# Произведения векторов

## Ортогональное проектирование

Эффективность использования векторно-координатного описания геометрических объектов существенно повышается при использовании *метрических характеристик*, таких как: *длина, расстояние, величина угла,* а также связанных с ними специальных операций.

Одной из таких операций является *ортогональное проектирование.*

| | |
|---|---|
| Определение 2.1.1 | Прямую $L$ с расположенным на ней ненулевым вектором $\vec{g}$ будем называть *осью*. Вектор $\vec{g}$ называется *направляющим вектором* оси $L$. |

| | |
|---|---|
| Определение 2.1.2 | Пусть дана точка $M$, не лежащая на оси $L$, тогда основание перпендикуляра, опущенного из $M$ на ось $L$ – точку $M^*$, будем называть *ортогональной проекцией* точки $M$ на ось $L$. |

Дадим [1]

**Определение 2.1.3** *Ортогональной проекцией* вектора $\vec{a}$ на ось $L$ называется вектор $\hat{\Pr}_L\vec{a}$, лежащий на оси $L$, начало которого есть ортогональная проекция начала вектора на ось $L$, а конец — ортогональная проекция конца вектора $\vec{a}$ (см. рис. 1).

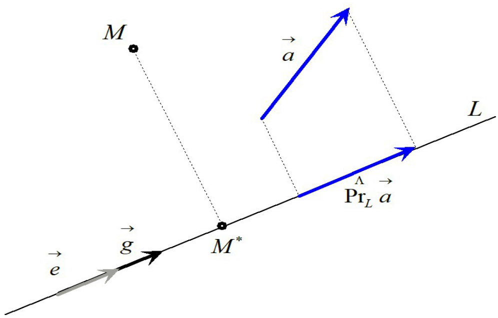


Рис. 1. Ортогональное проектирование на прямую

[1] Верхний символ $\widehat{\ }$ мы будем использовать в записи идентификаторов операций (или операторов): проектирования, поворота, умножения числа на объект, дифференцирования и т.п.

Выполним нормировку направляющего для $L$ вектора $\vec{g}$ , то есть заменим его на вектор $\vec{e} = \dfrac{\vec{g}}{|\vec{g}|}$ и рассмотрим нормированный базис $\{\vec{e}\}$ на оси $L$.

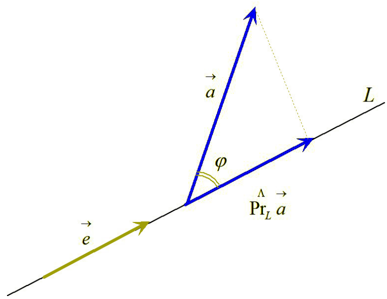


Рис. 2. Численное значение ортогональной проекции вектора

Введем также

| | |
|---|---|
| Определение 2.1.4 | *Численным значением ортогональной проекции* вектора $\vec{a}$ на ось $L$ называется координата вектора $\hat{\Pr}_L\vec{a}$ в базисе $\{\vec{e}\}$ . |

| | |
|---|---|
| Определение 2.1.5 | *Величиной угла* между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется величина наименьшего из двух углов, образуемых этими векторами при совмещении их начал. |

Численное значение ортогональной проекции вектора $\vec{a}$ на ось $L$ обозначим как $\text{Пр}_L\vec{a}$ . Из рис. 2 очевидно, что $\text{Пр}_L\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$, где $\varphi$ есть угол между $\vec{a}$ и $\vec{e}$ .

## Свойства ортогональных проекций

2.1. *Проекция суммы двух векторов равна сумме проекций этих векторов*:
$$\hat{\Pr}_L\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\hat{\Pr}_L\vec{a}+\hat{\Pr}_L\vec{b}\,.$$

Данное свойство иллюстрирует рис. 3.

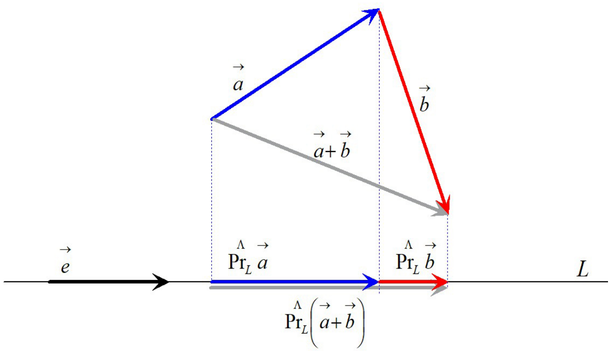


Рис. 3. Свойство ортогональной проекции суммы векторов

2.2. *Проекция произведения числа на вектор есть произведение этого числа на проекцию данного вектора*:

$$\hat{\Pr}_L \left(\lambda\vec{a}\right) = \lambda\,\hat{\Pr}_L\vec{a}\,.$$

Заметим, что свойства 2.1 и 2.2 можно объединить в следующее утверждение:

*Проекция линейной комбинации векторов равна той же линейной комбинации проекций, образующих исходную линейную комбинацию*:

$$\hat{\Pr}_L \left(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}\right) = \lambda\,\hat{\Pr}_L\vec{a} + \mu\,\hat{\Pr}_L\vec{b}\,.$$

Справедливость свойств 1.1 и 1.2 вытекает из определения операции ортогонального проектирования и правил действия с векторами.

Последнее равенство выражает *линейность* операции ортогонального проектирования на множестве векторов.

