Матричные объекты

Аналитическое описание геометрических линий, фигур и тел, равно как и операций с ними, может быть в большом числе случаев упрощено при использовании специального математического объекта, называемого *матрицей*.

Определение 1.1.1	Матрицей размера $m \times n$ называется упорядоченная прямоугольная таблица (или массив) чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Числа, образующие матрицу, называемые ее элементами (или компонентами), характеризуются как своим значением, так и номерами строк и столбцов, в которых они расположены.

Условимся обозначать значение элемента матрицы, расположенного в i-й строке и j-м столбце, как α_{ij}[1] .

Определение 1.1.2	Числа m, n и $m \times n$ называются размерами матрицы.

[1] Читается как '*альфа* $i - j$' .

Матрицы обозначаются и записываются перечислением их элементов. Например, матрица с элементами $\alpha_{ij} \quad \forall i = [1, m] \ \forall j = [1, n]$ может быть записана в *развернутой* форме:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{Vmatrix},$$

из которых мы будем использовать последнюю. Если же оказывается достаточным *неразвернутое* представление матрицы, то мы записываем ее в виде $\|\alpha_{ij}\|$ или просто $\|A\|$.

Матрицы принято классифицировать по количеству их строк и столбцов.

Определение 1.1.3	Если $n = m$, то матрица называется *квадратной, порядка* n . Матрица размера $m \times 1$ называется m-мерным (или m-компонентным) *столбцом.* Матрица размера $1 \times n$ называется n-мерной (или n-компонентной) *строкой.*

Отметим, что, хотя формально для обозначения строк или столбцов следует использовать двухиндексные записи $\|\alpha_{1j}\|$ или $\|\beta_{i1}\|$, неменяющиеся индексы принято опускать, в результате чего обозначения строк или столбцов имеют вид $\|\alpha_j\|$ или $\|\beta_i\|$ соответственно .

В этих случаях необходимо явно указывать, о чем идет речь: о строке или о столбце.

Некоторые часто используемые матрицы с особыми значениями элементов имеют специальные названия и обозначения.

Определение 1.1.4	Квадратная матрица, для которой $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ $\forall\, i,j = [1,n]$, называется *симметрической*. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*. Нулевую матрицу обозначают как $\lVert O \rVert$. Квадратная матрица порядка n вида $$\left\lVert \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right\rVert$$ называется *единичной*. Единичную матрицу принято обозначать $\lVert E \rVert$.

Операции с матрицами

Определение 1.1.5	Две матрицы $\|A\|$ и $\|B\|$ считаются *равными* (обозначается: $\|A\| = \|B\|$), если они одинаковых размеров и если их соответствующие компоненты равны, то есть $\alpha_{ij} = \beta_{ij} \;\; \forall i = [1, m]$ и $\forall j = [1, n]$.
Определение 1.1.6	Матрица $\|C\|$ называется *суммой* матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ (обозначается: $\|C\| = \|A\| + \|B\|$), если матрицы $\|A\|$, $\|B\|$, $\|C\|$ одинаковых размеров и $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \;\; \forall i = [1, m]$ и $\forall j = [1, n]$, где числа γ_{ij} являются соответствующими компонентами матрицы $\|C\|$.
Определение 1.1.7	Матрица $\|C\|$ называется *произведением* числа λ на матрицу $\|A\|$ (обозначается: $\|C\| = \lambda\|A\|$), если матрицы $\|A\|$, $\|C\|$ одинаковых размеров и $\gamma_{ij} = \lambda\alpha_{ij} \;\; \forall i = [1, m]$ и $\forall j = [1, n]$, где числа γ_{ij} являются соответствующими компонентами матрицы $\|C\|$.

Отметим, что умножать число можно на матрицу любого размера.

Замечание 1.1.1. В качестве всех (или некоторых) элементов матрицы допускается использование не только чисел, но и других математических объектов, для которых подходящим образом определены понятие равенства, операции сложения и умножения на число, например, векторов, функций или тех же матриц.

Определение 1.1.8	*Транспонированием* матрицы называется операция, в результате которой образуется новая матрица, в которой строками служат столбцы исходной, записанные с сохранением порядка их следования (рис. 1).

