Прямая и плоскость

Как было показано, с помощью системы координат можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством *точек пространства* и множеством их *радиусов-векторов*. Это в свою очередь позволяет свести исследование свойств линий, фигур, поверхностей или тел к изучению множеств радиусов-векторов точек, образующих рассматриваемые геометрические объекты.

Тема 4 посвящена методам описания и исследования свойств простейших геометрических объектов — *прямой* и *плоскости* – средствами векторной алгебры.

В главах 3, 4 и 5 настоящего пособия координата точки по оси $\left\{ O, \vec{g}_1 \right\}$ будет обозначаться через x, координата по оси $\left\{ O, \vec{g}_2 \right\}$ — через y и координата по оси $\left\{ O, \vec{g}_3 \right\}$ — через z. Кроме того, будут использоваться общепринятые форматы записи уравнений.

Прямая на плоскости

Пусть на плоскости дана система координат $\left\{ O, \vec{g}_1, \vec{g}_2 \right\}$ и задана прямая L, проходящая через точку, имеющую радиус-вектор $\vec{r}_0$, с лежащим на ней *ненулевым* вектором $\vec{a}$.

Определение 3.1.1	Ненулевой вектор $\vec{a}$ называется *направляющим вектором* прямой L.

Теорема 3.1.1 **Множество радиусов-векторов точек прямой L представимо в виде $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau\vec{a}$, где τ – произвольный вещественный параметр.**

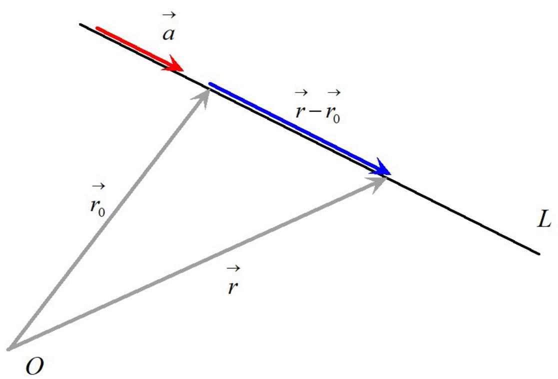

Рис. 1. К доказательству теоремы 3.1.1

Доказательство.

Пусть $\vec{r}$ — некоторая точка на прямой L . Ненулевой вектор $\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{r}-\vec{r}_0$. Поэтому справедливо равенство $\vec{r}-\vec{r}_0=\tau\vec{a}$ (рис. 1).
Тогда
$$\vec{r}=\vec{r}_0+\tau\vec{a} \qquad \forall\tau\in(-\infty,+\infty)\,.$$

Теорема доказана.

Найдем теперь координатное представление множества радиусов-векторов точек прямой L.

Пусть $\left\|\vec{r}\right\|_g = \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\|$, $\left\|\vec{r}_0\right\|_g = \left\| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right\|$ и $\left\|\vec{a}\right\|_g = \left\| \begin{matrix} a_x \\ a_y \end{matrix} \right\|$, тогда будут справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.1.2 **Всякая прямая в любой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида**
$$Ax+By+C=0\,, \quad |A|+|B|>0\,.$$

Доказательство.

Уравнение $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau\vec{a}$ в силу леммы 1.4.1 означает, что векторы $\vec{r} - \vec{r}_0$ и $\vec{a}$ линейно зависимые.

Условие же линейной зависимости этих векторов в координатной форме имеет вид (теорема 1.4.2):

$$\det\left\|\begin{array}{cc} x - x_0 & y - y_0 \\ a_x & a_y \end{array}\right\| = 0$$

или $a_y(x - x_0) - a_x(y - y_0) = 0$.

Если ввести обозначения

$$A = a_y, \quad B = -a_x, \quad C = -a_y x_0 + a_x y_0 ,$$

то мы получим $Ax + By + C = 0$. При этом неравенство $|A| + |B| > 0$ будет следовать из $\vec{a} \neq \vec{o} \Longleftrightarrow |a_x| + |a_y| > 0$.

