

Прямая и плоскость

Как было показано, с помощью системы координат можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством *точек пространства* и множеством их *радиусов-векторов*. Это в свою очередь позволяет свести исследование свойств линий, фигур, поверхностей или тел к изучению множеств радиусов-векторов точек, образующих рассматриваемые геометрические объекты.

Тема 4 посвящена методам описания и исследования свойств простейших геометрических объектов — *прямой* и *плоскости* — средствами векторной алгебры.

В главах 3, 4 и 5 настоящего пособия координата точки по оси $\{O, \vec{g}_1\}$ будет обозначаться через x , координата по оси $\{O, \vec{g}_2\}$ — через y и координата по оси $\{O, \vec{g}_3\}$ — через z . Кроме того, будут использоваться общепринятые форматы записи уравнений.

Прямая на плоскости

Пусть на плоскости дана система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ и задана прямая L , проходящая через точку, имеющую радиус-вектор \vec{r}_0 , с лежащим на ней *ненулевым* вектором \vec{a} .

Определение
3.1.1

Ненулевой вектор \vec{a} называется *направляющим вектором* прямой L .

Теорема
3.1.1

Множество радиусов-векторов точек прямой L представимо в виде $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau\vec{a}$, где τ – произвольный вещественный параметр.

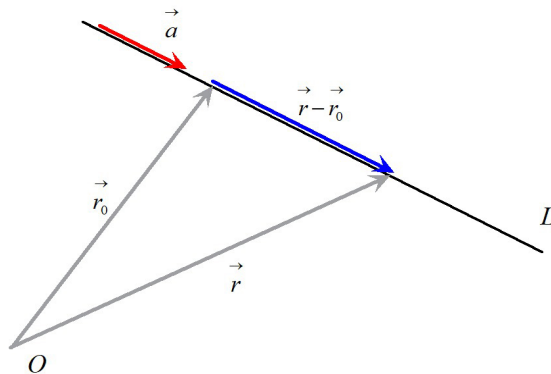


Рис. 1. К доказательству теоремы 3.1.1

Доказательство.

Пусть \vec{r} — некоторая точка на прямой L . Ненулевой вектор \vec{a} коллинеарен вектору $\vec{r} - \vec{r}_0$. Поэтому справедливо равенство $\vec{r} - \vec{r}_0 = \tau \vec{a}$ (рис. 1).

Тогда
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a} \quad \forall \tau \in (-\infty, +\infty).$$

Теорема доказана.

Найдем теперь координатное представление множества радиусов-векторов точек прямой L .

Пусть $\|\vec{r}\|_g = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$, $\|\vec{r}_0\|_g = \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|$ и $\|\vec{a}\|_g = \left\| \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \right\|$, тогда будут справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.1.2 **Всякая прямая в любой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида**

$$Ax + By + C = 0, \quad |A| + |B| > 0.$$

Доказательство.

Уравнение $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$ в силу леммы 1.4.1 означает, что векторы $\vec{r} - \vec{r}_0$ и \vec{a} линейно зависимы.

Условие же линейной зависимости этих векторов в координатной форме имеет вид (теорема 1.4.2):

$$\det \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a_x & a_y \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{или } a_y(x - x_0) - a_x(y - y_0) = 0.$$

Если ввести обозначения

$$A = a_y, \quad B = -a_x, \quad C = -a_y x_0 + a_x y_0,$$

то мы получим $Ax + By + C = 0$. При этом неравенство $|A| + |B| > 0$ будет следовать из $\vec{a} \neq \vec{0} \iff |a_x| + |a_y| > 0$.

Теорема доказана.

Теорема **Всякое уравнение вида**

3.1.3

$$Ax + By + C = 0, \quad |A| + |B| > 0$$

в любой декартовой системе координат задает некоторую прямую.

Доказательство.

Пусть дано уравнение вида

$$Ax + By + C = 0, \quad |A| + |B| > 0.$$

В этом случае всегда возможно подобрать пару чисел x_0 и y_0 так, чтобы $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Почленное вычитание этого равенства из исходного дает при $a_x = -B$, $a_y = A$

$$a_y(x - x_0) - a_x(y - y_0) = 0.$$

Возьмем точку

$$\left\| \vec{r}_0 \right\|_g = \left\| \begin{array}{c} x_0 \\ y_0 \end{array} \right\| \quad \text{и вектор} \quad \left\| \vec{a} \right\|_g = \left\| \begin{array}{c} a_x \\ a_y \end{array} \right\|.$$

Из теоремы 3.1.2 следует, что прямая, проходящая через точку \vec{r}_0 в направлении вектора $\vec{a} \neq \vec{o}$, имеет уравнение вида

$$a_y(x - x_0) - a_x(y - y_0) = 0.$$

Следовательно, уравнение, указанное в формулировке теоремы, есть уравнение прямой.

Теорема доказана.