## Свойства численных значений ортогональных проекций

2.3. *Численное значение проекции суммы двух векторов равно сумме численных значений проекций этих векторов*:

$$\text{Пр}_L\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\text{Пр}_L\vec{a}+\text{Пр}_L\vec{b}\,.$$

2.4. *Проекция произведения числа на вектор есть произведение этого числа на проекцию данного вектора*:

$$\text{Пр}_L\left(\lambda\vec{a}\right)=\lambda\,\text{Пр}_L\vec{a}\,.$$

2.5. Объединив 2.3 и 2.4, получим

$$\text{Пр}_L\left(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}\right)=\lambda\,\text{Пр}_L\vec{a}+\mu\,\text{Пр}_L\vec{b}\,.$$

Эти равенства, в свою очередь, следуют из определения численного значения ортогональных проекций и свойств операций с векторами.

Последнее из них выражает *линейность* численного значения ортогональной проекции на множестве векторов.

# Скалярное произведение векторов и его свойства

| | |
|---|---|
| Определение 2.2.1 | *Скалярным произведением* ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их длин, умноженному на косинус угла между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.<br>В случае, когда *хотя бы один из* сомножителей есть нулевой вектор, скалярное произведение считается равным нулю. |

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается как $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ или $(\vec{a},\vec{b})$. Мы будем использовать последнее из этих обозначений.

Таким образом, для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ :

$$(\vec{a},\vec{b}) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi\,,$$

где $\varphi$ — угол между векторами-сомножителями. При этом, согласно определению 2.1.5, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Заметим также, что если $\vec{b} \neq \vec{o}$, то справедливо равенство $(\vec{a},\vec{b}) = \left|\vec{b}\right| \cdot \text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}$.

## Свойства скалярного произведения

1) $(\vec{a},\vec{b}) = 0$ при $\vec{a} \neq \vec{o}$ и $\vec{b} \neq \vec{o}$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно ортогональны.

2) $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$ (*коммутативность*) следует из определений скалярного произведения и угла между векторами.

3) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2,\vec{b}) = (\vec{a}_1,\vec{b}) + (\vec{a}_2,\vec{b})$ (*дистрибутивность*).

> Доказательство.
>
> Если $\vec{b} = \vec{o}$, то 3) очевидно. Пусть $\vec{b} \neq \vec{o}$, тогда
>
> $$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2,\vec{b}\,) = \left|\vec{b}\right| \cdot \text{Пр}_{\vec{b}}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) =$$
>
> $$= \left|\vec{b}\right| \text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}_1 + \left|\vec{b}\right| \text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}_2 = (\vec{a}_1,\vec{b}) + (\vec{a}_2,\vec{b})\,.$$
>
> Свойство доказано.

4) $(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \lambda(\vec{a},\vec{b})\,.$

5) $(\vec{a},\vec{a}) = \left|\vec{a}\right|^2 \geq 0 \quad \forall\vec{a}\ ; \quad \left|\vec{a}\right| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}\,.$ Отметим, что условия $(\vec{a},\vec{a}) = 0$ и $\vec{a} = \vec{o}$ равносильны.

6) При $\vec{a} \neq \vec{o}$ и $\vec{b} \neq \vec{o}$ $\quad \cos\varphi = \dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$, где $\varphi$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

# Выражение скалярного произведения в координатах

Пусть дан базис $\{\vec{g}_1,\, \vec{g}_2,\, \vec{g}_3\}$ и два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с координатными разложениями в этом базисе:

$$\vec{a} = \xi_1\vec{g}_1 + \xi_2\vec{g}_2 + \xi_3\vec{g}_3\,, \qquad \vec{b} = \eta_1\vec{g}_1 + \eta_2\vec{g}_2 + \eta_3\vec{g}_3\,.$$

Тогда по свойствам 3) и 4) скалярного произведения

$$\begin{aligned}
(\vec{a},\vec{b}\,) = (\,\xi_1\vec{g}_1 + \xi_2\vec{g}_2 + \xi_3\vec{g}_3,\ \eta_1\vec{g}_1 + \eta_2\vec{g}_2 + \eta_3\vec{g}_3\,) = \\
= \xi_1\eta_1(\vec{g}_1,\vec{g}_1) + \xi_1\eta_2(\vec{g}_1,\vec{g}_2) + \xi_1\eta_3(\vec{g}_1,\vec{g}_3) + \\
+ \xi_2\eta_1(\vec{g}_2,\vec{g}_1) + \xi_2\eta_2(\vec{g}_2,\vec{g}_2) + \xi_2\eta_3(\vec{g}_2,\vec{g}_3) + \\
+ \xi_3\eta_1(\vec{g}_3,\vec{g}_1) + \xi_3\eta_2(\vec{g}_3,\vec{g}_2) + \xi_3\eta_3(\vec{g}_3,\vec{g}_3) = \\
= \sum_{j=1}^{3}\Big(\xi_j\eta_1(\vec{g}_j,\vec{g}_1) + \xi_j\eta_2(\vec{g}_j,\vec{g}_2) + \xi_j\eta_3(\vec{g}_j,\vec{g}_3)\Big) = \\
= \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\xi_j\eta_i(\vec{g}_j,\vec{g}_i)\,.
\end{aligned}$$

В случае *ортонормированного* базиса эта формула упрощается, поскольку для попарных скалярных произведений базисных векторов справедливо равенство $(\vec{e}_j, \vec{e}_i) = \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases}$ где число $\delta_{ji}$ называется *символом Кронекера*.

