точку и целиком лежащих на гиперболическом параболоиде. Уравнения этих прямых могут быть получены (с точностью до некоторого общего ненулевого множителя) путем подбора конкретных значений параметра α.

Приложение 2.5.
Однополостный гиперболоид

Определение Прил. 2.5.1	Поверхность, задаваемая в некоторой ортонормированной системе координат уравнением вида $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \text{где } a>0,\ b>0,\ c>0\,,$$ называется *однополостным гиперболоидом.*

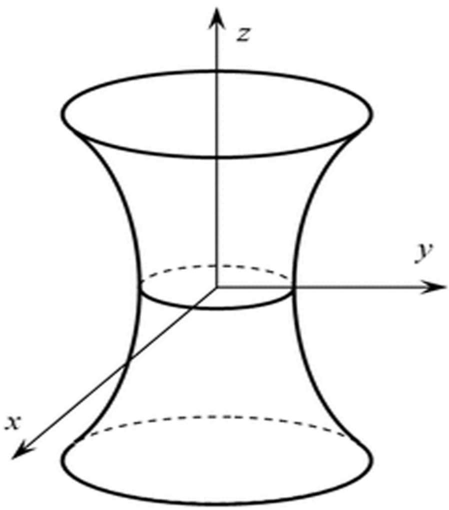

Рис. Прил. 2.5.1

Свойства однополостного гиперболоида

1°. Однополостный гиперболоид — это *неограниченная* поверхность, поскольку из его канонического уравнения (см. опр. Прил. 2.5.1) следует, что $z \in (-\infty, +\infty)$.

2°. Однополостный гиперболоид обладает
- *центральной симметрией* относительно начала координат;
- *осевой симметрией* относительно всех координатных осей.
- *плоскостной симметрией* относительно всех координатных плоскостей.

3°. В сечении однополостного гиперболоида плоскостью, ортогональной оси Oz, получается *эллипс*, а плоскостями, ортогональными осям Ox или Oy, — *гиперболы.* Вывод уравнений для линий сечения аналогичен рассмотренным ранее случаям.

4°. Однополостный гиперболоид имеет два семейства *прямолинейных образующих.*

Действительно, если записать уравнение данной поверхности в виде

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)\ ,$$

то можно прийти к заключению, что при любых, не равных нулю одновременно, значениях параметров α и β точки, лежащие на прямых

$$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right) & = & \beta\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\ ,\\ \beta\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right) & = & \alpha\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\end{array}\right.$$

и

$$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right) & = & \beta\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\ ,\\ \beta\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right) & = & \alpha\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\ ,\end{array}\right.$$

также принадлежат и однополостному гиперболоиду, поскольку почленное перемножение уравнений плоскостей, задающих эти прямые, дает уравнение однополостного гиперболоида.

Заметим, что для каждой точки однополостного гиперболоида существует *пара прямых*, проходящих через эту точку и целиком лежащих на нем. Уравнения этих прямых могут быть получены (с точностью до некоторого общего ненулевого множителя) путем подбора значений параметров α и β.

Проверьте самостоятельно, что нормальные векторы плоскостей в обеих системах неколлинеарны.

Приложение 2.6.
Двуполостный гиперболоид

Определение Прил. 2.6.1	Поверхность, задаваемая в некоторой ортонормированной системе координат уравнением вида $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \text{где } a>0,\ b>0,\ c>0\,,$$ называется *двуполостным гиперболоидом.*

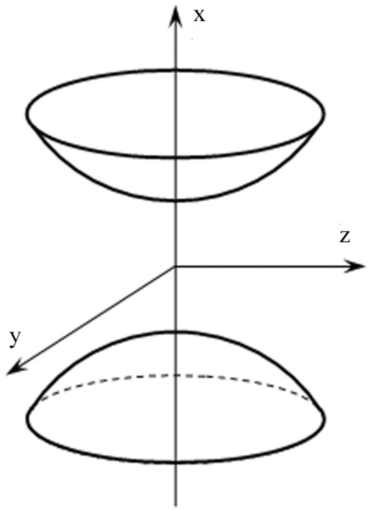

Рис. Прил. 2.6.1

Свойства двуполостного гиперболоида

1°. Двуполостный гиперболоид — это *неограниченная* поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует неравенство $a \leq |x| < +\infty$.

2°. Двуполостный гиперболоид обладает
- *центральной симметрией* относительно начала координат;
- *осевой симметрией* относительно всех координатных осей.
- *плоскостной симметрией* относительно всех координатных плоскостей.

3°. В сечении двуполостного гиперболоида плоскостью, ортогональной оси Ox, при $|x| > a$ получается *эллипс*, а плоскостями, ортогональными осям Oy или Oz, — *гиперболы*.

Приложение 2.7.
Поверхности вращения

Пусть некоторая линия, расположенная в плоскости Oxz, имеет уравнение $F(x,z)=0$. Если вращать эту линию вокруг оси Oz, то каждая ее точка будет описывать окружность.

Определение Прил. 2.7.1	Совокупность точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$, называется *поверхностью вращения.*

Пример Прил. 2.7.1

К поверхностям вращения, например, относятся:

1°. Эллипсоид вращения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,.$$

2°. Конус вращения $\quad k^2z^2=x^2+y^2\,.$

Замечание Прил. 2.7.1. Поверхности вращения линии второго порядка не всегда задаются уравнениями второго порядка.

Например, если квадратную параболу $z^2 = 2px$ вращать вокруг оси Ox, то получается эллиптический параболоид вращения, однако при вращении этой же кривой вокруг оси Oz получится поверхность, задаваемая уравнением вида

$$z^2 = \pm 2p\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{или} \quad z^4 = 4p^2(x^2 + y^2).$$

Задача Прил. 2.7.1 *Составить уравнение поверхности вращения, получаемой при вращении линии $z^2 = 2px$ вокруг оси Ox.*

Решение. Зафиксируем на вращаемой линии точку с координатами $\| x_0 \ 0 \ z_0 \|^{\mathrm{T}}$. Линия, получаемая при вращении этой точки вокруг оси Ox в плоскости $x = x_0$, есть окружность, задаваемая уравнением $y^2 + z^2 = z_0^2$.

С другой стороны, $z_0^2 = 2px_0$, поэтому $y^2 + z^2 = 2px_0$.

Наконец, в силу произвольности точки $\| x_0 \ 0 \ z_0 \|^{\mathrm{T}}$, выбранной на линии вращения, получаем, что уравнение поверхности вращения

$$y^2 + z^2 = 2px$$

Решение получено. есть уравнение эллиптического параболоида.