Направленные отрезки

Определение 1.2.1	Отрезок прямой, концами которого служат точки A и B, называется *направленным отрезком*, если указано, какая из этих двух точек является началом и какая – концом отрезка. Направленный отрезок, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым* направленным отрезком.

Будем записывать направленный отрезок в виде $\overline{AB}$, полагая, что точка A является началом отрезка, а точка B – его концом. Иногда направленный отрезок представляется просто как $\overline{a}$. Длина отрезка обозначается как $\left|\overline{AB}\right|$ или как $|\overline{a}|$.

Действия с направленными отрезками

Определение 1.2.2	Два ненулевых направленных отрезка называются *равными*, если их начала и их концы могут быть одновременно совмещены параллельным переносом одного из этих отрезков.

Заметим, что в силу данного определения параллельный перенос направленных отрезков не меняет.

Пусть даны два направленных отрезка $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Определение 1.2.3	Совместим начало отрезка $\overline{b}$ с концом $\overline{a}$ параллельным переносом отрезка $\overline{b}$, тогда направленный отрезок $\overline{c}$, начало которого совпадает с началом $\overline{a}$ и конец с концом $\overline{b}$, называется *суммой* направленных отрезков $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Эту операцию принято обозначать так: $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$.

Определение 1.2.3 иногда называют «*правилом треугольника*» (см. рис. 1-1)).

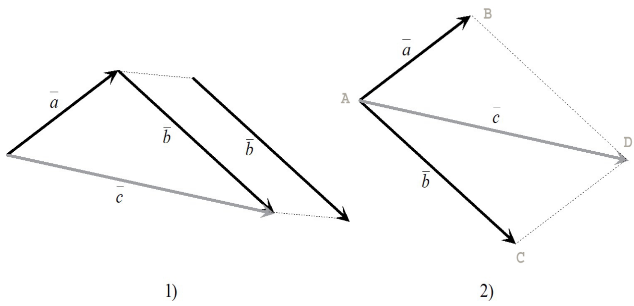

Рис. 1. Сложение направленных отрезков

Отметим, что для операции сложения направленных отрезков:

1) операция сложения направленных отрезков может быть выполнена по правилу параллелограмма, равносильному определению 1.2.3 (см. рис. 1-2)) ;

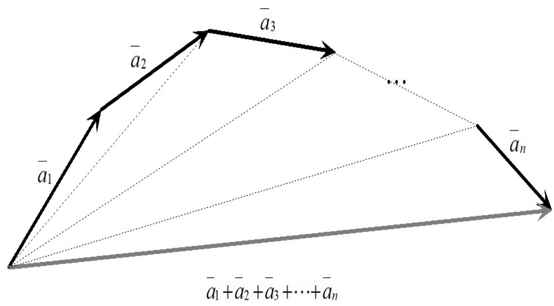

Рис. 2. Правило замыкающей

2) обобщение правила треугольника на любое число слагаемых носит название правила замыкающей, смысл которого ясен из рис. 2;

3) разностью направленных отрезков $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется направленный отрезок $\overline{c}$, удовлетворяющий равенству $\overline{a} = \overline{b} + \overline{c}$;

4) любой направленный отрезок при сложении с нулевым не изменяется.

Определение 1.2.4

Под произведением числа λ на направленный отрезок $\overline{a}$ понимают:

– при $\lambda = 0$ *нулевой* направленный отрезок,

– при $\lambda \neq 0$ направленный отрезок $\overline{b}$,

для которого *длина* $\left|\overline{b}\right| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$,

а *направление* $\overline{b}$ совпадает с направлением $\overline{a}$ для $\lambda > 0$ и противоположно направлению $\overline{a}$ для $\lambda < 0$.

Пример 1.2.1

Результат применения определения 1.2.4 иллюстрирует рис. 3.

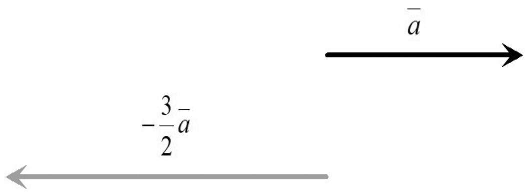

Рис. 3. Умножение числа на направленный отрезок

Определение множества векторов

Определение 1.3.1	Совокупность *всех* направленных отрезков, для которой определены описанные в § 1.2 : – понятие равенства (определение 1.2.2); – операция сложения (определение 1.2.3); – операция умножения числа на направленный отрезок (определение 1.2.4), называется *множеством векторов.* Конкретный элемент этого множества будем называть *вектором* и обозначать символом с верхней стрелкой, например, $\vec{a}$.

Нулевой вектор обозначается символом $\vec{o}$.

Имеет место

Теорема 1.3.1 **Операции сложения и умножения на вещественное число на множестве векторов обладают свойствами:**

1. *Коммутативности*

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

2. *Ассоциативности*

$$\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c};$$

$$\lambda\left(\mu\vec{a}\right)=\left(\lambda\mu\right)\vec{a}.$$

3. *Дистрибутивности*

$$\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b};$$

$$\left(\lambda+\mu\right)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$$

для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любых чисел λ и μ.

Доказательство.

Данные свойства следуют из определения множества векторов и нуждаются в доказательстве. В качестве примера приведем доказательство свойства *коммутативности*.

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Совместим начала этих векторов и построим на них параллелограмм (рис. 1.3 – (2)).

Поскольку у параллелограмма противолежащие стороны параллельны и имеют равные длины, то $\vec{CD} = \vec{a}$; $\vec{BD} = \vec{b}$, но тогда, по правилу треугольника, из равных треугольников ΔACD и ΔABD следует, что

$$\vec{AD} = \vec{b} + \vec{CD} : \qquad \vec{AD} = \vec{a} + \vec{BD},$$

то есть

$$\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Теорема доказана.

Давая определение понятия *вектора*, следует принять во внимание

Замечание 1.3.1. Иногда векторным называют объект, характеризуемый числовой величиной и направлением. Хотя формально такое определение и допустимо, оно неравносильно определению 1.3.1, что иллюстрируется примером, показанном на рис. 1.6.

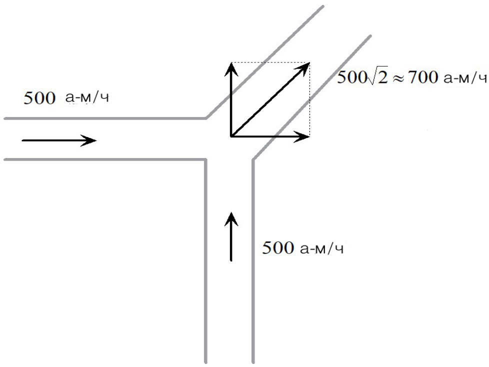

Рис. 4. Суммирование потоков

Например, поток автомобилей на некоторой трассе является характеристикой, для описания которой нужно указать как ее величину (число проходящих автомашин мимо наблюдателя за единицу времени), так и ее направление.