Матрица, которая получается в результате транспонирования матрицы $\|A\|$, обозначается $\|A\|^{\mathrm{T}}$.

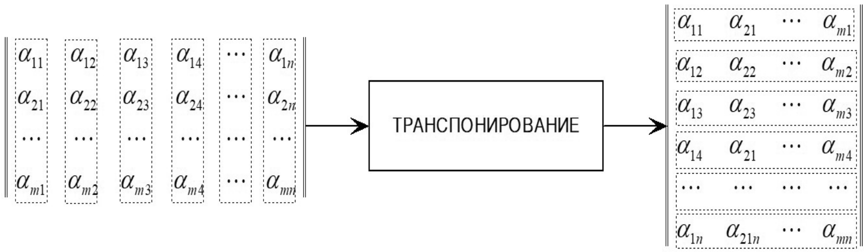

Рис. 1. Операция транспонирования

При транспонировании (то есть для элементов транспонированной матрицы $\|\alpha_{ij}\|$) верны равенства $\alpha_{ij}^{\mathrm{T}} = \alpha_{ji} \quad \forall i = [1, m]$ и $\forall j = [1, n]$.

Операция транспонирования, например, не изменяет симметрическую матрицу, но переводит строку размера n в столбец размера n и наоборот [2].

[2]В дальнейшем, ради компактности записи формул, содержащих в своей записи столбцы, мы будем иногда представлять последние транспонированными строками.

Детерминанты (определители) квадратных матриц 2-го и 3-го порядков

Для *квадратных* матриц $\|A\|$ имеется специальная числовая характеристика, называемая детерминантом (или определителем) и обозначаемая как $\det\|A\|$.

Определение и свойства детерминантов квадратных матриц n-го порядка будут приведены позднее, здесь же мы пока ограничимся рассмотрением случаев $n = 2$ и $n = 3$.

Определение 1.1.9	*Детерминантом* (*определителем*) квадратной матрицы 2-го порядка $\left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \right\|$ называется число $$\det \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \right\| = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}\,.$$
Определение 1.1.10	*Детерминантом* (*определителем*) квадратной матрицы 3-го порядка $\left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{matrix} \right\|$ называется число $$\det \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{matrix} \right\| =$$ $$= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} -$$ $$-\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}\,.$$

Вычисление значений определителей 3-го порядка иногда удобнее выполнять не по определению 1.1.10, а используя их выражения через определители 2-го порядка.

Для описания этих выражений будут полезны:

Соглашение о суммировании

В тех случаях, когда явная запись суммы некоторого числа слагаемых нецелесообразна или невозможна, но известна $f(k)$ – зависимость значения каждого из слагаемых от его порядкового номера k , допускается использование специальной формы записи операции суммирования:

$$f(m)+f(m+1)+f(m+2)+\ldots+f(n-1)+f(n)=\sum_{k=m}^{n} f(k)$$

(читается: «сумма по k от m до n»), где k — *индекс суммирования*, m — *минимальное* значение индекса суммирования, n — *максимальное* значение индекса суммирования и, наконец, $f(k)$ – слагаемое с номером k.

Пример 1.1.1: По соглашению о суммировании будут справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2+\ldots+998^2+999^2 &= \sum_{k=1}^{999} k^2, \\
\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin(n+3)\alpha &= \sum_{k=0}^{n+2} \sin(k+1)\alpha, \\
\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(M-1)M} &= \sum_{k=2}^{M} \frac{1}{(k-1)k}.
\end{aligned}$$

Дополнительный минор

Определение 1.1.11	*Минором, дополнительным к элементу* α_{ij}. в матрице $\|A\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{matrix} \right\|$ называется определитель квадратной матрицы 2-го порядка, получаемой из матрицы $\|A\|$ при удалении из нее i-й строки и j-го столбца.

Минор, дополнительный к элементу α_{ij}, принято обозначать $\overline{M}_i^j$. Например, $\overline{M}_2^3 = \det \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{matrix} \right\|$.