Теорема доказана.

Теорема 3.1.3 **Всякое уравнение вида**

$$Ax + By + C = 0\,, \quad |A| + |B| > 0$$

в любой декартовой системе координат задает некоторую прямую.

Доказательство.

Пусть дано уравнение вида

$$Ax + By + C = 0\,, \quad |A| + |B| > 0\,.$$

В этом случае всегда возможно подобрать пару чисел x_0 и y_0 так, чтобы $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Почленное вычитание этого равенства из исходного дает при $a_x = -B, \quad a_y = A$

$$a_y(x - x_0) - a_x(y - y_0) = 0\,.$$

Возьмем точку

$$\left\|\vec{r}_0\right\|_g = \left\| \begin{array}{c} x_0 \\ y_0 \end{array} \right\| \quad \text{и вектор} \quad \left\|\vec{a}\right\|_g = \left\| \begin{array}{c} a_x \\ a_y \end{array} \right\|.$$

Из теоремы 3.1.2 следует, что прямая, проходящая через точку $\vec{r}_0$ в направлении вектора $\vec{a} \neq \vec{o}$, имеет уравнение вида

$$a_y(x - x_0) - a_x(y - y_0) = 0\,.$$

Следовательно, уравнение, указанное в формулировке теоремы, есть уравнение прямой.

Теорема доказана.

Замечание: из теорем 3.1.2–3.1.3 следует, что каждое линейное уравнение в декартовой системе координат на плоскости задает некоторую конкретную прямую, но, с другой стороны, конкретная прямая на плоскости может быть задана *бесчисленным множеством* линейных уравнений, и естественно возникает вопрос: при каких условиях два разных линейных уравнения задают одну и ту же прямую? Ответ на этот вопрос дает

Теорема 3.1.4 **Для того чтобы уравнения**

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0\,, \quad |A_1| + |B_1| > 0 \quad \textbf{и}$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0\,, \quad |A_2| + |B_2| > 0$$

являлись уравнениями одной и той же прямой, необходимо и достаточно, чтобы $\exists\lambda \neq 0$ такое, что

$$\left[\begin{array}{lll} A_1 = \lambda A_2 & B_1 = \lambda B_2 & C_1 = \lambda C_2, \\ A_2 = \lambda A_1 & B_2 = \lambda B_1 & C_2 = \lambda C_1. \end{array}\right.$$

Доказательство достаточности.

Пусть коэффициенты уравнений пропорциональны, и имеет место равенство $A_2x + B_2y + C_2 = 0\,.$
Тогда

$$0 = A_2x + B_2y + C_2 = \frac{1}{\lambda}(A_1x + B_1y + C_1)\ ,$$

но поскольку $\lambda \neq 0$, то $A_1x + B_1y + C_1 = 0$.

Аналогично из равенства $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ следует, что и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Доказательство необходимости.

Пусть уравнения

$$\begin{array}{ll} A_1x + B_1y + C_1 = 0\,, \quad |A_1| + |B_1| > 0 \quad \text{и} \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0\,, \quad |A_2| + |B_2| > 0 \end{array}$$

задают в некоторой декартовой системе координат одну и ту же прямую. Тогда их направляющие векторы коллинеарны, т.е. $\exists\lambda \neq 0$ такое, что $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$.

С другой стороны, из равносильности уравнений

$$\begin{array}{c} \lambda A_2x + \lambda B_2y + C_1 = 0\,, \quad \text{и} \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{array}$$

следует также, что и $C_1 = \lambda C_2$.

Теорема доказана.

Замечание: уравнение прямой не в любой системе координат является алгебраическим уравнением первой степени. Например, в *полярной* системе координат оно может иметь вид $\rho = P\sec(\varphi + \varphi_0)$.

Способы задания прямой на плоскости

В общей декартовой системе координат $\left\{ O, \vec{g}_1, \vec{g}_2 \right\}$ существуют различные формы задания прямой на плоскости. Рассмотрим основные из них.