Предположим, что этот объект векторный (в смысле определения 1.3.1), и рассмотрим перекресток трех дорог достаточной пропускной способности, показанный на рис. 4, на котором сливаются два потока автомобилей по 500 а-м/ч каждый. Если суммировать потоки как векторы, то вместо очевидного результата 1000 а-м/ч мы получим (по правилу параллелограмма) заведомо бессмысленное значение $500\sqrt{2}$ а-м/ч. Откуда следует, что хотя поток автомашин характеризуется числовым значением и направлением, но тем не менее вектором (в смысле определения 1.3.1) он не является.

Замечание 1.3.2. С другой стороны, необходимо иметь в виду, что определение множества векторов 1.3.1 допускает их дальнейшую, более тонкую дифференциацию. Например, в некоторых физических и технических приложениях различают векторы полярные и аксиальные. К первым относятся, например, векторы скорости, силы, напряженности электрического поля; ко вторым – векторы момента силы, напряженности магнитного поля. Кроме того, в механике векторы подразделяются на свободные, скользящие и закрепленные, в зависимости от той роли, которую играет точка их приложения.

Замечание 1.3.3. К заключению о векторной природе тех или иных физических характеристик можно прийти путем рассуждений, основанных на определении 1.3.1 и экспериментальных данных.

Например, пусть некоторая материальная точка A , имеющая электрический заряд, перемещается в пространстве под действием электрического поля.

Положение этой точки в пространстве в момент времени t_0 можно задать исходящим из точки наблюдения и направленным в точку A вектором $\vec{r}(t_0)$, а в момент времени t — вектором $\vec{r}(t)$.

Поскольку перемещение $\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$ (как разность двух векторов) является вектором, то и скорость движения материальной точки будет вектором в силу определения 1.3.1.

Рассуждая аналогично, можно прийти к заключению, что вектором является также и ускорение.

С другой стороны, согласно второму закону Ньютона, ускорение материальной точки пропорционально действующей на нее силе, и, следовательно, сила тоже есть вектор.

Наконец, принимая во внимание пропорциональность силы, действующей на заряженное тело, и напряженности электрического поля, заключаем, что последняя характеристика также векторная.

Линейная зависимость векторов

Из определения 1.3.1 следует, что все векторы (как элементы множества векторов) обладают одинаковыми свойствами.

Однако если рассмотреть во множестве векторов непустые подмножества, состоящие из конечного числа элементов, то окажется, что каждое такое подмножество (или набор) векторов *обязательно* будет обладать *одним из двух* взаимно исключающих друг друга свойств.

Данные свойства, играющие очень важную роль как в теории, так и в прикладных задачах, имеют названия *линейной зависимости* и *линейной независимости*.

Рассмотрим эти свойства подробнее, введя вначале определения вспомогательных понятий *коллинеарности* и *компланарности* векторов.

Определение 1.4.1	Два ненулевых вектора, параллельные одной и той же прямой, называются *коллинеарными*. Три ненулевых вектора, параллельные одной и той же плоскости, называются *компланарными*.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору. Нулевой вектор считается компланарным любой паре векторов.

Дадим также

Определение 1.4.2	При любом натуральном k выражение вида $$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_k\vec{a}_k \quad = \quad \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\vec{a}_i\,,$$ где λ_i – некоторые числа, называется *линейной комбинацией* набора векторов $\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots\ \vec{a}_k\}$. Если все числа λ_i равны нулю одновременно, что равносильно условию $$\|\lambda_1\|+\|\lambda_2\|+\ldots+\|\lambda_k\|=0\,,$$ то в этом случае линейная комбинация называется *тривиальной*. Если хотя бы одно из чисел λ_i отлично от нуля (то есть $\|\lambda_1\|+\|\lambda_2\|+\ldots+\|\lambda_k\|>0$), то данная линейная комбинация называется *нетривиальной*.

Теперь дадим определения *линейной зависимости и линейной независимости* системы векторов.

Определение 1.4.3	Набор векторов $\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \dots\ \vec{a}_k\}\ \forall k \in \mathbb{N}$ называется *линейно зависимым*, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору, то есть такая, что $$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{o}, \quad \text{где} \quad \lvert\lambda_1\rvert + \lvert\lambda_2\rvert + \ldots + \lvert\lambda_k\rvert > 0\,.$$

Определение 1.4.4	Набор векторов $\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \dots\ \vec{a}_k\}$ называется *линейно независимым*, если из условия $$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{o}$$ следует тривиальность линейной комбинации $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a}_i$, то есть равенство $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0\,.$

Иначе говоря, если векторы $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \dots\ \vec{a}_k$ линейно независимы, то для любого набора чисел $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots\ ,\lambda_k$, не равных нулю одновременно, линейная комбинация $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a}_i$ есть не нулевой вектор.

Приведем теперь некоторые свойства линейно зависимых и линейно независимых векторов, следующие из определений 1.4.3 и 1.4.4.

Лемма 1.4.1 **Для линейной зависимости набора векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \dots\ \vec{a}_k,\quad k \geq 2$, необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.**

Доказательство.

Докажем необходимость.

Пусть векторы $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \dots\ \vec{a}_k$ линейно зависимы, тогда существуют числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots\ ,\lambda_k$, одновременно не равные нулю, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{o}$.
Для определенности можно считать, что $\lambda_1 \neq 0$, но тогда

$$\vec{a}_1 = \sum_{i=2}^{k} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right) \vec{a}_i\ ,$$

что и доказывает необходимость.

Докажем достаточность.

Пусть для определенности $\vec{a}_1 = \sum\limits_{i=2}^{k} \lambda_i \vec{a}_i$, тогда

$$(-1)\vec{a}_1 + \sum_{i=2}^{k} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{o},$$

причем $\quad |-1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_k| > 0$.

То есть линейная комбинация векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \dots\ \vec{a}_k$, равная нулевому вектору, нетривиальная, и, значит, они линейно зависимые.

Лемма доказана.

Также справедливы следующие утверждения, связанные с понятиями линейная зависимость и линейная независимость.

Теорема 1.4.1 **Один вектор линейно зависим тогда и только тогда, когда он нулевой.**

Теорема 1.4.2 **Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.**

Теоремы 1.4.1 и 1.4.2 предлагаются читателю для самостоятельного доказательства.

Теорема 1.4.3 **Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.**

Доказательство.

Докажем необходимость. Пусть векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно зависимы, т.е. существуют три, не равных нулю одновременно, числа $\lambda_1,\ \lambda_2, \lambda_3$, такие, что

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 = \vec{o}\,.$$

Тогда по лемме 1.4.1 один из векторов есть линейная комбинация двух остальных, и, значит, данные три вектора компланарны. Это и доказывает необходимость.