Замечание: из теорем 3.1.2–3.1.3 следует, что каждое линейное уравнение в декартовой системе координат на плоскости задает некоторую конкретную прямую, но, с другой стороны, конкретная прямая на плоскости может быть задана *бесчисленным множеством* линейных уравнений, и естественно возникает вопрос: при каких условиях два разных линейных уравнения задают одну и ту же прямую? Ответ на этот вопрос дает

Теорема **Для того чтобы уравнения**

3.1.4

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad |A_1| + |B_1| > 0 \quad \text{и}$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad |A_2| + |B_2| > 0$$

являлись уравнениями одной и той же прямой, необходимо и достаточно, чтобы $\exists \lambda \neq 0$ такое, что

$$\begin{cases} A_1 = \lambda A_2 & B_1 = \lambda B_2 & C_1 = \lambda C_2, \\ A_2 = \lambda A_1 & B_2 = \lambda B_1 & C_2 = \lambda C_1. \end{cases}$$

Доказательство достаточности.

Пусть коэффициенты уравнений пропорциональны, и имеет место равенство $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Тогда

$$0 = A_2x + B_2y + C_2 = \frac{1}{\lambda}(A_1x + B_1y + C_1),$$

но поскольку $\lambda \neq 0$, то $A_1x + B_1y + C_1 = 0$.

Аналогично из равенства $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ следует, что и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Доказательство необходимости.

Пусть уравнения

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad |A_1| + |B_1| > 0 \quad \text{и}$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad |A_2| + |B_2| > 0$$

задают в некоторой декартовой системе координат одну и ту же прямую. Тогда их направляющие векторы коллинеарны, т.е. $\exists \lambda \neq 0$ такое, что $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$.

С другой стороны, из равносильности уравнений

$$\lambda A_2x + \lambda B_2y + C_1 = 0, \quad \text{и}$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

следует также, что и $C_1 = \lambda C_2$.

Теорема доказана.

Замечание: уравнение прямой не в любой системе координат является алгебраическим уравнением первой степени. Например, в *полярной* системе координат оно может иметь вид $\rho = P \sec(\varphi + \varphi_0)$.

Способы задания прямой на плоскости

В общей декартовой системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ существуют различные формы задания прямой на плоскости. Рассмотрим основные из них.

1°. Уравнение прямой, проходящей через две несовпадающие точки r_1 и r_2 :

$$\text{с } \left\| \vec{r}_1 \right\|_g = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ y_1 \end{array} \right\|$$

$$\text{и } \left\| \vec{r}_2 \right\|_g = \left\| \begin{array}{c} x_2 \\ y_2 \end{array} \right\|$$

Поскольку в данном случае в качестве направляющего вектора \vec{a} можно взять $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, а в качестве \vec{r}_0 — вектор \vec{r}_1 , то указанная в теореме 3.1.1 параметрическая форма уравнения прямой примет вид $\vec{r} = \vec{r}_1 + \tau (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ или $\vec{r} = (1 - \tau)\vec{r}_1 + \tau\vec{r}_2 \quad \forall \tau \in (-\infty, +\infty)$.

Координатный вид полученного векторного уравнения прямой на плоскости можно найти, исключив параметр τ .

В результате получится один из трех следующих случаев:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \\ y = y_1 \quad \forall x, \\ x = x_1 \quad \forall y, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{если } \begin{cases} x_1 \neq x_2, \\ y_1 \neq y_2, \end{cases} \\ \text{если } y_1 = y_2, \\ \text{если } x_1 = x_2. \end{array}$$

Проверьте самостоятельно, что эти три случая могут быть описаны одним условием:

$$\det \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

и что справедливо

Следствие **Три точки** $\vec{r}_1 = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$, $\vec{r}_2 = \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$ и $\vec{r}_3 = \begin{vmatrix} x_3 \\ y_3 \end{vmatrix}$
3.2.1 **лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их координаты связаны соотношением**

$$\det \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2°. Векторное уравнение прямой, проходящей через точку

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

перпендикулярно заданному ненулевому вектору

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}.$$

Здесь в качестве направляющего вектора \vec{a} также можно взять $\vec{r} - \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$, где радиус-вектор произвольной точки на прямой L (см. рис. 2) $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Этот направляющий вектор ортогонален любому ненулевому вектору \vec{n} , который перпендикулярен L , и потому уравнение прямой может быть записано в виде

$$(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad \text{или же} \quad (\vec{n}, \vec{r}) = d.$$

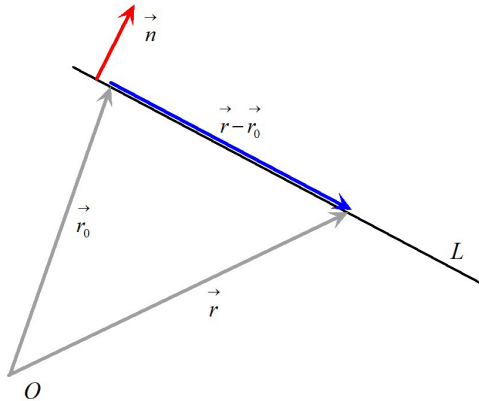


Рис. 2. К выводу уравнения $(\vec{n}, \vec{r}) = d$

В последней формуле значение числового параметра d определяется по \vec{r}_0 и \vec{n} из равенства $d = (\vec{n}, \vec{r}_0)$.