Откуда для скалярного произведения векторов в ортонормированном базисе получаем формулу

$$(\vec{a}, \vec{b}\,) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3\,,$$

из которой следуют соотношения: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a}\,)} = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}\,,$ а для случая $\vec{a} \neq \vec{o}$ и $\vec{b} \neq \vec{o}$,

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b}\,)}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \cdot \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}}.$$

Отметим, что это равенство в сочетании с условием $|\cos\varphi| \leq 1$ приводит к верному $\forall \xi_i,\ \eta_j \quad i, j = 1 \ldots 3$ *неравенству Коши – Буняковского*:

$$|\,\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3\,| \leq \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \cdot \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}\,.$$

Задача 2.3.1 *Найти расстояние между двумя точками в ортонормированной системе координат, если известны координаты этих точек.*

Решение. Пусть даны: ортонормированная система координат $\{\, O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$ и две точки $M_1$ и $M_2$, радиусы=векторы которых имеют координатные представления вида

$$\left\| \vec{OM_1} \right\|_e = \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| \qquad \text{и} \qquad \left\| \vec{OM_2} \right\|_e = \left\| \begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{array} \right\| .$$

Тогда, используя решение задачи 1.7.1 и формулу для длины вектора

$$\vec{M_1M_2} = (\xi_1 - \eta_1)\vec{e}_1 + (\xi_2 - \eta_2)\vec{e}_2 + (\xi_3 - \eta_3)\vec{e}_3 \,,$$

получим в ортонормированной системе координат

Решение получено.

$$\left| \vec{M_1M_2} \right| = \sqrt{\ (\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2 \ } \ .$$

# Векторное произведение векторов и его свойства

Введем предварительно понятие *ориентации в пространстве* для произвольной тройки некомпланарных векторов.

| | |
|---|---|
| Определение 2.4.1 | Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ называется *правой*, если (после совмещения начал этих векторов) кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$, совершающимся против часовой стрелки.<br><br>В противном случае данная упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется *левой*. |

| | |
|---|---|
| Определение 2.4.2 | *Векторным произведением* неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, такой, что<br>1) $\left\|\vec{c}\right\| = \left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \sin\varphi$, где $\varphi$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;<br>2) вектор $\vec{c}$ ортогонален как вектору $\vec{a}$, так и вектору $\vec{b}$;<br>3) тройка векторов $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ правая.<br>В случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (в том числе, когда хотя бы один из сомножителей есть нулевой вектор), векторное произведение считается равным *нулевому вектору*. |

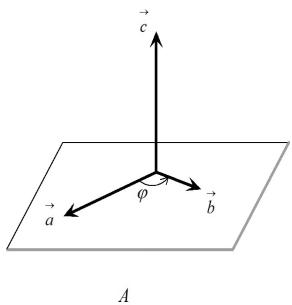


Рис. 4. К определению 2.4.2

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принято обозначать как $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ или $[\vec{a},\vec{b}]$ . Мы будем использовать последнее из этих обозначений. Определение 2.4.2 иллюстрирует рис. 4.

Из определения 2.4.2 следует, что

1) $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|$ равняется площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при совмещении их начал;

2) для коллинеарности ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулевому вектору.

## Свойства векторного произведения

1) $[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}]$ – *антикоммутативность* следует из определения 2.4.2 и нечетности функции $\sin\varphi$.

2) $[\lambda\vec{a},\vec{b}] = \lambda[\vec{a},\vec{b}]$ следует из определения векторного произведения и того факта, что векторы $[\lambda\vec{a},\vec{b}]$ и $[\vec{a},\vec{b}]$ ортогональны одной и той же плоскости при неколлинеарных $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и $\lambda \neq 0$.

3) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}] = [\vec{a},\vec{c}] + [\vec{b},\vec{c}]$ – *дистрибутивность* векторного произведения.

Для доказательства дистрибутивности векторного произведения воспользуемся следующими вспомогательными утверждениями.

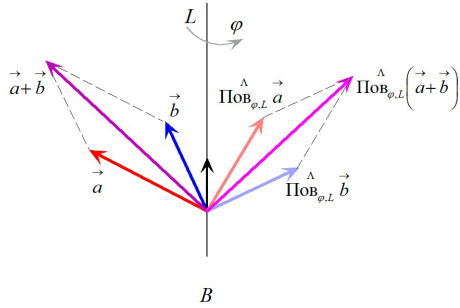


Рис. 5. К доказательству леммы 2.4.1

Лемма 2.4.1

**Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, начала которых находятся в общей точке на оси $L$. Тогда** *результат поворота суммы* **этих векторов на некоторый угол $\varphi$ вокруг оси $L$ равен** *сумме результатов поворота* **каждого из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вокруг оси $L$ на угол $\varphi$.**

Доказательство.

Символически утверждение леммы можно записать так:

$$\hat{\text{П}}\text{ов}_{\varphi,L}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\hat{\text{П}}\text{ов}_{\varphi,L}\vec{a}+\hat{\text{П}}\text{ов}_{\varphi,L}\vec{b}\,.$$

Его справедливость следует из правила параллелограмма и того факта, что при пространственном повороте вокруг некоторой оси параллелограмм не деформируется (рис. 5).