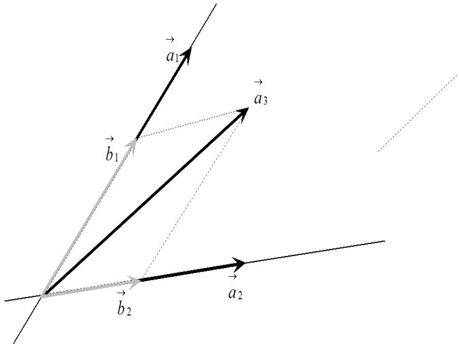

Рис. 5. К доказательству теоремы 1.4.3

Докажем достаточность в предположении, что векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ неколлинеарны.

Пусть даны три компланарных вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$. Параллельным переносом совместим начала этих векторов в одной точке.

Через конец вектора $\vec{a}_3$ проведем прямые, параллельные векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. При этом получим пару векторов $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$, таких, что $\vec{a}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$ (рис. 5).

Поскольку вектор $\vec{b}_1$ коллинеарен вектору $\vec{a}_1$, а вектор $\vec{b}_2$ коллинеарен вектору $\vec{a}_2$, то по лемме 1.4.1 и теореме 1.4.2 получаем, что

$$\vec{b}_1 = \lambda_1 \vec{a}_1 \qquad \text{и} \qquad \vec{b}_2 = \lambda_2 \vec{a}_2 \,,$$

но тогда

$$\vec{a}_3 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$$

и векторы по лемме 1.4.1 линейно зависимы.

Случай коллинеарных $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ рассмотрите самостоятельно.

Теорема доказана.

Теорема 1.4.4 **Если среди векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n\}$ имеется подмножество векторов, которые линейно зависимы, то и все эти векторы $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n\}$ линейно зависимы.**

Доказательство.

Без ограничения общности можно считать, что линейно зависимы первые $k < n$ векторов (иначе просто перенумеруем эти векторы), то есть существуют числа $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \dots \ , \lambda_k$, одновременно не равные нулю, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{o}$.

Построим нетривиальную линейную комбинацию из векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n\}$, взяв в качестве первых k коэффициентов числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots , \lambda_k$ и нули в качестве остальных. Тогда получим, что

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a}_i + \sum_{i=k+1}^{n} 0 \cdot \vec{a}_i = \vec{o}.$$

То есть исходный набор векторов линейно зависим.

Теорема доказана.

Следствие 1.4.1 **Если среди векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n\}$ имеется хотя бы один нулевой, то векторы $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n\}$ линейно зависимы.**

Базис. Координаты вектора в базисе

Определение 1.5.1	*Базисом на прямой* называется любой ненулевой вектор, принадлежащий этой прямой. *Базисом на плоскости* называется любая упорядоченная пара линейно независимых векторов, принадлежащих этой плоскости. *Базисом в пространстве* называется любая упорядоченная тройка линейно независимых векторов.

Определение 1.5.2	Базис называется *ортогональным*, если его векторы попарно ортогональны (взаимно перпендикулярны).

Определение 1.5.3	Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если образующие его векторы имеют единичную длину.

Пространственный базис, составленный из линейно независимых векторов $\vec{g}_1,\ \vec{g}_2,\ \vec{g}_3$, будем обозначать $\{\vec{g}_1,\ \vec{g}_2,\ \vec{g}_3\}$. Ортогональный или ортонормированный базис условимся обозначать как $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$.

Теорема 1.5.1 **Пусть дан базис $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$. Тогда любой вектор $\vec{x}$ в пространстве может быть представлен единственным образом в виде**

$$\vec{x} = \xi_1\vec{g}_1 + \xi_2\vec{g}_2 + \xi_3\vec{g}_3\,, \tag{1.5.1}$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — некоторые числа.

Доказательство.

1. Докажем вначале существование таких чисел. Совместим начала всех векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ и $\vec{x}$ в точке O и проведем через конец вектора $\vec{x}$ плоскость, параллельную плоскости $O, \vec{g}_1, \vec{g}_2$ (рис. 6).

   Построим новые векторы $\vec{y}$ и $\vec{z}$ так, чтобы $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, а $\vec{z}$ и $\vec{g}_3$ были коллинеарны, тогда в силу коллинеарности векторов $\vec{z}$ и $\vec{g}_3$ имеем $\vec{z} = \xi_3\vec{g}_3$.

   Перенеся затем начало вектора $\vec{y}$ в точку O и рассуждая, как при доказательстве теоремы 1.4.3, получим $\vec{y} = \xi_1\vec{g}_1 + \xi_2\vec{g}_2$ и, следовательно,

$$\vec{x} = \xi_1\vec{g}_1 + \xi_2\vec{g}_2 + \xi_3\vec{g}_3,$$

   что доказывает существование разложения.

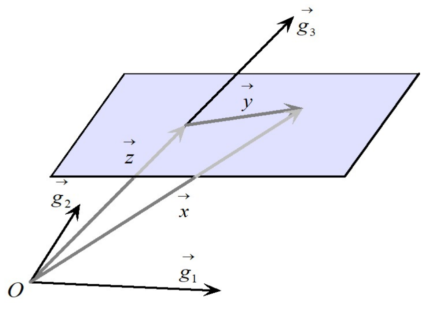

Рис. 6. К доказательству теоремы 1.5.1

2. Докажем единственность разложения по базису. Пусть мы имеем $\vec{x} = \xi_1\vec{g}_1 + \xi_2\vec{g}_2 + \xi_3\vec{g}_3$ и допустим, что существует другая тройка чисел $\xi'_1,\ \xi'_2,\ \xi'_3$, таких, что

$$\vec{x} = \xi'_1\vec{g}_1 + \xi'_2\vec{g}_2 + \xi'_3\vec{g}_3.$$

Вычитая почленно эти равенства, получаем

$$\vec{o} = (\xi_1 - \xi'_1)\vec{g}_1 + (\xi_2 - \xi'_2)\vec{g}_2 + (\xi_3 - \xi'_3)\vec{g}_3,$$

где в силу сделанного предположения о неединственности разложения $\vec{x} = |\xi_1 - \xi'_1| + |\xi_2 - \xi'_2| + |\xi_3 - \xi'_3| > 0$. Полученное неравенство означает, что линейная комбинация

$$(\xi_1 - \xi'_1)\vec{g}_1 + (\xi_2 - \xi'_2)\vec{g}_2 + (\xi_3 - \xi'_3)\vec{g}_3$$

нетривиальна, векторы $\{\vec{g}_1,\ \vec{g}_2,\ \vec{g}_3\}$ линейно зависимы и, следовательно, не могут быть базисом в силу определения 1.5.1.

Полученное противоречие доказывает единственность разложения.

Теорема доказана.

Определение 1.5.4	Числа ξ_1, ξ_2, ξ_3 – коэффициенты в разложении (1.5.1) – называются *координатами* вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Для сокращенной записи *координатного разложения* вектора

$$\vec{x} = \xi_1\vec{g}_1 + \xi_2\vec{g}_2 + \xi_3\vec{g}_3$$

используются формы: $\vec{x}\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$, $\left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\|$,

из которых в дальнейшем мы будем использовать последнюю.