При обратном переходе в качестве вектора \vec{r}_0 можно использовать вектор $\vec{r}_0 = \frac{d}{(\vec{n}, \vec{n})} \vec{n}$. Справедливость последней формулы проверьте самостоятельно.

Координатный вид данной формы уравнения прямой на плоскости будет зависеть от выбранной декартовой системы координат. Например, в *ортонормированной* системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ уравнения

$$(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad \text{или} \quad (\vec{n}, \vec{r}) = d$$

будут иметь соответственно вид

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) = 0$$

или $n_x x + n_y y = d$, где $d = n_x x_0 + n_y y_0$.

Сравнивая последнюю запись с общим видом уравнения прямой $Ax + By + C = 0$, приходим к заключению, что в *ортонормированной* системе координат вектор \vec{n} , для которого $\|\vec{n}\|_e = \left\| \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right\|$, будет ортогонален этой прямой.

Определение 3.2.1 Ненулевой вектор \vec{n} называется *нормальным* вектором прямой L .

Замечания о линейных неравенствах

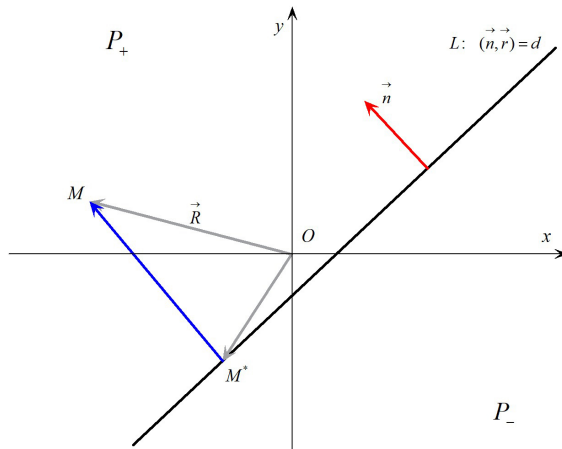


Рис. 3. Геометрическая интерпретация линейного неравенства

Аналогично тому, как линейное уравнение задает на плоскости прямую, линейное неравенство

$$Ax + By + C > 0, \quad |A| + |B| > 0$$

определяет часть плоскости (множество точек, координаты которых x и y удовлетворяют данному неравенству), ограниченную прямой

$$Ax + By + C = 0, \quad |A| + |B| > 0.$$

Покажем справедливость данного утверждения для случая, когда прямая $L : (\vec{n}, \vec{r}) = d$ выделяет на координатной плоскости P два множества точек, обозначаемых как P_+ и P_- (см. рис. 3), согласно следующему определению.

Определение 3.2.2 Будем говорить, что точка M с радиусом-вектором \vec{R} принадлежит полуплоскости P_+ (соответственно P_-), если существует $\lambda > 0$ (соответственно $\lambda < 0$) такое, что $\vec{M^*M} = \lambda \vec{n}$, где точка M^* есть ортогональная проекция точки M на прямую L .

Имеет место

Теорема 3.2.1 Для того чтобы $M \in P_+$, необходимо и достаточно выполнения неравенства $(\vec{n}, \vec{R}) > d$.

Доказательство необходимости.

Пусть $M \in P_+$, то есть $\exists \lambda > 0 : M^*M = \lambda\vec{n}$. Оценим величину (\vec{n}, \vec{R}) .

Поскольку $M^* \in L$, то $(\vec{n}, O\vec{M}^*) = d$. Тогда

$$(\vec{n}, \vec{R}) = (\vec{n}, O\vec{M}^* + M^*M) = d + \lambda(\vec{n}, \vec{n}) > d$$

в силу положительности λ .

Доказательство достаточности.

Пусть $(\vec{n}, \vec{R}) > d$ и $M^*M = \lambda\vec{n}$. Тогда из $(\vec{n}, O\vec{M}^*) = d$ получаем

$$\begin{aligned} (\vec{n}, \vec{R}) &= (\vec{n}, O\vec{M}^* + M^*M) = (\vec{n}, O\vec{M}^*) + (\vec{n}, M^*M) = \\ &= d + \lambda(\vec{n}, \vec{n}) > d \quad \implies \quad \lambda(\vec{n}, \vec{n}) > 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\vec{n} \neq \vec{o}$, то $\lambda > 0$ и, значит, $M \in P_+$

Теорема доказана.

Рассмотренные способы координатно-векторного описания точек и прямых на плоскости позволяют решать достаточно сложные геометрические задачи, что иллюстрирует

Задача 3.2.1 Дана декартова система координат на плоскости $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ и прямая L с уравнением $(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$. Найти расстояние до этой прямой от точки, радиус-вектор которой \vec{R} имеет координатное представление $\|\vec{R}\|_g = \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\|$.