1°. Уравнение прямой, проходящей через две несовпадающие точки $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$: с $\left\|\vec{r}_1\right\|_g = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \right\|$ и $\left\|\vec{r}_2\right\|_g = \left\| \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix} \right\|$

Поскольку в данном случае в качестве направляющего вектора $\vec{a}$ можно взять $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, а в качестве $\vec{r}_0$ — вектор $\vec{r}_1$, то указанная в теореме 3.1.1 параметрическая форма уравнения прямой примет вид $\vec{r} = \vec{r}_1 + \tau\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)$ или

$$\vec{r} = (1-\tau)\vec{r}_1 + \tau\vec{r}_2 \qquad \forall\tau \in (-\infty, +\infty)\,.$$

Координатный вид полученного векторного уравнения прямой на плоскости можно найти, исключив параметр τ.

В результате получится один из трех следующих случаев:

$$\left[\begin{array}{rclll} \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} & = & \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}, & & \text{если} \left\{ \begin{array}{l} x_1 \neq x_2\,, \\ y_1 \neq y_2\,, \end{array} \right. \\ y & = & y_1 & \forall x, & \text{если } y_1 = y_2, \\ x & = & x_1 & \forall y, & \text{если } x_1 = x_2. \end{array}\right.$$

Проверьте самостоятельно, что эти три случая могут быть описаны одним условием:

$$\det \left\| \begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{array} \right\| = 0$$

и что справедливо

Следствие 3.2.1 **Три точки** $\vec{r}_1 = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ y_1 \end{array} \right\|, \vec{r}_2 = \left\| \begin{array}{c} x_2 \\ y_2 \end{array} \right\|$ **и** $\vec{r}_3 = \left\| \begin{array}{c} x_3 \\ y_3 \end{array} \right\|$ **лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их координаты связаны соотношением**

$$\det \left\| \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{array} \right\| = 0\,.$$

2°. Векторное уравнение прямой, проходящей через точку $\vec{r}_0 = \left\| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right\|$, перпендикулярно заданному ненулевому вектору $\vec{n} = \left\| \begin{matrix} n_x \\ n_y \end{matrix} \right\|$.

Здесь в качестве направляющего вектора $\vec{a}$ также можно взять $\vec{r} - \vec{r}_0 = \left\| \begin{matrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{matrix} \right\|$, где радиус-вектор произвольной точки на прямой L (см. рис. 2) $\vec{r} = \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\|$.

Этот направляющий вектор ортогонален любому ненулевому вектору $\vec{n}$, который перпендикулярен L, и потому уравнение прямой может быть записано в виде

$$(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \qquad \text{или же} \qquad (\vec{n}, \vec{r}) = d\,.$$

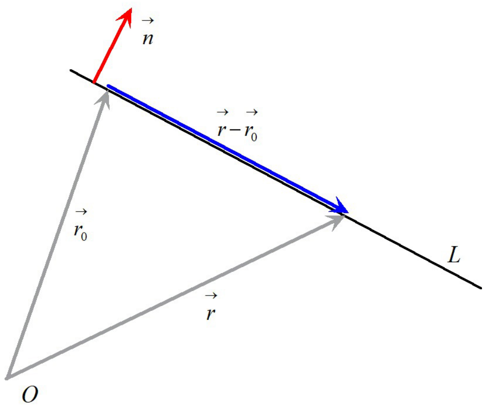

Рис. 2. К выводу уравнения $(\vec{n}, \vec{r}) = d$

В последней формуле значение числового параметра d определяется по $\vec{r}_0$ и $\vec{n}$ из равенства $d = (\vec{n}, \vec{r}_0)$.

При обратном переходе в качестве вектора $\vec{r}_0$ можно использовать вектор $\vec{r}_0 = \dfrac{d}{(\vec{n},\ \vec{n})}\vec{n}$. Справедливость последней формулы проверьте самостоятельно.