В общем случае утверждение, что *вектор $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ имеет координатное представление* (или, что то же самое, *имеет координатный столбец*) $\left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\|$, записывается как $\|\vec{x}\|_g = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\|$.

Иногда, если это не приводит к неоднозначности толкования, будем использовать также нестрогую[1], упрощенную запись $\vec{x} = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\|$.

Наконец, если вектор $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ на плоскости может быть представлен как $\vec{x} = \xi_1\vec{g}_1 + \xi_2\vec{g}_2$, то его координатная запись имеет вид $\|\vec{x}\|_g = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\|$.

[1] Понятно, что вектор не может быть равным матричному объекту.

Завершим обсуждение значения теоремы 1.5.1 следующим замечанием.

Согласно теоремам 1.4.1, 1.4.2 и 1.4.3 наборы векторов, состоящие из одного, двух или трех векторов, могут быть как линейно зависимыми, так и линейно независимыми.

Из теоремы 1.5.1 следует, что *любой набор векторов в количестве четыре или более может быть только линейно зависимым.*

Действительно, согласно теореме 1.5.1 каждый вектор представи́м в виде линейной комбинации базисных векторов. Значит, любой набор, состоящий из *произвольного* вектора и трех базисных, по лемме 1.4.1 будет линейно зависимым.

Нетрудно заметить, что (опять-таки при помощи теоремы 1.5.1) любые четыре вектора можно привести к формату «произвольный вектор и три базисных». То есть любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

В случае, когда число векторов рассматриваемого набора больше четырех, каждый такой набор имеет подмножества, состоящие из четырех векторов, которые линейно зависимые. Тогда по теореме 1.4.4 приходим к заключению о линейной зависимости и рассматриваемого набора.

Действия с векторами в координатном представлении

Поскольку в конкретном базисе каждый вектор полностью и однозначно описывается упорядоченной тройкой чисел – своим координатным представлением, то естественно возникает вопрос о том, как выполняются операции с векторами в координатном представлении.

Оказывается, что возможно не только записывать векторы при помощи матриц (столбцов), но и оперировать с ними в матричной форме, поскольку правила действий с векторами в координатной форме совпадают с правилами соответствующих операций с матрицами.

Ответ на вопрос о том, как выполняются в координатном представлении операции с векторами, введенные в определениях § 1.2, дает

Теорема 1.6.1 **В координатном представлении операции с векторами выполняются по следующим правилам:**

1. Два вектора

$$\vec{x} = \xi_1\vec{g}_1 + \xi_2\vec{g}_2 + \xi_3\vec{g}_3 \quad \text{и} \quad \vec{y} = \eta_1\vec{g}_1 + \eta_2\vec{g}_2 + \eta_3\vec{g}_3$$

равны тогда и только тогда, когда равны их координатные представления

$$\|\vec{x}\|_g = \|\vec{y}\|_g \quad \text{или} \quad \begin{cases} \xi_1 = \eta_1, \\ \xi_2 = \eta_2, \\ \xi_3 = \eta_3. \end{cases}$$

2. Координатное представление суммы векторов равно сумме координатных представлений слагаемых

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|_g = \|\vec{x}\|_g + \|\vec{y}\|_g \,.$$

3. Координатное представление произведения числа на вектор равно произведению этого числа на координатное представление вектора

$$\|\lambda\vec{x}\|_g = \lambda\|\vec{x}\|_g \,.$$

Доказательство.

Поскольку рассуждения для всех трех пунктов аналогичны, ибо основаны на определениях координатного представления вектора и действий с матрицами, а также свойствах операций с векторами, то в качестве примера рассмотрим лишь доказательство пункта 2.

Использование свойств операций сложения векторов и умножения числа на вектор, указанных в формулировке теоремы 1.3.1, дает следующую цепочку равенств:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|_g =$$

$$= \|\ (\xi_1\vec{g}_1+\xi_2\vec{g}_2+\xi_3\vec{g}_3)+(\eta_1\vec{g}_1+\eta_2\vec{g}_2+\eta_3\vec{g}_3)\ \|_g =$$

$$= \|\ (\xi_1+\eta_1)\,\vec{g}_1+(\xi_2+\eta_2)\,\vec{g}_2+(\xi_3+\eta_3)\,\vec{g}_3\ \|_g =$$

$$= \left\|\begin{array}{c} \xi_1+\eta_1 \\ \xi_2+\eta_2 \\ \xi_3+\eta_3 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array}\right\| + \left\|\begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{array}\right\| = \|\vec{x}\|_g + \|\vec{y}\|_g\,.$$

Теорема доказана.

Следствие 1.6.1 **Координатное представление линейной комбинации $\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}$ является той же самой линейной комбинацией координатных представлений векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$:**

$$\|\ \lambda\vec{x}+\mu\vec{y}\ \|_g = \lambda\,\|\vec{x}\|_g + \mu\,\|\vec{y}\|_g\ .$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, как в координатном представлении записываются условия линейной зависимости и независимости векторов.

Теорема 1.6.2 **Для того чтобы два вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ на плоскости были *линейно зависимы*, необходимо и достаточно, чтобы их координатные представления $\|\vec{x}\|_g = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\|$ и $\|\vec{y}\|_g = \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{matrix} \right\|$ удовлетворяли условию** $\det \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{matrix} \right\| = 0$**.**

Доказательство.

1. Докажем необходимость. Пусть векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ линейно зависимы, тогда по лемме 1.4.1 верно соотношение $\vec{x} = \lambda\vec{y}$ или в координатной форме $\begin{cases} \xi_1 = \lambda\eta_1, \\ \xi_2 = \lambda\eta_2. \end{cases}$

   Исключив λ из этих двух скалярных равенств при $\eta_1\eta_2 \neq 0$, получим $\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0$, которое и означает, что

$$\det \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{matrix} \right\| = 0 .$$

2. Докажем достаточность. Пусть $\det \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{matrix} \right\| = 0$, тогда имеем, что $\dfrac{\xi_1}{\eta_1} = \dfrac{\xi_2}{\eta_2}$ (при $\eta_1\eta_2 \neq 0$), то есть соответствующие координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ пропорциональны, что доказывает линейную зависимость этих векторов.

   Случай $\eta_1\eta_2 = 0$ рассмотрите самостоятельно.

Теорема доказана.

Теорема 1.6.3 **Для того чтобы три вектора в пространстве $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ с координатными представлениями**

$$\|\vec{x}\|_g = \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| \qquad \|\vec{y}\|_g = \left\| \begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{array} \right\| \qquad \|\vec{z}\|_g = \left\| \begin{array}{c} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{array} \right\|$$

были *линейно независимы*, необходимо и достаточно, чтобы эти координатные представления удовлетворяли условию

$$\det \left\| \begin{array}{ccc} \xi_1 & \eta_1 & \kappa_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3 \end{array} \right\| \neq 0\,.$$

Доказательство.