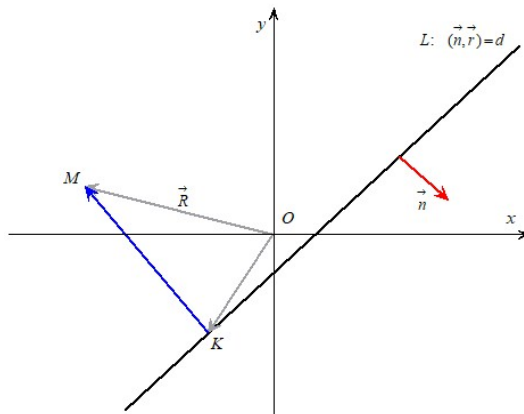


Рис. 4. К решению задачи 3.2.1

Решение. Пусть $\vec{KM} = \lambda \vec{n}$. Тогда $\vec{R} = \vec{OK} + \lambda \vec{n}$ (см. рис. 3.4). Искомое расстояние в этом случае есть длина вектора \vec{KM} .

Точка K принадлежит L , поэтому $(\vec{n}, \vec{OK} - \vec{r}_0) = 0$ или $(\vec{n}, \vec{R} - \lambda \vec{n} - \vec{r}_0) = 0$. Откуда $\lambda = \frac{(\vec{n}, \vec{R} - \vec{r}_0)}{|\vec{n}|^2}$.

Для искомого расстояния имеем

$$|\vec{KM}| = |\lambda| |\vec{n}| = \frac{|(\vec{n}, \vec{R} - \vec{r}_0)|}{|\vec{n}|}.$$

В заключение найдем ответ в координатной форме. Пусть система координат ортонормированная. Тогда для уравнения $Ax + By + C = 0$, $|A| + |B| > 0$, как было показано, вектор $\vec{n} = \left\| \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right\|$ перпендикулярен прямой L . Поэтому

$$|\vec{KM}| = \frac{|A(X - x_0) + B(Y - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Принимая во внимание, что точка \vec{r}_0 лежит на прямой L и, следовательно, $Ax_0 + By_0 + C = 0$, окончательный ответ можно записать в виде

Решение
получено.

$$|\vec{KM}| = \frac{|AX + BY + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Координатный метод позволяет строить аналитические описания не только отдельных точек и прямых, но и более сложных объектов.

Примером может служить описание треугольника с вершинами в точках $A(6; 0)$, $B(3; 3)$ и $C(3; -3)$, являющееся системой трех линейных неравенств

$$\begin{cases} -x + 3y \leq 6, \\ 6x - y \leq 15, \\ 3x + 8y \geq -18. \end{cases}$$

Чтобы построить эту систему, вначале необходимо найти уравнения сторон треугольника ABC , воспользовавшись, например, результатом пункта 1° этого параграфа.

Затем, применив определение 3.2.2, подберем подходящие знаки неравенств. Для этого воспользуемся тем, что при циклическом обходе по вершинам треугольника против часовой стрелки его внутренние точки должны принадлежать множествам P_- для всех трех границ одновременно.

Наконец, учтем, что неравенства системы нестрогие, поскольку граничные точки должны принадлежать треугольнику.

Другим, полезным для практики, примером такого множества является пучок прямых.

Определение 3.2.3	<i>Пучком прямых</i> на плоскости называется совокупность всех прямых, проходящих через некоторую заданную точку, именуемую <i>вершиной пучка</i> .
-----------------------------	---

Теорема
3.2.2

Пусть точка, общая для всех прямых пучка, является точкой пересечения непараллельных прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогда

- 1) для любой прямой пучка найдется пара не равных нулю одновременно чисел α и β , таких, что

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

есть уравнение этой прямой;

- 2) при любых, не равных нулю одновременно α и β , уравнение

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

есть уравнение некоторой прямой данного пучка.

Доказательство.

1. Возьмем некоторую точку $\vec{r}^* = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$, не совпадающую с вершиной пучка, и примем в качестве параметров числа $\alpha = A_1x + B_1y + C_1$ и $\beta = -(A_2x + B_2y + C_2)$. Заметим, что при этом $|\alpha| + |\beta| > 0$, поскольку точка \vec{r}^* не принадлежит данным прямым одновременно.

Кроме того, прямая

$$(A_2x^* + B_2y^* + C_2)(A_1x + B_1y + C_1) + \\ + (A_1x^* + B_1y^* + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

проходит как через точку \vec{r}^* , так и через вершину пучка и, следовательно, принадлежит пучку.

2. Пусть $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ — пара пересекающихся прямых из рассматриваемого пучка, тогда очевидно, что

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

При этом уравнение

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2) = 0$$

является уравнением прямой, поскольку из $|A_1| + |B_1| > 0$, $|A_2| + |B_2| > 0$ и $|\alpha| + |\beta| > 0$ следует, что

$$|\alpha A_1 + \beta A_2| + |\alpha B_1 + \beta B_2| > 0.$$

Действительно, допустим противное:

$$\begin{cases} \alpha A_1 + \beta A_2 = 0, \\ \alpha B_1 + \beta B_2 = 0. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ по построению имеют, по крайней мере, одну общую точку. Поэтому они либо совпадают, либо пересекаются. По теореме 3.1.4 они совпадают тогда и только тогда, когда существует $\lambda \neq 0$, для которого $A_1 = \lambda A_2$ и $B_1 = \lambda B_2$.