Лемма доказана.

Лемма 2.4.2

**Если** $\left|\vec{e}\right| = 1$ **и** $\vec{p} \neq \vec{o}$, **то вектор** $[\vec{p}, \vec{e}]$ **равен результату** *поворота проекции* **вектора** $\vec{p}$ **на плоскость, перпендикулярную вектору** $\vec{e}$, **вокруг вектора** $\vec{e}$, **на угол** $\frac{\pi}{2}$, **который виден из конца вектора** $\vec{e}$, **выполняющимся по часовой стрелке.**

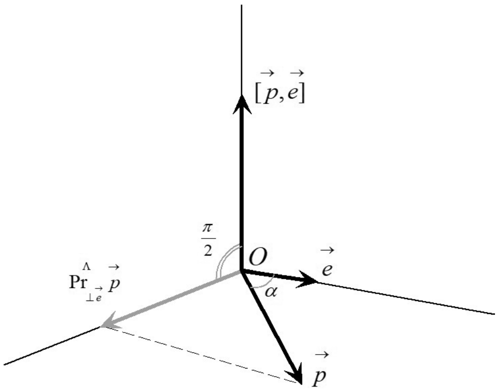


Рис. 6. К доказательству леммы 2.4.2

Доказательство.

Проведем две плоскости, одна из которых проходит через точку $O$ — общее начало векторов $\vec{p}$ и $\vec{e}$, перпендикулярно $\vec{e}$, а вторая проходит через векторы $\vec{p}$ и $\vec{e}$.

Ортогональная проекция вектора $\vec{p}$ на плоскость, перпендикулярную $\vec{e}$, будет лежать на линии пересечения построенных плоскостей (см. рис. 6), и тогда из определения векторного произведения имеем

$$|\,[\vec{p},\vec{e}]\,| = |\,\vec{p}\,|\cdot|\,\vec{e}\,|\cdot|\sin\alpha| = |\,\vec{p}\,|\cdot\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right|\,,$$

поскольку $|\,\vec{e}\,| = 1$. Следовательно, в рассматриваемом случае $[\vec{p},\vec{e}] = \hat{\text{Пов}}_{\frac{\pi}{2},\vec{e}}\left(\hat{\text{Pr}}_{\perp\vec{e}}\,\vec{p}\right)$, где $\hat{\text{Pr}}_{\perp\vec{e}}\,\vec{p}$ обозначает вектор, являющийся результатом ортогонального проектирования вектора $\vec{p}$ на плоскость, перпендикулярную $\vec{e}$.

Лемма доказана.

Докажем теперь дистрибутивность векторного произведения.

Доказательство свойства 3).

Если $\vec{c} = \vec{o}$, то свойство 3) очевидно. Пусть $\vec{c} \neq \vec{o}$, тогда если обозначить $\vec{e} = \dfrac{\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|}$, то в силу утверждений лемм 2.4.1, 2.4.2 и свойства 2.1 из § 2.1 получаем

$$[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\,] = \left|\vec{c}\right| [\vec{a} + \vec{b}, \frac{\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|}] = \hat{\text{Пов}}_{\frac{\pi}{2},\vec{e}} \left(\hat{\text{Pr}}_{\perp\vec{e}} \left(\vec{a} + \vec{b}\right)\right) =$$

$$= \hat{\text{Пов}}_{\frac{\pi}{2},\vec{e}} \left(\hat{\text{Pr}}_{\perp\vec{e}}\, \vec{a}\right) + \hat{\text{Пов}}_{\frac{\pi}{2},\vec{e}} \left(\hat{\text{Pr}}_{\perp\vec{e}}\, \vec{b}\right) =$$

$$= \left|\vec{c}\right| [\,\vec{a}, \frac{\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|}] + \left|\vec{c}\right| [\,\vec{b}, \frac{\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|}] =$$

$$= [\vec{a}, \vec{c}\,] + [\vec{b}, \vec{c}\,]\,.$$

Свойство доказано.

# Выражение векторного произведения в координатах

Пусть задан *правый* базис $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ (то есть такой, что векторы $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ образуют *правую* тройку) и пусть в этом базисе векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координатные разложения

$$\vec{a} = \xi_1\vec{g}_1 + \xi_2\vec{g}_2 + \xi_3\vec{g}_3 \qquad \text{и} \qquad \vec{b} = \eta_1\vec{g}_1 + \eta_2\vec{g}_2 + \eta_3\vec{g}_3\,.$$

По свойствам 2) и 3) векторного произведения

$$\begin{aligned}[\vec{a}, \vec{b}\,] = [\,\xi_1\vec{g}_1 + \xi_2\vec{g}_2 + \xi_3\vec{g}_3,\ \eta_1\vec{g}_1 + \eta_2\vec{g}_2 + \eta_3\vec{g}_3\,] = \\ = \xi_1\eta_1[\vec{g}_1, \vec{g}_1] + \xi_1\eta_2[\vec{g}_1, \vec{g}_2] + \xi_1\eta_3[\vec{g}_1, \vec{g}_3] + \\ + \xi_2\eta_1[\vec{g}_2, \vec{g}_1] + \xi_2\eta_2[\vec{g}_2, \vec{g}_2] + \xi_2\eta_3[\vec{g}_2, \vec{g}_3] + \\ + \xi_3\eta_1[\vec{g}_3, \vec{g}_1] + \xi_3\eta_2[\vec{g}_3, \vec{g}_2] + \xi_3\eta_3[\vec{g}_3, \vec{g}_3] = \\ = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\xi_j\eta_i[\vec{g}_j, \vec{g}_i]\,.\end{aligned}$$