Тогда будет справедлива

Теорема 1.1.1 **Значение определителя матрицы 3-го порядка $\forall i = 1, 2, 3$ может быть выражено формулой**

$$\det \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{i+k} \alpha_{ik} \overline{M}_i^k ,$$

а $\forall j = 1, 2, 3$ – формулой

$$\det \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+j} \alpha_{kj} \overline{M}_k^j .$$

Доказательство.

Данные формулы проверяются непосредственно при помощи определений 1.1.9, 1.1.10 и 1.1.11.

Теорема доказана.

Первая из формул в теореме 1.1.1 называется *разложением определителя по i-й строке*, а вторая – *разложением по j-му столбцу*.

Пример 1.1.2 В силу теоремы 1.1.1, определитель матрицы 3-го порядка может быть разложен по первой строке и выражен через определители 2-го порядка следующим образом:

$$\det \left\| \begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array} \right\| = \alpha_{11} \det \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array} \right\| -$$

$$-\alpha_{12} \det \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{array} \right\| + \alpha_{13} \det \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{array} \right\| .$$

Замечание 1.1.2. Соотношения, аналогичные приведенному в примере 1.1.2, могут быть записаны как для других строк, так и для *любого* из ее столбцов. При этом показатель степени у (-1) в каждом слагаемом равен сумме строкового и столбцового индексов элемента, умножаемого на детерминант.

Для вычислений целесообразно выбирать то разложение, которое проще. Например, по строке или по столбцу со значительным числом нулей.

`Замечание 1.1.3.` Иногда вычисление определителя матрицы 3-го порядка удобнее выполнить по следующему правилу: каждое слагаемое в определении 1.1.10 есть произведение некоторой тройки элементов матрицы, причем элементы, входящие в произведения, берущиеся со знаком «плюс», соединены в левой части рис. 2 штриховыми линиями, а элементы, входящие в произведения, которые берутся со знаком «минус», – в правой.

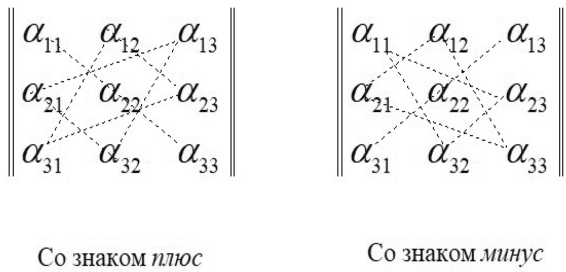

Рис. 2. Вычисление определителя 3-го порядка методом треугольников

Непосредственная проверка показывает, что из определений 1.1.9 и 1.1.10 вытекает

Следствие 1.1.1	**При транспонировании квадратных матриц 2-го или 3-го порядков их определители не меняются.**

Определение 1.1.12	Квадратные матрицы, имеющие нулевой детерминант, принято называть *вырожденными*, а квадратные матрицы с ненулевым детерминантом – *невырожденными*.

В терминах определителей матриц второго порядка достаточно удобно формулируется условие однозначной разрешимости системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Теорема 1.1.2 (Крамера) **Для того чтобы система двух линейных уравнений имела единственное решение**

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 & + & \alpha_{12}\xi_2 & = & \beta_1\,, \\ \alpha_{21}\xi_1 & + & \alpha_{22}\xi_2 & = & \beta_2\,, \end{cases}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\det\left\|\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix}\right\| \neq 0\,,$$

то есть чтобы матрица этого определителя была *невырожденной*.

Доказательство.

Докажем необходимость. Пусть данная система линейных уравнений имеет единственное решение — упорядоченную пару чисел ξ_1 и ξ_1 , тогда должны быть справедливыми вытекающие из ее уравнений соотношения

$$\xi_1 (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) = \beta_1\alpha_{22} - \beta_2\alpha_{12} \, ,$$
$$\xi_2 (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) = \beta_2\alpha_{11} - \beta_1\alpha_{21} \, ,$$

или $\quad \xi_1\Delta = \Delta_1; \quad \xi_2\Delta = \Delta_2, \quad$ где

$$\Delta = \det \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{array} \right\| ,$$

$$\Delta_1 = \det \left\| \begin{array}{cc} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{array} \right\| , \qquad \Delta_2 = \det \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \beta_2 \end{array} \right\| .$$

Равенства $\quad \xi_1\Delta = \Delta_1; \quad \xi_2\Delta = \Delta_2, \quad$ не верны, если

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = 0, \\ \Delta_1 \neq 0 \end{array} \right. \qquad \text{или} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Delta = 0, \\ \Delta_2 \neq 0. \end{array} \right.$$

Если же $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то коэффициенты уравнений исходной системы обязаны (проверьте это самостоятельно) быть пропорциональными. Тогда исходная система может иметь решение, но оно не будет единственным.