А последние два равенства по теореме 1.6.2 равносильны условию

$$\det \begin{vmatrix} A_1 & A_1 \\ B_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Но в рассматриваемом случае прямые пересекаются, поэтому $\det \begin{vmatrix} A_1 & A_1 \\ B_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, и в силу теоремы 1.1.2 система линейных уравнений 3.2.1 может иметь лишь единственное решение.

С другой стороны, очевидно, что эта система имеет тривиальное решение $\alpha = \beta = 0$, что противоречит неравенству $|\alpha| + |\beta| > 0$. Следовательно,

$$|\alpha A_1 + \beta A_2| + |\alpha B_1 + \beta B_2| > 0.$$

Теорема доказана.

Определение
3.2.4

Уравнение

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

где $|\alpha| + |\beta| > 0$, называется *уравнением пучка прямых на плоскости*.

Плоскость в пространстве

Пусть дана система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и выбрана плоскость S , проходящая через точку имеющую радиус-вектор \vec{r}_0 , и лежащими на S неколлинеарными векторами \vec{p} и \vec{q} .

Определение 3.3.1	Неколлинеарные векторы \vec{p} и \vec{q} называются <i>направляющими векторами</i> плоскости S .
-----------------------------	--

Теорема 3.3.1 **Множество радиусов-векторов точек плоскости S представимо в виде $\vec{r} = \vec{r}_0 + \varphi\vec{p} + \theta\vec{q}$, где φ и θ — произвольные вещественные параметры.**

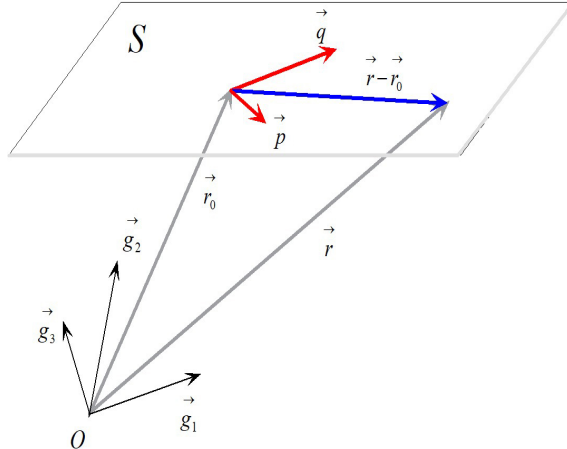


Рис. 5. К доказательству теоремы 3.3.1

Доказательство.

Пусть \vec{r} — некоторая точка на плоскости S .

Тройка векторов \vec{p} , \vec{q} и $\vec{r} - \vec{r}_0$ очевидно компланарная. Поэтому вектор $\vec{r} - \vec{r}_0$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов \vec{p} и \vec{q} :

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \varphi \vec{p} + \theta \vec{q} \quad \forall \varphi, \theta \in (-\infty, +\infty).$$

И, следовательно, векторно-параметрическое уравнение плоскости можно записать в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \varphi \vec{p} + \theta \vec{q} \quad \forall \varphi, \theta \in (-\infty, +\infty).$$

Теорема доказана.

Иными словами, каждая упорядоченная пара чисел φ и θ определяет некоторую точку плоскости S , а для каждой точки этой плоскости существует единственная упорядоченная пара чисел φ и θ , определяющая ее радиус-вектор.

Найдем теперь координатное представление множества радиусов-векторов точек плоскости S . Введем обозначения $\|\vec{r}\|_g = \left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\|$,

$$\|\vec{r}_0\|_g = \left\| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{matrix} \right\|, \quad \|\vec{p}\|_g = \left\| \begin{matrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{matrix} \right\| \quad \text{и} \quad \|\vec{q}\|_g = \left\| \begin{matrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{matrix} \right\|, \quad \text{тогда}$$

будут справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.3.2 **Всякая плоскость в любой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида**

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad |A| + |B| + |C| > 0.$$

Доказательство.

Уравнение $\vec{r} = \vec{r}_0 + \varphi\vec{p} + \theta\vec{q}$, в силу леммы 1.4.1, означает, что три вектора $\vec{r} - \vec{r}_0$, \vec{p} и \vec{q} линейно зависимые.

Условие же линейной зависимости этих векторов в координатной форме имеет вид (теорема 1.4.3):

$$\det \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix} = 0. \quad (3.3.1)$$

Тогда, разложив детерминант по первой строке, получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

что в итоге дает $Ax + By + Cz + D = 0$.

Действительно, если ввести обозначения

$$A = \det \begin{vmatrix} p_y & p_z \\ q_y & q_z \end{vmatrix}, \quad B = -\det \begin{vmatrix} p_x & p_z \\ q_x & q_z \end{vmatrix},$$

$$C = \det \begin{vmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{vmatrix}$$

и $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, то получается $Ax + By + Cz + D = 0$.