Полученную формулу можно упростить до выражения с тремя слагаемыми, если учесть, что

$$[\vec{g}_j, \vec{g}_j] = \vec{o} \quad \forall j = 1,2,3 \qquad \text{и} \qquad [\vec{g}_j, \vec{g}_i] = -[\vec{g}_i, \vec{g}_j] \quad \forall j, i = 1,2,3\,.$$

Другими словами, если ввести обозначения

$$\vec{f}_1 = [\vec{g}_2, \vec{g}_3]\,, \quad \vec{f}_2 = [\vec{g}_3, \vec{g}_1]\,, \quad \vec{f}_3 = [\vec{g}_1, \vec{g}_2]\,,$$

то мы получим, использовав (после приведения подобных членов) связь определителей квадратных матриц 2-го и 3-го порядков (теорема 1.1.1), легко запоминаемую формулу

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)\,\vec{f}_1 - (\xi_1\eta_3 - \xi_3\eta_1)\,\vec{f}_2 + (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)\,\vec{f}_3 =$$

$$= \vec{f}_1 \det \left\| \begin{matrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{matrix} \right\| - \vec{f}_2 \det \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{matrix} \right\| + \vec{f}_3 \det \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \det \left\| \begin{matrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{matrix} \right\| .$$

## Случай ортонормированного базиса

Пусть исходный базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *ортонормированный*, образующий *правую* тройку векторов, тогда по определению 2.4.2

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1\,, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_2\,, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_3\,.$$

Тогда формула для векторного произведения векторов в *правом ортонормированном* базисе заметно упростится:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \det \left\| \begin{matrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{matrix} \right\| . \qquad (2.5.1)$$

Из вышеприведенных формул вытекают полезные следствия.

Следствие 2.5.1 **Для того чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы в любом базисе**

$$\det \left\| \begin{matrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{matrix} \right\| = \det \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{matrix} \right\| = \det \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{matrix} \right\| = 0\,,$$

**или же (в случае $\vec{b} \neq \vec{o}$ )** $\quad \dfrac{\xi_1}{\eta_1} = \dfrac{\xi_2}{\eta_2} = \dfrac{\xi_3}{\eta_3}\,.$

Следствие 2.5.2 **В ортонормированном базисе площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна**

$$S = \sqrt{\det{}^2 \left\| \begin{matrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{matrix} \right\| + \det{}^2 \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{matrix} \right\| + \det{}^2 \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{matrix} \right\|}\,,$$

**а для случая на плоскости** $S = \left| \det \left\| \begin{matrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{matrix} \right\| \right|\,.$

# Смешанное произведение

| Определение 2.6.1 | *Смешанным* (или *векторно-скалярным*) произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число $([\vec{a},\vec{b}\,],\vec{c})$. Смешанное произведение принято обозначать как $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$. |
|---|---|

Теорема 2.6.1

**Абсолютная величина смешанного произведения** $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ **векторов** $\vec{a}$, $\vec{b}$ **и** $\vec{c}$ **равна** *объему параллелепипеда*, **построенного на векторах** $\vec{a}$, $\vec{b}$ **и** $\vec{c}$ **при совмещении их начал.**

**При этом если тройка векторов** $\vec{a}$, $\vec{b}$ **и** $\vec{c}$ **некомпланарная и правая, то их смешанное произведение** *положительно*, **а если эта тройка левая, то –** *отрицательно*.

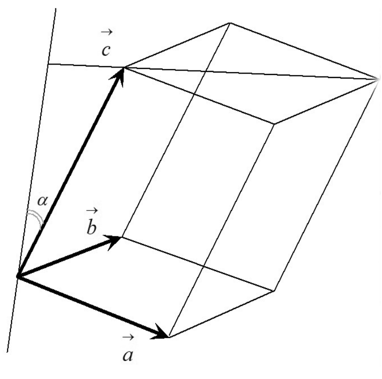


Рис. 7. К доказательству теоремы 2.6.1

Доказательство.

Если $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$, то утверждение теоремы очевидно.

Пусть $\vec{a}$ неколлинеарен $\vec{b}$, тогда по определению скалярного произведения $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \left|\,[\vec{a},\vec{b}\,]\,\right| \cdot \text{Пр}_{[\vec{a},\vec{b}]}\vec{c}$, где $S = \left|\,[\vec{a},\vec{b}\,]\,\right|$ есть площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а $\left|\text{Пр}_{[\vec{a},\vec{b}]}\vec{c}\right| = \left|\vec{c}\right| |\cos\alpha\,|$ – высота параллелепипеда с основанием $S$, откуда $V = \left|\,(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\,\right|$.

Наконец, по определению 2.6.1

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = ([\vec{a},\vec{b}\,],\vec{c}) = \left|\,[\vec{a},\vec{b}\,]\,\right| \left|\vec{c}\right| \cos\alpha\,,$$

что и позволяет сделать заключение о знаке смешанного произведения (см. рис. 7).

Теорема доказана.