Координатный вид данной формы уравнения прямой на плоскости будет зависеть от выбранной декартовой системы координат. Например, в *ортонормированной* системе координат $\left\{ O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2 \right\}$ уравнения

$$(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \qquad \text{или} \qquad (\vec{n}, \vec{r}) = d$$

будут иметь соответственно вид

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) = 0$$

или $\quad n_x x + n_y y = d, \quad$ где $\quad d = n_x x_0 + n_y y_0$.

Сравнивая последнюю запись с общим видом уравнения прямой $Ax + By + C = 0$, приходим к заключению, что в *ортонормированной* системе координат вектор $\vec{n}$, для которого $\left\|\vec{n}\right\|_e = \left\|\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\|$, будет ортогонален этой прямой.

`Определение 3.2.1`	Ненулевой вектор $\vec{n}$ называется *нормальным* вектором прямой L.

Замечания о линейных неравенствах

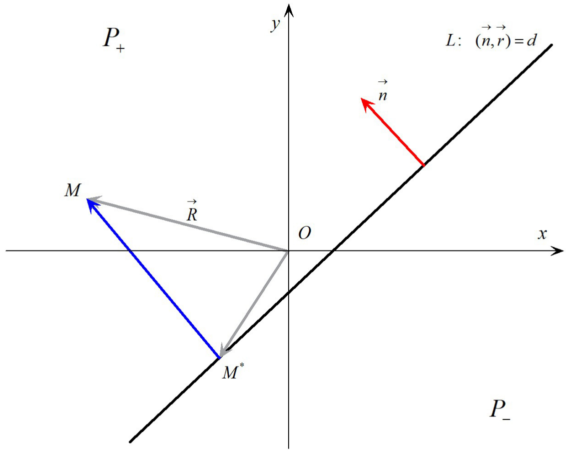

Рис. 3. Геометрическая интерпретация линейного неравенства

Аналогично тому, как линейное уравнение задает на плоскости прямую, линейное неравенство

$$Ax + By + C > 0, \quad |A| + |B| > 0$$

определяет часть плоскости (множество точек, координаты которых x и y удовлетворяют данному неравенству), ограниченную прямой

$$Ax + By + C = 0, \quad |A| + |B| > 0\,.$$

Покажем справедливость данного утверждения для случая, когда прямая $L: \quad (\vec{n},\vec{r}) = d$ выделяет на координатной плоскости P два множества точек, обозначаемых как P_+ и P_- (см. рис. 3), согласно следующему определению.

Определение 3.2.2	Будем говорить, что точка M с радиусом-вектором $\vec{R}$ принадлежит полуплоскости P_+ (соответственно P_-) , если существует $\lambda > 0$ (соответственно $\lambda < 0$) такое, что $\overrightarrow{M^*M} = \lambda\vec{n},$ где точка M^* есть ортогональная проекция точки M на прямую L .

Имеет место

Теорема 3.2.1 **Для того чтобы $M \in P_+$, необходимо и достаточно выполнения неравенства** $(\vec{n}, \vec{R}) > d$.

Доказательство необходимости.

Пусть $M \in P_+$, то есть $\exists \lambda > 0 : \ \ \vec{M^*M} = \lambda \vec{n}$. Оценим величину $(\vec{n}, \vec{R})$.
Поскольку $M^* \in L$, то $(\vec{n}, \vec{OM^*}) = d$. Тогда

$$(\vec{n}, \vec{R}) = (\vec{n}, \vec{OM^*} + \vec{M^*M}) = d + \lambda(\vec{n}, \vec{n}) > d$$

в силу положительности λ.

Доказательство достаточности.