Пусть некоторая линейная комбинация векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ равна нулевому вектору. То есть выполнено равенство

$$\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} + \lambda_3\vec{z} = \vec{o}\,. \tag{1.6.1}$$

Согласно определению 1.4.4 в случае линейной независимости векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ из равенства (1.6.1) должна следовать тривиальность линейной комбинации, стоящей в левой части этого равенства, то есть

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\,.$$

Воспользуемся этим свойством, записав равенство (1.6.1) в координатной форме.

По следствию 1.6.1 векторное равенство (1.6.1) в координатах имеет вид матричного уравнения

$$\lambda_1 \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\| + \lambda_2 \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{matrix} \right\| + \lambda_3 \left\| \begin{matrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| ,$$

которое, в свою очередь, равносильно однородной системе трех линейных уравнений с тремя неизвестными λ_1, λ_2 и λ_3:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \xi_1\lambda_1 & + & \eta_1\lambda_2 & + & \kappa_1\lambda_3 & = & 0, \\ \xi_2\lambda_1 & + & \eta_2\lambda_2 & + & \kappa_2\lambda_3 & = & 0, \\ \xi_3\lambda_1 & + & \eta_3\lambda_2 & + & \kappa_3\lambda_3 & = & 0. \end{array} \right. \tag{1.6.2}$$

Согласно обобщению теоремы 1.1.2 (Крамера), которое будет рассмотрено в § 6.4, система (1.6.2) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель ее основной матрицы отличен от нуля, то есть

$$\det \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \eta_1 & \kappa_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3 \end{matrix} \right\| \neq 0 \,. \tag{1.6.3}$$

Но, с другой стороны, система (1.6.2) очевидно имеет нулевое решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Поэтому неравенство (1.6.3) является необходимым и достаточным условием тривиальности линейной комбинации векторов в левой части равенства (1.6.1), а значит, и линейной независимости векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.

Заметим, что альтернативная версия доказательства данной теоремы будет рассмотрена в § 2.6.

Теорема доказана.

Декартова система координат

Теперь приступим к решению нашей основной задачи — к созданию инструмента, позволяющего описывать геометрические объекты и исследовать их свойства, не прибегая к использованию каких-либо интуитивно понятных или наглядных представлений.

Зафиксируем в пространстве некоторую точку O и рассмотрим множество всех векторов в пространстве, началами которых является точка O.

Очевидно, что для *любой* точки M в пространстве существует *единственный* вектор, началом которого служит точка O, а концом является точка M. При этом также очевидно, что для *каждого* вектора, исходящего из точки O, существует *единственная* точка M, задаваемая его концом.

В этом случае принято говорить, что *между множеством точек в пространстве и множеством векторов с началом в точке O имеется взаимно однозначное соответствие.*

Определение 1.7.1	Совокупность базиса $\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\right\}$ и некоторой заранее выбранной точки O («*начало координат*»), в которую помещены начала базисных векторов, называется *общей декартовой системой координат*, которую принято обозначать как $\left\{ O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\right\}$.
Определение 1.7.2	Систему координат $\{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, образованную при помощи ортонормированного базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, называют *нормальной прямоугольной* (или *ортонормированной*) системой координат.
Определение 1.7.3	Вектор $\vec{r}_M = \xi_1\vec{g}_1 + \xi_2\vec{g}_2 + \xi_3\vec{g}_3$ называется *радиусом-вектором точки* M в системе координат $\{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Согласно теореме 1.5.1 радиус-вектор (как частный вид векторов) будет иметь координатное представление $\|\vec{r}_M\|_g = \| \, \xi_1 \; \xi_2 \; \xi_3 \, \|^{\mathrm{T}}$ и притом единственное для конкретной системы координат.

Это позволяет дать

Определение 1.7.4	Координаты $\vec{r}_M$ – радиуса-вектора точки M – называются *координатами точки* M в системе координат $\{ \, O, \, \vec{e}_1, \, \vec{e}_2, \, \vec{e}_3 \}$.

Исходя из определений 1.7.3 и 1.7.4, приходим к заключению, что для выбранной конкретной системы координат $\{ \, O, \, \vec{e}_1, \, \vec{e}_2, \, \vec{e}_3 \}$ между множеством точек пространства и множеством их координатных столбцов $\left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\|$ существует *взаимно однозначное* соответствие.

А поскольку все геометрические объекты (линии, фигуры, поверхности и тела) являются совокупностями точек, то естественной представляется замена наглядного описания этих объектов формализованным описанием множества координатных столбцов и исследование свойств геометрических объектов в координатном представлении.

В последующих разделах нашего курса мы убедимся, что этот подход может быть успешно использован на практике.

Проиллюстрируем особенности использования векторно-координатного описания геометрических объектов на примере решения следующей задачи.

Задача 1.7.1 *Пусть в некоторой общей декартовой системе координат* $\{\, O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3 \}$ *две несовпадающие точки* M_1 *и* M_2 *имеют координатные представления вида*

$$\left\| \vec{OM_1} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\| \qquad и \qquad \left\| \vec{OM_2} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{matrix} \right\| .$$

Требуется найти точку N, *такую, чтобы для заданного числа* λ *выполнялось равенство* $\vec{M_1N} = \lambda \, \vec{M_1M_2}$.

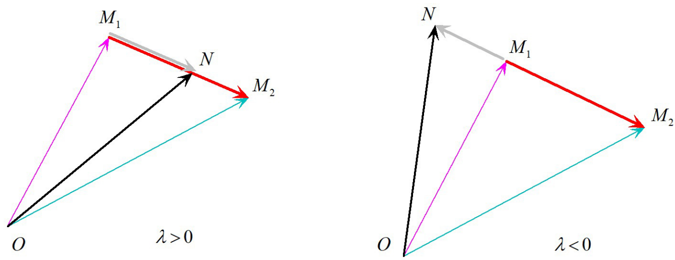

Рис. 7. К решению задачи 1.7.1

Решение. Найти точку – означает получить ее координатное представление или, проще говоря, найти ее координаты. По правилу треугольника (§ 1.2, см. рис. 7) получаем равенства

$$\vec{ON} = \vec{OM_1} + \vec{M_1N} \qquad \text{и} \qquad \vec{OM_2} = \vec{M_1M_2} + \vec{OM_1}\,.$$

Поскольку

$$\vec{M_1N} = \lambda\,\vec{M_1M_2}, \quad \text{а} \quad \vec{M_1M_2} = \vec{OM_2} - \vec{OM_1}\,,$$

то

$$\vec{ON} = \vec{OM_1} + \lambda\,\vec{OM_2} - \lambda\,\vec{OM_1} = (1-\lambda)\,\vec{OM_1} + \lambda\,\vec{OM_2}\,.$$

Откуда, по правилам действий с векторами в координатном представлении, окончательно получаем

Решение получено.

$$\left\|\vec{ON}\right\|_g = (1-\lambda)\,\left\|\vec{OM_1}\right\|_g + \lambda\,\left\|\vec{OM_2}\right\|_g = \left\|\begin{matrix} (1-\lambda)\xi_1 + \lambda\,\eta_1 \\ (1-\lambda)\xi_2 + \lambda\,\eta_2 \\ (1-\lambda)\xi_3 + \lambda\,\eta_3 \end{matrix}\right\|.$$

Замечание: в механике к задаче 1.7.1 сводится задача отыскания центра масс системы материальных точек.