## Свойства смешанного произведения

Смешанное произведение:

1. *Коммутативно* при любой циклической перестановке сомножителей и *антикоммутативно* — при не циклической:
$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) =$$
$$= -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b})\,.$$
2. Допускает вынос скалярного множителя
$$(\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \lambda(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\,.$$
3. Обладает свойством *дистрибутивности*:
$$(\vec{a_1}+\vec{a_2},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a_1},\vec{b},\vec{c}) + (\vec{a_2},\vec{b},\vec{c})\,.$$

Эти свойства следуют из определения 2.6.1 и теоремы 2.6.1.

Отметим также, что смешанное произведение равно нулю, если среди сомножителей имеется хотя бы одна пара коллинеарных.

# Выражение смешанного произведения в координатах

Пусть задан *правый* базис $\{\vec{g}_1,\, \vec{g}_2,\, \vec{g}_3\}$ и пусть в этом базисе векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ имеют координатные разложения

$$\vec{a} = \xi_1\vec{g}_1 + \xi_2\vec{g}_2 + \xi_3\vec{g}_3\,, \qquad \vec{b} = \eta_1\vec{g}_1 + \eta_2\vec{g}_2 + \eta_3\vec{g}_3$$

и соответственно $\quad \vec{c} = \kappa_1\vec{g}_1 + \kappa_2\vec{g}_2 + \kappa_3\vec{g}_3\,.$

Ранее было показано, что векторное произведение в координатах представимо как

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{f}_1 \det \left\| \begin{array}{cc} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{array} \right\| - \vec{f}_2 \det \left\| \begin{array}{cc} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{array} \right\| + \vec{f}_3 \det \left\| \begin{array}{cc} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{array} \right\| ,$$

где

$$\vec{f}_1 = [\vec{g}_2, \vec{g}_3]\,, \quad \vec{f}_2 = [\vec{g}_3, \vec{g}_1]\,, \quad \vec{f}_3 = [\vec{g}_1, \vec{g}_2]\,.$$

Использовав определение смешанного произведения 2.6.1, нетрудно убедиться, что из последних равенств следуют соотношения

$$(\vec{g}_k, \vec{f}_j) = \begin{cases} (\vec{g}_1,\, \vec{g}_2,\, \vec{g}_3) & \text{при} \quad k = j, \\ 0 & \text{при} \quad k \neq j \end{cases} \qquad \forall k, j = 1, 2, 3\,. \tag{2.7.1}$$

Тогда мы получим для смешанного произведения

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = \left( \kappa_1 \det \left\| \begin{matrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{matrix} \right\| - \right.$$

$$\left. -\kappa_2 \det \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{matrix} \right\| + \kappa_3 \det \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{matrix} \right\| \right) (\vec{g}_1,\, \vec{g}_2,\, \vec{g}_3) =$$

$$= \det \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{matrix} \right\| (\vec{g}_1,\, \vec{g}_2,\, \vec{g}_3)\,,$$

поскольку выражение, стоящее в больших круглых скобках, в силу теоремы 1.1.1 есть разложение итогового детерминанта 3-го порядка по его последней строке.

Замечания:

1) Из последней формулы и теоремы 2.6.1 следует (как альтернатива приведенному ранее доказательству) справедливость теоремы 1.6.3.

2) В случае правого ортонормированного базиса мы имеем $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3) = 1$. Поэтому в таком базисе

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{Vmatrix}.$$

3) Для тройки векторов $\left\{ \vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3 \right\}$ справедлива

Теорема 2.7.1 **Тройка векторов $\left\{\vec{f_1},\ \vec{f_2},\ \vec{f_3}\right\}$ линейно независимая.**

Доказательство.

Для доказательства линейной независимости векторов $\left\{\vec{f_1},\ \vec{f_2},\ \vec{f_3}\right\}$ достаточно показать, что из условия

$$\lambda_1\vec{f}_1 + \lambda_2\vec{f}_2 + \lambda_3\vec{f}_3 = \vec{o} \qquad (2.7.2)$$

следует $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Умножив последовательно обе части равенства (2.7.2) скалярно на векторы $\vec{g}_k \quad \forall k = 1,2,3$, получим систему трех равенств

$$(\vec{f}_1, \vec{g}_k)\lambda_1 + (\vec{f}_2, \vec{g}_k)\lambda_2 + (\vec{f}_3, \vec{g}_k)\lambda_3 = 0 \quad \forall k = 1,2,3\,, \quad (2.7.3)$$

которая при помощи соотношений (2.7.1) упрощается до $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)\lambda_k = 0 \;\; \forall k = 1,2,3$.

Векторы $\vec{g}_k \; \forall k = 1,2,3$ линейно независимые как базисные и $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3) \neq 0 \quad \forall k = 1,2,3$ по теореме 2.6.1. Но тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Теорема доказана.