Поэтому из условий существования и единственности решения следует, что $\Delta \neq 0$.

Докажем достаточность.

Если $\Delta \neq 0$, то числа

$$\xi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad \text{и} \qquad \xi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

являющиеся решениями исходной системы, определяются однозначно значениями коэффициентов

$$\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \alpha_{21},\ \alpha_{22},\ \beta_1 \ \text{ и } \ \beta_2.$$

Теорема доказана.

Умножение матриц

Определение 5.1.1	Матрица $\|C\|$ размера $m \times n$ с элементами $$\gamma_{ij} \quad \forall i = \overline{1,m}\,,\ \forall j = \overline{1,n}$$ называется *произведением* матрицы $\|A\|$ размера $m \times l$ с элементами $$\alpha_{ik} \quad \forall i = \overline{1,m}\,,\ \forall k = \overline{1,l}$$ на матрицу $\|B\|$ размера $l \times n$ с элементами $$\beta_{kj} \quad \forall k = \overline{1,l}\,,\ \forall j = \overline{1,n}\,,$$ где $$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{l} \alpha_{ik}\beta_{kj} \quad \forall i = \overline{1,m}\,,\ \forall j = \overline{1,n}\,.$$

Результат *умножения матриц* — матрица $\|C\|$ — есть матрица размера $m \times n$ при любом натуральном l. Произведение матриц обозначается как $\|C\| = \|A\|\,\|B\|$. Правило вычисления компонентов произведения по компонентам сомножителей иллюстрирует рис. 3.

$$
\begin{Vmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{1l} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{2l} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{il} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{ml}
\end{Vmatrix}
\begin{Vmatrix}
\beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1j} & \cdots & \beta_{1n} \\
\beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2j} & \cdots & \beta_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\beta_{l1} & \beta_{l2} & \cdots & \beta_{lj} & \cdots & \beta_{ln}
\end{Vmatrix} =
$$

$$
= \begin{Vmatrix}
\gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1j} & \cdots & \gamma_{1n} \\
\gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2j} & \cdots & \gamma_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\gamma_{i1} & \gamma_{i2} & \cdots & \gamma_{ij} & \cdots & \gamma_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mj} & \cdots & \gamma_{mn}
\end{Vmatrix}
\qquad
\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{l} \alpha_{ik} \beta_{kj}
$$

Рис. 3. Умножение матриц

Пример 5.1.1 Приведем результаты умножения матриц, имеющих не более чем пару строк или столбцов.

1. Пусть размер $\|A\|$ есть 2×2, а размер $\|B\|$ — 2×1, тогда размер $\|C\|$ будет 2×1. Конкретно в этом случае

$\|C\| = \|A\|\,\|B\| =$

$$= \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} \end{array} \right\| .$$

2. Если размер $\|A\|$ есть 1×2, а размер $\|B\|$ — 2×2, тогда размер $\|C\|$ будет 1×2. Тогда

$$\|C\| = \|A\|\,\|B\| = \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} \end{array} \right\| .$$

3. Наконец, пусть размеры $\|A\|$ и $\|B\|$ одинаковые. Для размера 1×1 очевидно, что

$$\|C\| = \|A\| \, \|B\| = \| \, \alpha_{11}\beta_{11} \| \ .$$

Заметим, что в силу определения 5.1.1 матрицы такого размера по алгебраическим свойствам не будут отличаться от вещественных чисел.