При этом неравенство $|A| + |B| + |C| > 0$ будет следовать из условия неколлинеарности векторов \vec{p} и \vec{q} , записанного в форме, указанной в следствии 2.5.1.

Теорема доказана.

Теорема 3.3.3 **Всякое уравнение вида**

3.3.3

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad |A| + |B| + |C| > 0,$$

в любой декартовой системе координат есть уравнение некоторой плоскости.

Доказательство.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad |A| + |B| + |C| > 0,$$

при $C \neq 0$ может быть записано в виде

$$\det \begin{vmatrix} x + \frac{DA}{A^2 + B^2 + C^2} & y + \frac{DB}{A^2 + B^2 + C^2} & z + \frac{DC}{A^2 + B^2 + C^2} \\ 0 & -C & B \\ C & 0 & -A \end{vmatrix} = 0, \quad (3.3.2)$$

а при $C = 0$ в виде

$$\det \begin{vmatrix} x + \frac{DA}{A^2 + B^2} & y + \frac{DB}{A^2 + B^2} & z + 0 \\ -B & A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.3.3)$$

Тогда в любой декартовой системе координат в качестве векторов \vec{p} и \vec{q} при $C \neq 0$ можно взять

$$\|\vec{p}\|_g = \begin{vmatrix} 0 \\ -C \\ B \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \|\vec{q}\|_g = \begin{vmatrix} C \\ 0 \\ -A \end{vmatrix},$$

а в случае $C = 0$

$$\|\vec{p}\|_g = \begin{vmatrix} -B \\ A \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \|\vec{q}\|_g = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix},$$

поскольку из сопоставления уравнений (3.3.2) и (3.3.3) с формулой (3.3.1) следует, что как (3.3.2), так и (3.3.3) суть уравнения плоскости, проходящей через заданную точку параллельно двум неколлинеарным векторам.

Теорема доказана.

Замечание: уравнение (3.3.1) может быть также получено, если условие компланарности векторов $\vec{r} - \vec{r}_0$, \vec{p} и \vec{q} записать в виде равенства нулю их смешанного произведения:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{p}, \vec{q}) = 0.$$

Задача 3.3.1 В системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные, не лежащие на одной прямой точки:

$$\|\vec{r}_1\|_g = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}, \quad \|\vec{r}_2\|_g = \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix}, \quad \|\vec{r}_3\|_g = \begin{vmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{vmatrix},$$

Решение. Из условия задачи следует, что неколлинеарные векторы $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ и $\vec{r}_3 - \vec{r}_1$ параллельны искомой плоскости. Кроме того, для радиуса-вектора любой принадлежащей этой плоскости точки \vec{r} вектор $\vec{r} - \vec{r}_1$ также будет ей параллелен.

Из условия компланарности тройки векторов

$$\vec{r} - \vec{r}_1, \quad \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \text{и} \quad \vec{r}_3 - \vec{r}_1$$

получаем уравнение искомой плоскости, которое будет иметь вид $(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$ или же в координатной форме (согласно § 2.7):

$$\det \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3) = 0.$$

Наконец, учитывая, что смешанное произведение тройки линейно независимых (поскольку они суть базисные) векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ не равно нулю, то окончательно получаем искомое уравнение (в *любой* декартовой системе координат):

$$\det \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Решение
получено.

Задача В системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ составить уравнение плоскости, проходящей через заданную точку

3.3.2

$$\left\| \vec{r}_0 \right\|_g = \left\| \begin{array}{c} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{array} \right\| \text{ перпендикулярно ненулевому вектору}$$

$$\left\| \vec{n} \right\|_g = \left\| \begin{array}{c} n_x \\ n_y \\ n_z \end{array} \right\|.$$

Решение. По условию задачи для любой точки, принадлежащей этой плоскости, с радиусом-вектором \vec{r} векторы \vec{n} и $\vec{r} - \vec{r}_0$ будут ортогональны, т.е. $(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$.

В ортонормированной системе $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ это условие имеет координатный вид

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0$$

или если обозначить $A = n_x$, $B = n_y$, $C = n_z$ и соответственно $D = -n_x x_0 - n_y y_0 - n_z z_0$, то получаем знакомое

Решение равно $Ax + By + Cz + D = 0$.
получено.

Определение 3.3.2	Ненулевой вектор \vec{n} называется <i>нормальным</i> вектором плоскости $(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$.
----------------------	---

Определение 3.3.3	Вектор $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ называется <i>главным</i> вектором плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, $ A + B + C > 0$.
----------------------	--

В *ортонормированной* системе координат главный вектор плоскости является также и ее нормальным вектором.

Задача 3.3.3 В *ортонормированной* системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ найти расстояние от точки M с радиусом-вектором $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ до плоскости $(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$.