Пусть $(\vec{n}, \vec{R}) > d$ и $\vec{M^*M} = \lambda \vec{n}$. Тогда из $(\vec{n}, \vec{OM^*}) = d$ получаем

$$(\vec{n}, \vec{R}) = (\vec{n}, \vec{OM^*} + \vec{M^*M}) = (\vec{n}, \vec{OM^*}) + (\vec{n}, \vec{M^*M}) =$$

$$= d + \lambda(\vec{n}, \vec{n}) > d \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(\vec{n}, \vec{n}) > 0\,.$$

Поскольку $\vec{n} \neq \vec{o}$, то $\lambda > 0$ и, значит, $M \in P_+$

Теорема доказана.

Рассмотренные способы координатно-векторного описания точек и прямых на плоскости позволяют решать достаточно сложные геометрические задачи, что иллюстрирует

Задача 3.2.1 *Дана декартова система координат на плоскости* $\{ O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ *и прямая* L *с уравнением* $(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$. *Найти расстояние до этой прямой от точки, радиус-вектор которой* $\vec{R}$ *имеет координатное представление* $\left\|\vec{R}\right\|_g = \left\| \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} \right\|$.

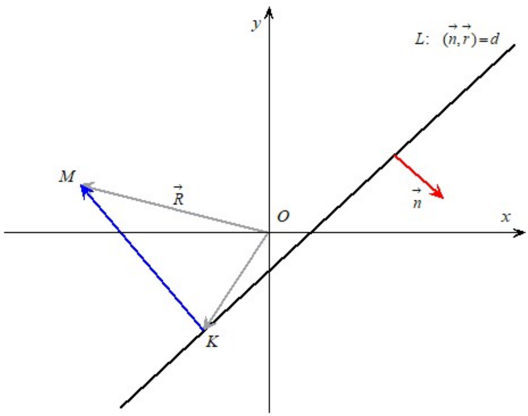

Рис. 4. К решению задачи 3.2.1

`Решение.` Пусть $\vec{KM} = \lambda\vec{n}$. Тогда $\vec{R} = \vec{OK} + \lambda\vec{n}$ (см. рис. 3.4). Искомое расстояние в этом случае есть длина вектора $\vec{KM}$.

Точка K принадлежит L, поэтому $(\vec{n}, \vec{OK} - \vec{r}_0) = 0$ или $(\vec{n}, \vec{R} - \lambda\vec{n} - \vec{r}_0) = 0$. Откуда $\lambda = \dfrac{(\vec{n}, \vec{R} - \vec{r}_0)}{\left|\vec{n}\right|^2}$.

Для искомого расстояния имеем

$$\left|\vec{KM}\right| = |\lambda| \left|\vec{n}\right| = \frac{\left|(\vec{n}, \vec{R} - \vec{r}_0)\right|}{\left|\vec{n}\right|}.$$

В заключение найдем ответ в координатной форме. Пусть система координат ортонормированная. Тогда для уравнения $Ax+By+C = 0,\ \ |A|+|B| > 0$, как было показано, вектор $\vec{n} = \left\|\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\|$ перпендикулярен прямой L. Поэтому

$$\left|\vec{KM}\right| = \frac{|A(X - x_0) + B(Y - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Принимая во внимание, что точка $\vec{r}_0$ лежит на прямой L и, следовательно, $Ax_0 + By_0 + C = 0$, окончательный ответ можно записать в виде

$$\left|\vec{KM}\right| = \frac{|AX + BY + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

`Решение получено.`

Координатный метод позволяет строить аналитические описания не только отдельных точек и прямых, но и более сложных объектов.

Примером может служить описание треугольника с вершинами в точках $A(6;0)$, $B(3;3)$ и $C(3;-3)$, являющееся системой трех линейных неравенств

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -x & + & 3y & \leq & 6\,, \\ 6x & - & y & \leq & 15\,, \\ 3x & + & 8y & \geq & -18\,. \end{array}\right.$$

Чтобы построить эту систему, вначале необходимо найти уравнения сторон треугольника ABC, воспользовавшись, например, результатом пункта 1° этого параграфа.

Затем, применив определение 3.2.2, подберем подходящие знаки неравенств. Для этого воспользуемся тем, что при циклическом обходе по вершинам треугольника против часовой стрелки его внутренние точки должны принадлежать множествам P_- для всех трех границ одновременно.