Изменение координат при замене базиса и начала координат

Поскольку выбор системы координат может быть сделан различными способами, вопрос об изменении координат при переходе от одного базиса к другому и при замене начала координат представляет значительный практический интерес.

Действительно, имея возможность решать одну и ту же задачу в разных системах координат, мы должны также иметь возможность сравнивать результаты этих решений. Будучи однозначным по сути, решение задачи может иметь разные координатные представления. Это — очевидный недостаток координатного метода.

Но, с другой стороны, можно ожидать, что в разных системах координат сложность постановки задачи (равно как и сложность методов ее решения) различная. Тогда можно попытаться выбрать такую систему координат, в которой эта сложность окажется минимальной. В последующих разделах нашего курсы мы неоднократно воспользуемся неоднозначностью координатного представления тех или иных математических объектов, для упрощения их описания и/или процедуры исследования их свойств.

Чтобы использовать эту идею на практике, прежде всего найдем формулы, выражающие зависимость координат произвольной точки пространства в *одной* системе координат, от координат этой же точки в *другой* декартовой системе координат.

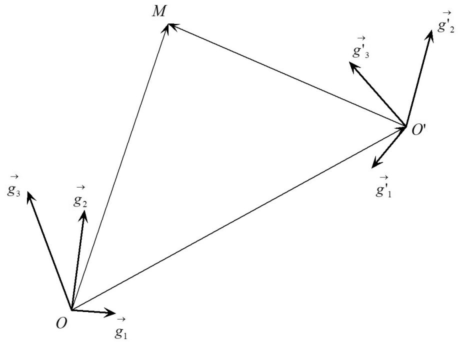

Рис. 8. Радиусы-векторы точки M в разных системах координат

Пусть выбраны две декартовы системы координат: *старая* $\{\, O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3 \}$ и *новая*[2] $\{\, O', \vec{g}_1', \vec{g}_2', \vec{g}_3' \}$ (рис. 1.8). Для лучшей читаемости все, что относится к *новой* системе, будем помечать штрихами, а для *старой* системы – оставим не помеченным.

[2]С тем же успехом мы могли бы назвать их *первая* и *вторая*, или же – *красная* и *зеленая*.

Выразим векторы *нового* базиса, а также вектор $\vec{OO'}$ через векторы *старого* базиса. В силу теоремы 1.5.1 это можно сделать всегда и притом единственным образом:

$$\begin{aligned} \vec{g}'_1 &= \sigma_{11}\vec{g}_1 + \sigma_{21}\vec{g}_2 + \sigma_{31}\vec{g}_3\,, \\ \vec{g}'_2 &= \sigma_{12}\vec{g}_1 + \sigma_{22}\vec{g}_2 + \sigma_{32}\vec{g}_3\,, \\ \vec{g}'_3 &= \sigma_{13}\vec{g}_1 + \sigma_{23}\vec{g}_2 + \sigma_{33}\vec{g}_3\,, \\ \vec{OO'} &= \beta_1\vec{g}_1 + \beta_2\vec{g}_2 + \beta_3\vec{g}_3\,. \end{aligned} \qquad (1.8.1)$$

Обратим внимание на два обстоятельства:

1. Для полного описания связи между двумя декартовыми системами координат достаточно знать только двенадцать чисел, являющихся параметрами в формулах (1.8.1).

2. Метод индексации (нумерации) этих параметров может быть любым. Однако мы выбираем его так, что итоговые результаты будут иметь наиболее простой и легко запоминающийся вид.

Если использовать обозначения формул (1.8.1), то оказывается справедливой

Теорема 1.8.1 **Координаты произвольной точки пространства в *старой* системе координат связаны с координатами этой точки в *новой* системе координат системой уравнений**

$$\left\{\begin{array}{lcl} \xi_1 & = & \sigma_{11}\xi'_1+\sigma_{12}\xi'_2+\sigma_{13}\xi'_3+\beta_1\,, \\ \xi_2 & = & \sigma_{21}\xi'_1+\sigma_{22}\xi'_2+\sigma_{23}\xi'_3+\beta_2\,, \\ \xi_3 & = & \sigma_{31}\xi'_1+\sigma_{32}\xi'_2+\sigma_{33}\xi'_3+\beta_3\,. \end{array}\right. \qquad (1.8.2)$$

Доказательство.

Пусть радиус-вектор некоторой точки M (см. рис. 1.10) в *старой* системе координат имеет координатное представление и координатное разложение вида

$$\left\|\vec{OM}\right\|_g = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\| \qquad \text{и} \qquad \vec{OM} = \xi_1\vec{g}_1 + \xi_2\vec{g}_2 + \xi_3\vec{g}_3\,.$$

Соответственно в *новой* системе координат будем иметь

$$\left\|\vec{OM'}\right\|_{g'} = \left\| \begin{matrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{matrix} \right\| \qquad \text{и} \qquad \vec{O'M} = \xi'_1\vec{g}'_1 + \xi'_2\vec{g}'_2 + \xi'_3\vec{g}'_3\,.$$

По правилу треугольника из $\Delta OMO'$ имеем

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}\,.$$

Использовав соотношения (1.8.1), каждый из трех векторов в последнем равенстве можно представить как линейную комбинацию векторов *старого* базиса. Действительно, для векторов $\vec{OM}$ и $\vec{OO'}$ эти линейные комбинации у нас уже есть. А для $\vec{O'M}$ будет

$$\begin{aligned} \vec{O'M} = \xi'_1\vec{g}'_1 + \xi'_2\vec{g}'_2 + \xi'_3\vec{g}'_3 = \\ &= \xi'_1\left(\sigma_{11}\vec{g}_1 + \sigma_{21}\vec{g}_2 + \sigma_{31}\vec{g}_3\right) + \\ &+ \xi'_2\left(\sigma_{12}\vec{g}_1 + \sigma_{22}\vec{g}_2 + \sigma_{32}\vec{g}_3\right) + \\ &+ \xi'_3\left(\sigma_{13}\vec{g}_1 + \sigma_{23}\vec{g}_2 + \sigma_{33}\vec{g}_3\right)\,. \end{aligned}$$