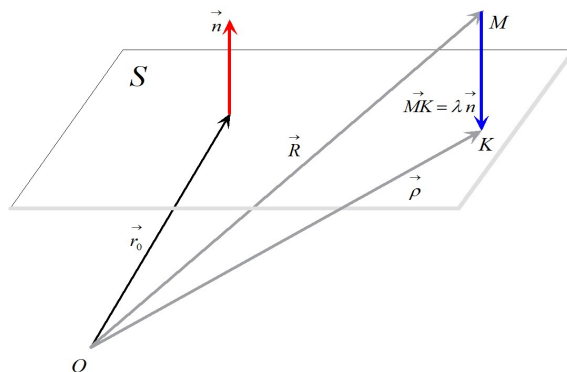


Рис. 6. К решению задачи 3.3.3

Решение. Пусть K есть ортогональная проекция точки M на данную плоскость, тогда $\vec{MK} = \lambda \vec{n}$ и $\vec{\rho} = \vec{R} + \lambda \vec{n}$. Точка K принадлежит данной плоскости, поэтому имеет место соотношение $(\vec{n}, \vec{R} + \lambda \vec{n} - \vec{r}_0) = 0$, из которого получаем $\lambda = -\frac{(\vec{n}, \vec{R} - \vec{r}_0)}{|\vec{n}|^2}$. Тогда искомое расстояние будет равно

$$|\vec{MK}| = \left| \frac{(\vec{n}, \vec{R} - \vec{r}_0)}{|\vec{n}|} \right| = \frac{|(\vec{n}, \vec{R} - \vec{r}_0)|}{|\vec{n}|}.$$

В ортонормированной системе вектор $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}^T$ — нормальный вектор плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Откуда $|\vec{MK}| = \frac{|A(X - x_0) + B(Y - y_0) + C(Z - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Точка $\vec{r}_0 \in S$, следовательно, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Поэтому ответ задачи можно записать так:

$$|\vec{MK}| = \frac{|AX + BY + CZ + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Решение
получено.

Теорема 3.3.4 **Для того чтобы плоскости**

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad |A_1| + |B_1| + |C_1| > 0,$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad |A_2| + |B_2| + |C_2| > 0,$$

были параллельны или совпадали, необходимо и достаточно, чтобы их главные векторы были коллинеарны.

Доказательство.

Докажем достаточность.

Если главные векторы плоскостей коллинеарны, то $\exists \lambda \neq 0$ такое, что $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$.

Тогда система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

может быть записана в виде

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + \lambda D_2 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы следует, что при $D_1 \neq \lambda D_2$ общих точек у рассматриваемых плоскостей нет, а при $D_1 = \lambda D_2$ все точки общие. Таким образом, достаточность доказана.

Теперь докажем необходимость.

Пусть плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad |A_1| + |B_1| + |C_1| > 0. \quad \text{и}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad |A_2| + |B_2| + |C_2| > 0$$

параллельны. Тогда они должны пересекать каждую из координатных плоскостей по параллельным прямым.

Для определенности будем считать, что это плоскости, для которых $x = 0$ и $z = 0$. Линии пересечения с первой из этих координатных плоскостей будут задаваться системами уравнений

$$\begin{cases} x = 0, \\ B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 0, \\ B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Параллельность этих прямых означает, что $\exists \lambda \neq 0$ такое, что

$$B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2.$$

Для случая $z = 0$ системы линейных уравнений, определяющие линии пересечения, имеют аналогичный вид:

$$\begin{cases} z = 0, \\ A_1y + B_1y + D_1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = 0, \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0. \end{cases}$$

Теперь из условия параллельности секущих плоскостей и полученного ранее равенства $B_1 = \lambda B_2$ находим, что также и $A_1 = \lambda A_2$.

Теорема доказана.

Следствие Для того чтобы уравнения

3.3.2

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad |A_1| + |B_1| + |C_1| > 0,$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad |A_2| + |B_2| + |C_2| > 0,$$

были уравнениями одной и той же плоскости, необходимо и достаточно, чтобы $\exists \lambda \neq 0$ такое, что

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2, \quad D_1 = \lambda D_2.$$

Определение 3.3.4	<p><i>Пучком плоскостей</i> в пространстве называется совокупность всех плоскостей, проходящих через данную прямую.</p>
Определение 3.3.5	<p><i>Уравнением пучка плоскостей</i>, проходящих через прямую, определяемую пересечением пары непараллельных плоскостей</p> $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_1 + B_1 + C_1 > 0$ <p>и</p> $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad A_2 + B_2 + C_2 > 0,$ <p>называется уравнение вида</p> $\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$ <p>где $\alpha + \beta > 0$.</p>
Определение 3.3.6	<p><i>Связкой плоскостей</i> в пространстве называется совокупность всех плоскостей, проходящих через данную точку.</p>

Способы задания прямой в пространстве

Существуют различные способы задания прямой в пространстве в декартовой системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

1°. Уравнение
прямой в
пространстве
в векторной
параметрической
форме

Возьмем произвольную точку с радиусом-вектором $\vec{r} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$, принадлежащую прямой L , имеющей ненулевой направляющий вектор $\vec{a} = \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{vmatrix}$ и проходящей через заданную точ-

ку с радиусом-вектором $\vec{r}_0 = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$.