Наконец, учтем, что неравенства системы нестрогие, поскольку граничные точки должны принадлежать треугольнику.

Другим, полезным для практики, примером такого множества является пучок прямых.

Определение 3.2.3	*Пучком прямых* на плоскости называется совокупность всех прямых, проходящих через некоторую заданную точку, именуемую *вершиной пучка*.

Теорема 3.2.2

Пусть точка, общая для всех прямых пучка, является точкой пересечения непараллельных прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогда

1) **для любой прямой пучка найдется пара не равных нулю одновременно чисел α и β, таких, что**

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

есть уравнение этой прямой;

2) **при любых, не равных нулю одновременно α и β, уравнение**

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

есть уравнение некоторой прямой данного пучка.

Доказательство.

1. Возьмем некоторую точку $\vec{r}^{\,*} = \left\| \begin{array}{c} x^* \\ y^* \end{array} \right\|$, не совпадающую с вершиной пучка, и примем в качестве параметров числа $\alpha = A_1x^* + B_1y^* + C_1$ и $\beta = -(A_2x^* + B_2y^* + C_2)$. Заметим, что при этом $|\alpha| + |\beta| > 0$, поскольку точка $\vec{r}^{\,*}$ не принадлежит данным прямым одновременно.

   Кроме того, прямая

$$(A_2x^* + B_2y^* + C_2)(A_1x + B_1y + C_1) +$$

$$+(A_1x^* + B_1y^* + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

   проходит как через точку $\vec{r}^{\,*}$, так и через вершину пучка и, следовательно, принадлежит пучку.

2. Пусть $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ — пара пересекающихся прямых из рассматриваемого пучка, тогда очевидно, что

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0\,.$$

   При этом уравнение

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2) = 0$$

   является уравнением прямой, поскольку из $|A_1| + |B_1| > 0$, $|A_2| + |B_2| > 0$ и $|\alpha| + |\beta| > 0$ следует, что

$$|\alpha A_1 + \beta A_2| + |\alpha B_1 + \beta B_2| > 0\,.$$

Действительно, допустим противное:

$$\begin{cases} \alpha A_1 + \beta A_2 = 0, \\ \alpha B_1 + \beta B_2 = 0. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ по построению имеют, по крайней мере, одну общую точку. Поэтому они либо совпадают, либо пересекаются. По теореме 3.1.4 они совпадают тогда и только тогда, когда существует $\lambda \neq 0$, для которого $A_1 = \lambda A_2$ и $B_1 = \lambda B_2$.

А последние два равенства по теореме 1.6.2 равносильны условию

$$\det \left\| \begin{matrix} A_1 & A_1 \\ B_2 & B_2 \end{matrix} \right\| = 0\,.$$

Но в рассматриваемом случае прямые пересекаются, поэтому $\det \left\| \begin{matrix} A_1 & A_1 \\ B_2 & B_2 \end{matrix} \right\| \neq 0$, и в силу теоремы 1.1.2 система линейных уравнений 3.2.1 может иметь лишь единственное решение.

С другой стороны, очевидно, что эта система имеет тривиальное решение $\alpha = \beta = 0$, что противоречит неравенству $|\alpha| + |\beta| > 0$. Следовательно,

$$|\alpha A_1 + \beta A_2| + |\alpha B_1 + \beta B_2| > 0\,.$$

Теорема доказана.

Определение 3.2.4	Уравнение $$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0\,,$$ где $\lvert\alpha\rvert + \lvert\beta\rvert > 0$, называется *уравнением пучка прямых на плоскости.*

Плоскость в пространстве

Пусть дана система координат $\left\{ O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3 \right\}$ и выбрана плоскость S, проходящая через точку имеющую радиус-вектор $\vec{r}_0$, и лежащими на S *неколлинеарными* векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

Определение 3.3.1	Неколлинеарные векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ называются *направляющими векторами* плоскости S.