Следствие 2.7.1 **Тройка векторов $\left\{\vec{f_1},\ \vec{f_2},\ \vec{f_3}\right\}$ образует базис (называемый** *взаимным* **к базису** $\{\vec{g}_1,\ \vec{g}_2,\ \vec{g}_3\}$ **) .**

# Двойное векторное произведение

| | |
|---|---|
| Определение 2.6.1 | *Двойным векторным произведением* векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется вектор $[\vec{a},\,[\vec{b},\,\vec{c}\,]]$ . |

Для решения ряда задач оказывается полезной

Теорема 2.8.1 **Имеет место равенство**

$$[\vec{a},\,[\vec{b},\,\vec{c}\,]] = \vec{b}\,(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a},\vec{b}) \; .$$

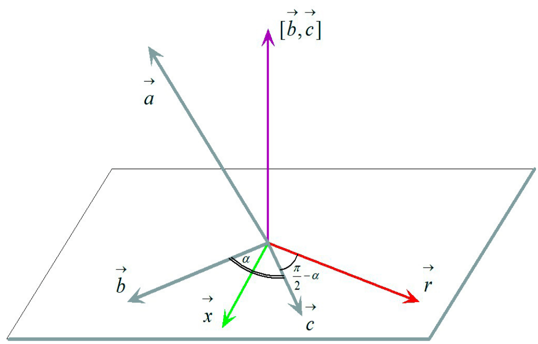


Рис. 8. К доказательству теоремы 2.8.1

Доказательство.

Заметим, что если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ попарно ортогональны, то доказываемое равенство очевидно, поэтому далее будем предполагать, что числа $(\vec{a}, \vec{b})$ и $(\vec{a}, \vec{c})$ не равны нулю одновременно.

Обозначим $\vec{x} = [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$. По определению векторного произведения вектор $\vec{x}$ ортогонален как вектору $[\vec{b}, \vec{c}]$, так и вектору $\vec{a}$.

1. По свойствам смешанного произведения условие ортогональности $\vec{x}$ и $[\vec{b}, \vec{c}]$ дает

$$(\vec{x}, [\vec{b}, \vec{c}]) = (\vec{x}, \vec{b}, \vec{c}) = 0\,.$$

   Это, в свою очередь, означает, что тройка векторов $\vec{x}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарная и в силу леммы 1.4.1 мы имеем равенство $\vec{x} = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$, где $\lambda$ и $\mu$ – некоторые числа.

2. Из условия $(\vec{x}, \vec{a}) = 0$ следует, что $(\lambda\vec{b} + \mu\vec{c}, \vec{a}) = 0$ и

$$\lambda(\vec{b}, \vec{a}) + \mu(\vec{c}, \vec{a}) = 0\,. \tag{2.8.1}$$

   Теперь для вычисления вектора $\vec{x}$ достаточно найти одно из чисел $\lambda$ или $\mu$.

3. Для вычисления значения $\mu$ используем вспомогательный вектор $\vec{r}$, удовлетворяющий следующим условиям:

   а) $\vec{r}$, так же как и вектор $\vec{x}$, принадлежит плоскости, проходящей через векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

   б) $(\vec{r}, \vec{b}) = 0$ и $(\vec{r}, \vec{c}) > 0$ (см. рис. 8),

   и подсчитаем двумя способами смешанное произведения вида $(\vec{a}, \vec{r}, [\vec{b}, \vec{c}]) = (\vec{a}, [\vec{r}, [\vec{b}, \vec{c}]])$.

4. С одной стороны, по свойствам смешанного произведения и в силу $(\vec{r}, \vec{b}) = 0$ имеем

$$(\vec{a}, \vec{r}, [\vec{b}, \vec{c}]) = -(\vec{r}, \vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = (\vec{r}, [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]) =$$

$$= -(\vec{r}, \vec{x}) = -(\vec{r}, \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}) =$$

$$= -\lambda(\vec{r}, \vec{b}) - \mu(\vec{r}, \vec{c}) = -\mu(\vec{r}, \vec{c}).$$

5. С другой стороны, вектор $[\vec{r},[\vec{b},\vec{c}]]$ сонаправлен с $\vec{b}$, то есть $\exists \kappa > 0$ такое, что $[\vec{r},[\vec{b},\vec{c}]] = \kappa\vec{b}$. Поэтому

$$(\vec{a},\vec{r},[\vec{b},\vec{c}]) = \kappa(\vec{a},\vec{b}).$$

Пусть $\alpha$ угол между векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а $\varphi = \frac{\pi}{2}$ – угол между векторами $\vec{r}$ и $[\vec{b},\vec{c}]$. Значение $\kappa$ находим при помощи определений векторного и скалярного произведений:

$$\kappa\left|\vec{b}\right| = \left|[\vec{r},[\vec{b},\vec{c}]]\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\sin\alpha\sin\varphi =$$

$$= \left|\vec{r}\right|\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = (\vec{r},\vec{c})\left|\vec{b}\right|,$$

поскольку угол между $\vec{r}$ и $[\vec{b},\vec{c}]$ прямой.

Откуда $\kappa = (\vec{r},\vec{c})$, что дает

$$(\vec{a},\vec{r},[\vec{b},\vec{c}]) = (\vec{r},\vec{c})(\vec{a},\vec{b}).$$

6. Приравняв выражения для $(\vec{a},\vec{r},[\vec{b},\vec{c}])$, полученные в 4 и 5, находим, что $\mu = -(\vec{a},\vec{b})$ и что, в силу (2.8.1), $\lambda = (\vec{a},\vec{c})$.

Теорема доказана.

# Замечания об инвариантности координатного представления произведений векторов

Операции векторных произведений были введены независимо от координатного представления сомножителей и, значит, независимо от используемого базиса. При этом естественно возникает вопрос о возможности (и соответственно целесообразности) определения операций произведения векторов непосредственно в координатной форме.