Если же размеры $\|A\|$ и $\|B\|$ есть 2×2, то

$$\|C\| = \|A\| \, \|B\| = \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} \end{array} \right\| .$$

Замечания об умножении матриц

Из определения произведения матриц непосредственно следует, что для матриц подходящих размеров:

1) умножение матриц *некоммутативно*, то есть в общем случае

$$\|A\|\|B\| \neq \|B\|\|A\|\,,$$

2) умножение матриц *ассоциативно*

$$\|A\|\Big(\|B\|\|C\|\Big) = \Big(\|A\|\|B\|\Big)\|C\|\,,$$

3) умножение матриц обладает свойством *дистрибутивности*.

$$\|A\|\Big(\|B\| + \|C\|\Big) = \|A\|\|B\| + \|A\|\|C\|\,.$$

Легко убедиться, что умножение (как справа, так и слева) любой матрицы на подходящего размера *единичную* матрицу $\|E\|$ дает в результате ту же самую матрицу:

$$\|A\|\|E_1\| = \|A\| \qquad \text{или} \qquad \|E_2\|\|A\| = \|A\|\,.$$

Определение 5.1.2	Матрица $\|A\|^{-1}$ называется *обратной* к квадратной матрице $\|A\|$, если выполнены равенства $$\|A\|^{-1}\|A\| = \|A\|\|A\|^{-1} = \|E\|\,.$$

Обратная матрица существует *не для произвольной* квадратной матрицы. Для существования матрицы, обратной к $\|A\|$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\det\|A\| \neq 0$ [3].

Лемма 5.1.1 **Если обратная матрица существует, то она единственна.**

[3]Определение и свойства детерминанта квадратной матрицы порядка n рассматриваются в гл. 6 .

В частном случае, когда $\|A\| = \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{array} \right\|$ и если $\det\|A\| \neq 0$, ее обратная матрица имеет вид

$$\|A\|^{-1} = \frac{1}{\det\|A\|} \left\| \begin{array}{rr} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{array} \right\| . \qquad (5.1.1)$$

Отметим, что для квадратных матриц порядка n справедливы[4] следующие равенства:

$$\det\bigl(\|A\|\,\|B\|\bigr) = \det\|A\| \; \det\|B\| \, ,$$

$$\det\|A\|^{-1} = \frac{1}{\det\|A\|} \, , \quad \text{если} \quad \det\|A\| \neq 0 \, .$$

[4] Для $n = 2$ эти равенства проверяются непосредственно по определению 1.1.9. Для квадратных матриц порядка n их справедливость будет доказана в гл. 6.

Пример 5.1.2 Используя матричные операции, систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 & + & \alpha_{12}\xi_2 & = & \beta_1 \,, \\ \alpha_{21}\xi_1 & + & \alpha_{22}\xi_2 & = & \beta_2 \end{cases}$$

можно записать в виде $\|A\| \, \|x\| = \|b\|$, где

$$\|x\| = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\| , \quad \|b\| = \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\| , \quad \|A\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \right\| ,$$

а ее решение при $\det \|A\| \neq 0$, как $\|x\| = \|A\|^{-1} \, \|b\|$.

Теорема 5.1.1 **Справедливо равенство** $\big(\|A\|\,\|B\|\big)^{\mathrm{T}} = \|B\|^{\mathrm{T}}\,\|A\|^{\mathrm{T}}$.

Теорема 5.1.2 **Для невырожденных одинакового размера квадратных матриц** $\|A\|$ **и** $\|B\|$ **справедливо равенство** $\big(\|A\|\,\|B\|\big)^{-1} = \|B\|^{-1}\,\|A\|^{-1}$.

Задача 5.1.1 *Проверить тождество* $\big(\,\|A\|^{-1}\big)^{\mathrm{T}} = \big(\,\|A\|^{\mathrm{T}}\big)^{-1}$.

Определение 5.1.4	Невырожденная квадратная матрица $\|Q\|$, для которой $\|Q\|^{-1} = \|Q\|^{\mathrm{T}}$, называется *ортогональной*.

Свойства ортогональных матриц, играющих важную роль во многих приложениях, можно сформулировать в виде следующих теорем.

Теорема 5.1.3 **Для ортогональной матрицы** $\|Q\|$ **справедливо равенство** $\det\|Q\| = \pm 1$.