Подставив все три линейные комбинации в $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$ и сгруппировав в нем слагаемые, имеющие множителями одинаковые векторы *старого* базиса, получим

$$\lambda_1\vec{g}_1 + \lambda_2\vec{g}_2 + \lambda_3\vec{g}_3 = \vec{o}, \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\xi_1 + \sigma_{11}\xi'_1 + \sigma_{12}\xi'_2 + \sigma_{13}\xi'_3 + \beta_1\,, \\ \lambda_2 &= -\xi_2 + \sigma_{21}\xi'_1 + \sigma_{22}\xi'_2 + \sigma_{23}\xi'_3 + \beta_2\,, \\ \lambda_3 &= -\xi_3 + \sigma_{31}\xi'_1 + \sigma_{32}\xi'_2 + \sigma_{33}\xi'_3 + \beta_3\,. \end{aligned}$$

Поскольку векторы $\{\,\vec{g}_1,\,\vec{g}_2,\,\vec{g}_3\}$ линейно независимые, то их линейная комбинация, равная $\vec{o}$, обязана быть тривиальной, и потому $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ или окончательно

$$\left\{\begin{aligned} \xi_1 &= \sigma_{11}\xi'_1 + \sigma_{12}\xi'_2 + \sigma_{13}\xi'_3 + \beta_1\,, \\ \xi_2 &= \sigma_{21}\xi'_1 + \sigma_{22}\xi'_2 + \sigma_{23}\xi'_3 + \beta_2\,, \\ \xi_3 &= \sigma_{31}\xi'_1 + \sigma_{32}\xi'_2 + \sigma_{33}\xi'_3 + \beta_3\,. \end{aligned}\right.$$

Теорема доказана.

Определение 1.8.1	Формулы (1.8.2) называются *формулами перехода* от системы координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ к системе координат $\{O', \vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$.

При использовании формул перехода следует обратить внимание на то, что в равенствах (1.8.1) *штрихованные* переменные находятся в *левых* частях, а в равенствах (1.8.2) — в *правых*.

Заметим также, что коэффициенты уравнений в формулах (1.8.2), выражающих *старые* координаты через *новые*, образуют матрицу $\|S\|$, столбцы которой есть координатные представления (столбцы) *новых* базисных векторов в *старом* базисе, а столбец $\left\|\begin{matrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{matrix}\right\|$ образован координатами *нового* начала координат в *старом* базисе.

Определение 1.8.2	Матрица $\|S\| = \left\|\begin{matrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{matrix}\right\|$ называется *матрицей перехода* от *старого* базиса $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ к *новому* базису $\{\vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$.

Хотя *старая* и *новая* системы координат могут выбираться произвольно, оказывается, что матрицей перехода может служить *не любая* квадратная матрица третьего порядка. Имеет место следующая простая, но очень важная

Теорема 1.8.2 **Для матрицы перехода**

$$\det \|S\| = \det \left\| \begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{matrix} \right\| \neq 0.$$

Доказательство.

Согласно определению 1.8.2 столбцами матрицы перехода $\|S\| = \left\| \begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{matrix} \right\|$ служат координатные представления тройки линейно независимых векторов, образующих базис $\{\ \vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3 \}$.

Тогда из теоремы 1.6.3 следует доказываемое утверждение.

Теорема доказана.

Другими словами: невырожденные матрицы (и только они!) могут являться матрицами перехода между декартовыми системами координат.

Использовать в нашем курсе матрицы перехода мы будем еще не раз. Здесь же проиллюстрируем их важность следующим примером.

Мы установили, что в любой декартовой системе координат каждая точка имеет координатный столбец и притом единственный. Из формул перехода (1.8.2) очевидно следует, что для заданного столбца $\left\| \begin{matrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \xi_3' \end{matrix} \right\|$ столбец $\left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\|$ также определяется однозначно.

Но *старая* и *новая* системы координат равноправны. То есть и столбец $\left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\|$ должен однозначно определять столбец $\left\| \begin{matrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \xi_3' \end{matrix} \right\|$ через соотношения (1.8.2) .

Проверим это. Предположим, что координатное представление $\left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\|$ нам известно, а координатное представление $\left\| \begin{matrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \xi_3' \end{matrix} \right\|$ – нет. И рассмотрим формулы перехода (1.8.2) как систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными ξ_1', ξ_2', ξ_3' . Коэффициентами при неизвестных в этой системе служат элементы матрицы перехода $\|S\|$, которая согласно теореме 1.8.2 не вырождена. Тогда, по теореме Крамера, рассматриваемая система линейных уравнений имеет решение и притом единственное.

Чтобы найти формулы, выражающие *новые* координаты через *старые*, решать эту линейную систему не обязательно. Можно снова воспользоваться равноправием *новой* и *старой* декартовых систем координат и вместо соотношений (1.8.1) использовать равенства

$$
\begin{aligned}
\vec{g}_1 &= \tau_{11}\vec{g}\,'_1 + \tau_{21}\vec{g}\,'_2 + \tau_{31}\vec{g}\,'_3 \,, \\
\vec{g}_2 &= \tau_{12}\vec{g}\,'_1 + \tau_{22}\vec{g}\,'_2 + \tau_{32}\vec{g}\,'_3 \,, \\
\vec{g}_3 &= \tau_{13}\vec{g}\,'_1 + \tau_{23}\vec{g}\,'_2 + \tau_{33}\vec{g}\,'_3 \,, \\
\vec{O'O} &= \gamma_1\vec{g}\,'_1 + \gamma_2\vec{g}\,'_2 + \gamma_3\vec{g}\,'_3 \,,
\end{aligned}
$$

которые следуют из существования и единственности координатных разложений, но уже для *нового* базиса.

Проведя рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 1.8.1, мы получим искомые соотношения в виде

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \xi_1' & = & \tau_{11}\xi_1 + \tau_{12}\xi_2 + \tau_{13}\xi_3 + \gamma_1 \,, \\ \xi_2' & = & \tau_{21}\xi_1 + \tau_{22}\xi_2 + \tau_{23}\xi_3 + \gamma_2 \,, \\ \xi_3' & = & \tau_{31}\xi_1 + \tau_{32}\xi_2 + \tau_{33}\xi_3 + \gamma_3 \,. \end{array} \right. \tag{1.8.3}$$

Формулы (1.8.3) естественно назвать формулами перехода от *новой* системы координат к *старой*. Иногда используется термин *формулы обратного перехода*. Наконец, матрицу

$$\|T\| = \left\| \begin{array}{ccc} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{array} \right\|$$

можно назвать *матрицей обратного перехода* или матрицей перехода от *новой* системы координат к *старой*. Разумеется, что $\det\|T\| \neq 0$, а столбцами матрицы $\|T\|$ являются координатные представления *старых* базисных векторов в *новом* базисе.

Проиллюстрируем построение формул перехода на примере следующей задачи.