В общем случае каждой упорядоченной паре векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющих в базисе $\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\right\}$ координатные представления $\left\|\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{matrix}\right\|$ и $\left\|\begin{matrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{matrix}\right\|$, можно поставить в соответствие набор из девяти чисел – попарных произведений координат $\xi_k\eta_j \quad k,j = 1,2,3,$ который удобно представляется в виде матрицы

$$\left\|\begin{matrix}\xi_1\eta_1 & \xi_1\eta_2 & \xi_1\eta_3\\ \xi_2\eta_1 & \xi_2\eta_2 & \xi_2\eta_3\\ \xi_3\eta_1 & \xi_3\eta_2 & \xi_3\eta_3\end{matrix}\right\| . \tag{2.9.1}$$

На первый взгляд, зависимость компонент этой матрицы от выбора базиса делает координатный способ введения произведений векторов нецелесообразным, поскольку придется давать их определение для каждого из возможных базисов по отдельности.

Однако было замечено, что существуют некоторые линейные комбинации чисел $\xi_k \eta_j \quad k, j = 1, 2, 3$, *инвариантные* (то есть не изменяющиеся) при замене базиса, которые, в силу этого свойства, можно было бы принять за определение произведений векторов в координатном представлении.

Покажем в качестве примера, что сумма элементов матрицы 2.9.1, стоящих на ее главной диагонали, не меняется при переходе от одного ортонормированного базиса к другому.

Рассмотрим два *ортонормированных* базиса $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$ и $\left\{ \vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3 \right\}$ с матрицей перехода

$$\|S\| = \left\| \begin{array}{ccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{array} \right\| .$$

Согласно формулам (1.8.1), в этом случае для базисных векторов имеют место соотношения $\vec{e'}_i = \sum\limits_{p=1}^{3} \sigma_{pi} \vec{e}_p \quad \forall i = 1, 2, 3$, а для координат соответственно

$$\xi_s = \sum_{i=1}^{3} \sigma_{si} \xi'_i \ \ \forall s = 1, 2, 3\, , \qquad \eta_s = \sum_{i=1}^{3} \sigma_{si} \eta'_i \ \ \forall s = 1, 2, 3.$$

Пусть $\delta_{ji} = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i \end{cases}$ — символ Кронекера, тогда из условия ортонормированности базисов $\left\{ \vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3 \right\}$ и $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$ в силу соотношений

$$(\vec{e'}_i, \vec{e'}_t) = \delta_{it} \ \ \forall i, t = 1, 2, 3 \qquad \text{и} \qquad (\vec{e}_s, \vec{e}_p) = \delta_{sp} \ \ \forall s, p = 1, 2, 3$$

имеем

$$(\vec{e'}_i, \vec{e'}_t) = \delta_{it} = (\sum_{s=1}^{3} \sigma_{si} \vec{e}_s, \sum_{p=1}^{3} \sigma_{pt} \vec{e}_p) = \sum_{s=1}^{3} \sum_{p=1}^{3} \sigma_{si} \sigma_{pt} (\vec{e}_s, \vec{e}_p) =$$

$$= \sum_{s=1}^{3} \sum_{p=1}^{3} \sigma_{si} \sigma_{pt} \delta_{sp} = \sum_{s=1}^{3} \sigma_{si} \sigma_{st} \qquad \forall i, t = 1, 2, 3\,.$$

Отметим, что вытекающие из последних соотношений равенства

$$\sum_{s=1}^{3} \sigma_{si} \sigma_{st} = \delta_{it} \qquad \forall i, t = 1, 2, 3$$

являются *свойством* матрицы перехода $\|S\|$ от одного *ортонормированного* базиса к другому.

Теперь, используя это свойство и определение символа Кронекера, найдем выражение для линейной комбинации $\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3$ в базисе $\left\{ \vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3 \right\}$ По формулам перехода имеем

$$\sum_{i=1}^{3} \xi_i \eta_i = \sum_{i=1}^{3} \left( \sum_{s=1}^{3} \sigma_{is} \xi'_s \right) \left( \sum_{t=1}^{3} \sigma_{it} \eta'_t \right) = \sum_{s=1}^{3} \sum_{t=1}^{3} \xi'_s \eta'_t \sum_{i=1}^{3} \sigma_{is} \sigma_{it} =$$

$$= \sum_{s=1}^{3} \sum_{t=1}^{3} \xi'_s \eta'_t \delta_{st} = \sum_{t=1}^{3} \xi'_s \eta'_t \,.$$

Полученное равенство доказывает, что число $\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3$ не меняются при замене одного ортонормированного базиса другим. Поэтому такая сумма может быть принята за определение *скалярного произведения* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющих в любом ортонормированном базисе координатные представления вида

$$\left\| \vec{a} \right\|_e = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\| \qquad \text{и} \qquad \left\| \vec{b} \right\|_e = \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{matrix} \right\| .$$

Используя аналогичные рассуждения, можно показать (проверьте это самостоятельно), что при переходе от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису инвариантными также оказываются и линейные комбинации вида $\left\{\begin{array}{c} \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2 \\ \xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3 \\ \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 \end{array}\right\}$.

Это означает, что инвариантом будет и вектор $\vec{c}$, имеющий координатное представление

$$\left\|\vec{c}\right\|_e = \left\|\begin{array}{c} \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2 \\ \xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3 \\ \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 \end{array}\right\|,$$

которое можно принять за координатную форму определения *векторного произведения* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в ортонормированном базисе. Сравните это определение с формулой (2.5.1).