Тогда из коллинеарности векторов \vec{a} и $\vec{r} - \vec{r}_0$ следует, что уравнение прямой имеет вид

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a} \quad \forall \tau \in (-\infty, +\infty).$$

См. рис. 1.

2°. Уравнение
прямой в
канонической
форме

Рассмотрим координатную запись уравнения
 $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$:

$$\begin{cases} x = x_0 + \tau a_x, \\ y = y_0 + \tau a_y, \\ z = z_0 + \tau a_z. \end{cases}$$

Если в этой системе уравнений исключить параметр τ , то при $a_x a_y a_z \neq 0$ получается так называемое *каноническое уравнение прямой*:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z},$$

хотя здесь правильнее говорить о *системе уравнений*.

Случай $a_x a_y a_z = 0$ рассматривается аналогично планометрическому.

3°. Уравнение прямой, проходящей через две несовпадающие точки \vec{r}_1 , и \vec{r}_2 с

$$\left\| \vec{r}_1 \right\|_g = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad \left\| \vec{r}_2 \right\|_g = \left\| \begin{array}{c} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{array} \right\|$$

Поскольку в данном случае в качестве направляющего вектора \vec{a} можно взять $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, а в качестве \vec{r}_0 — вектор \vec{r}_1 , то векторная параметрическая форма уравнения прямой L примет вид $\vec{r} = \vec{r}_1 + \tau (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ или

$$\vec{r} = (1 - \tau)\vec{r}_1 + \tau\vec{r}_2 \quad \forall \tau \in (-\infty, +\infty).$$

Координатный вид полученного векторного уравнения прямой в пространстве можно найти, исключив параметр τ .

В результате получится система вида

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

4°. Уравнение
прямой в
пространстве
в 1-й векторной
форме

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей с неколлинеарными нормальными векторами, т.е. плоскостей заданных уравнениями $(\vec{n}_1, \vec{r}) = d_1$ и $(\vec{n}_2, \vec{r}) = d_2$, т.е. системой

$$\begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{r}) = d_1, \\ (\vec{n}_2, \vec{r}) = d_2, \end{cases}$$

где векторы \vec{n}_1 и \vec{n}_2 линейно независимые, \vec{r} — радиус-вектор произвольной точки на прямой L , а d_1 и d_2 — некоторые известные числа. Или же, если дан \vec{r}_0 — радиус-вектор точки, через которую проходит прямая, то радиус-вектор любой точки этой прямой удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0, \\ (\vec{n}_2, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0. \end{cases}$$

Наконец, в координатной форме это будет система линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

5°. Уравнение
прямой в
пространстве
во 2-й векторной
форме

Прямая в пространстве может быть задана при помощи условия *коллинеарности* векторов \vec{a} и $\vec{r} - \vec{r}_0$ в виде уравнения $[\vec{a}, \vec{r} - \vec{r}_0] = \vec{o}$. Или же $[\vec{a}, \vec{r}] = \vec{b}$, где $\vec{b} = [\vec{a}, \vec{r}_0]$.

В ортонормированной системе координат уравнение этой прямой принимает вид векторного равенства

$$\det \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_x & a_y & a_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{b},$$

которое в координатной форме будет

$$\begin{cases} a_y z - a_z y = b_x, \\ a_z x - a_x z = b_y, \\ a_x y - a_y x = b_z. \end{cases}$$

Отметим, что в последней системе скалярных условий только два уравнения из трех независимые, то есть любое из этих уравнений является следствием двух других.

Действительно, умножив первое уравнение на a_x , второе на a_y и третье на a_z и сложив затем полученные равенства почленно, приходим к тождеству вида $0 = 0$, поскольку числа a_x , a_y и a_z не равны нулю одновременно, а

$$\begin{cases} b_x = a_y z_0 - a_z y_0, \\ b_y = a_z x_0 - a_x z_0, \\ b_z = a_x y_0 - a_y x_0. \end{cases}$$

Наконец, покажем, что расстояние h в пространстве от некоторой точки с радиусом-вектором \vec{R} до прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$ можно найти, воспользовавшись свойством, что S – площадь параллелограмма, построенного на паре векторов, равна длине векторного произведения этих векторов. Из рис. 7 получаем формулу

$$h = \frac{S}{|\vec{a}|} = \frac{|[\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{a}]|}{|\vec{a}|}.$$

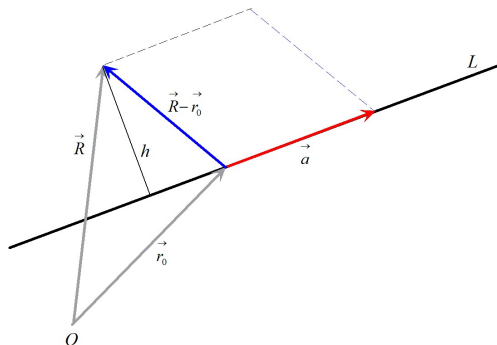


Рис. 7. К вычислению расстояния от точки до прямой в пространстве