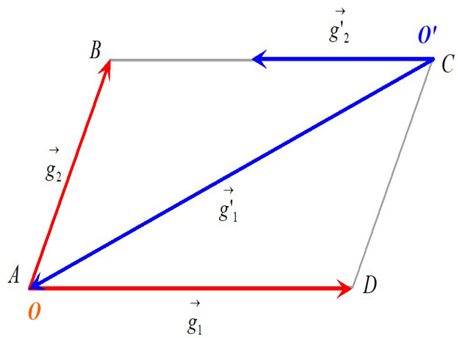

Рис. 9. К решению задачи 1.8.1

Задача 1.8.1 *При помощи параллелограмма $ABCD$ на плоскости построены две системы координат (см. рис. 9):*

старая $\{\, O,\ \vec{g}_1,\ \vec{g}_2 \}$ *, такая что за O принята точка A, $\vec{g}_1 = \vec{AD},\ \ \vec{g}_2 = \vec{AB}$*

и **новая** $\{\, O',\ \vec{g}'_1,\ \vec{g}'_2 \}$ *, где за O' принята точка C, $\vec{g}'_1 = \vec{CA},\ \ \vec{g}'_2 = -\frac{1}{2}\vec{BC}$.*

Требуется составить матрицы и формулы перехода, как прямого так и обратного, между старой и новой системами координат.

Решение. 1. Разложение векторов *нового* базиса и вектора $\vec{OO'}$ по векторам *старого* имеет вид

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \vec{g}_1' & = & -\vec{g}_1 & - & \vec{g}_2, \\ \vec{g}_2' & = & -\frac{1}{2}\vec{g}_1, & & \\ \vec{OO'} & = & \vec{g}_1 & + & \vec{g}_2. \end{array}\right.$$

Использовав коэффициенты этих разложений в качестве столбцов, составляем матрицу *прямого* перехода $\|S\| = \left\|\begin{array}{cc} -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{array}\right\|$ и столбец $\left\|\begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_2 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right\|$.

Откуда получаем формулы перехода от *старой* системы координат к *новой*:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \xi_1 & = & -\xi_1' & - & \frac{1}{2}\xi_2' & + & 1, \\ \xi_2 & = & -\xi_1' & & & + & 1. \end{array}\right.$$

2. Запишем теперь разложение векторов *старого* базиса и вектора $\vec{O'O}$ по векторам *нового*:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} \vec{g}_1 & = & & - & 2\vec{g}\,'_2, \\ \vec{g}_2 & = & -\vec{g}\,'_1 & + & 2\vec{g}\,'_2, \\ \vec{O'O} & = & \vec{g}\,'_1. & & \end{array}\right.$$

Из коэффициентов этих разложений составляем матрицу *обратного* перехода $\|T\| = \left\|\begin{array}{rr} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{array}\right\|$ и столбец $\left\|\begin{array}{c} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right\|$.

Откуда получаем формулы перехода от *новой* системы координат к *старой*:

Решение получено.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \xi'_1 & = & & - & \xi_2 & + & 1, \\ \xi'_2 & = & -2\xi_1 & + & 2\xi_2. & & \end{array}\right.$$

В заключение обратим внимание на следующий любопытный факт.

В задаче 1.8.1 мы получили $\det\|S\| = -\frac{1}{2}$ и $\det\|T\| = -2$. Откуда следует, что $\det\|S\| \cdot \det\|T\| = 1$.

Это соотношение не случайно. Произведение детерминантов матриц прямого и обратного переходов *всегда* равно 1. Правда, объяснение данного факта получим в нашем курсе позднее.

Формулы перехода между ортонормированными системами координат на плоскости

Рассмотрим две *ортонормированные* системы координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ и $\{O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$. Получим формулы перехода для случая, показанного на рис. 10-А.

Из геометрически очевидных соотношений

$$\vec{e}_1^{\,\prime} = \vec{e}_1 \cos\varphi + \vec{e}_2 \sin\varphi \qquad \text{и} \qquad \vec{e}_2^{\,\prime} = -\vec{e}_1 \sin\varphi + \vec{e}_2 \cos\varphi$$

получаем матрицу перехода $\|S\| = \left\| \begin{matrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{matrix} \right\|$.

Тогда, если $\left\| \vec{OO'} \right\|_e = \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\|$, то *старые* координаты будут связаны с *новыми* формулами перехода:

$$\begin{cases} \xi_1 &= \xi'_1 \cos\varphi - \xi'_2 \sin\varphi + \beta_1, \\ \xi_2 &= \xi'_1 \sin\varphi + \xi'_2 \cos\varphi + \beta_2. \end{cases}$$

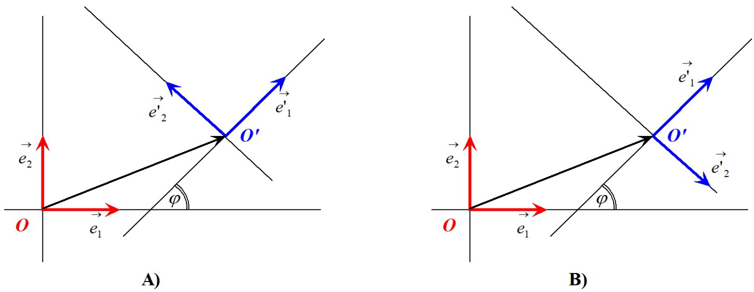

Рис. 10. К выводу формул перехода между ортонормированными ДСК

В рассмотренном случае обе системы координат удается совместить последовательным выполнением параллельного переноса *старой* системы на вектор $\vec{OO'}$ и последующего поворота на угол φ вокруг нового начала координат — точки O'.

Однако добиться такого совмещения, используя только параллельный перенос и поворот, вообще говоря, нельзя. Соответствующий случай показан на рис. 10-B).

Здесь, после совмещения векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}\,'_1$, еще потребуется симметричное отражение всей координатной плоскости относительно прямой, проходящей через совмещенные векторы. Формулы перехода будут в этом случае иметь вид

$$\begin{cases} \xi_1 &= \xi'_1 \cos\varphi + \xi'_2 \sin\varphi + \beta_1, \\ \xi_2 &= \xi'_1 \sin\varphi - \xi'_2 \cos\varphi + \beta_2. \end{cases}$$

Формально случаи, показанные на рис. 10-A) и рис. 10-B), можно различать, используя

Определение 1.8.3	Упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на плоскости называется *право-ориентированной*, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$, при совмещении их начал, виден выполняющимся *против часовой стрелки*. В противном случае эта пара векторов называется *лево-ориентированной*.

Заметим, что для матрицы перехода $\|S\|$, связывающей два *ортонормированных* базиса, всегда будет $\det\|S\| = \pm 1$.

При этом $\det\|S\| = 1$, если ориентация обеих пар базисных векторов *одинаковая*, то есть если отражения при совмещении не требуется, и $\det\|S\| = -1$ для случая базисных пар *разной* ориентации.