Теорема 3.3.1 **Множество радиусов-векторов точек плоскости S представимо в виде $\vec{r} = \vec{r}_0 + \varphi\vec{p} + \theta\vec{q}$, где φ и θ — произвольные вещественные параметры.**

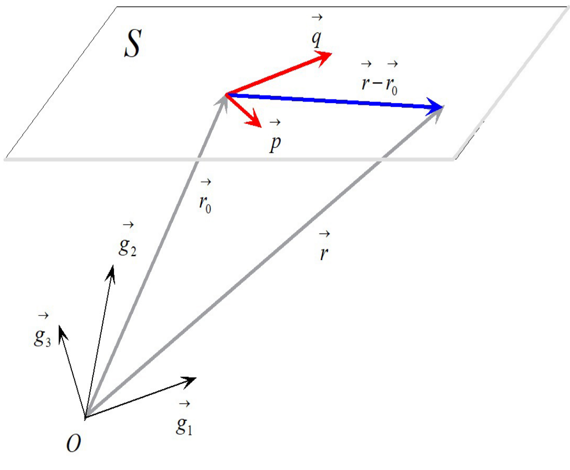

Рис. 5. К доказательству теоремы 3.3.1

Доказательство.

Пусть $\vec{r}$ — некоторая точка на плоскости S .

Тройка векторов $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}-\vec{r}_0$ очевидно компланарная. Поэтому вектор $\vec{r}-\vec{r}_0$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$:

$$\vec{r}-\vec{r}_0=\varphi\vec{p}+\theta\vec{q} \qquad \forall\varphi,\theta\in(-\infty,+\infty)\,.$$

И, следовательно, векторно-параметрическое уравнение плоскости можно записать в виде

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\varphi\vec{p}+\theta\vec{q} \qquad \forall\varphi,\theta\in(-\infty,+\infty)\,.$$

Теорема доказана.

Иными словами, каждая *упорядоченная* пара чисел φ и θ определяет некоторую точку плоскости S , а для каждой точки этой плоскости существует единственная упорядоченная пара чисел φ и θ, определяющая ее радиус-вектор.

Найдем теперь координатное представление множества радиусов-векторов точек плоскости S . Введем обозначения $\left\|\vec{r}\right\|_g = \left\|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right\|$, $\left\|\vec{r}_0\right\|_g = \left\|\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{matrix}\right\|$, $\left\|\vec{p}\right\|_g = \left\|\begin{matrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{matrix}\right\|$ и $\left\|\vec{q}\right\|_g = \left\|\begin{matrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{matrix}\right\|$, тогда будут справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.3.2 **Всякая плоскость в любой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида**

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \quad |A| + |B| + |C| > 0\,.$$

Доказательство.

Уравнение $\vec{r} = \vec{r}_0 + \varphi\vec{p} + \theta\vec{q}$, в силу леммы 1.4.1, означает, что три вектора $\vec{r} - \vec{r}_0$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ линейно зависимые.

Условие же линейной зависимости этих векторов в координатной форме имеет вид (теорема 1.4.3):

$$\det \begin{Vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{Vmatrix} = 0 . \qquad (3.3.1)$$

Тогда, разложив детерминант по первой строке, получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 ,$$

что в итоге дает $Ax + By + Cz + D = 0$.

Действительно, если ввести обозначения

$$A = \det \begin{Vmatrix} p_y & p_z \\ q_y & q_z \end{Vmatrix} , \qquad B = -\det \begin{Vmatrix} p_x & p_z \\ q_x & q_z \end{Vmatrix} ,$$

$$C = \det \begin{Vmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{Vmatrix}$$

и $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, то получается $Ax + By + Cz + D = 0$.

При этом неравенство $|A| + |B| + |C| > 0$ будет следовать из условия неколлинеарности векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$, записаного в форме, указанной в следствии 2.5.1.

Теорема доказана.

Теорема 3.3.3 **Всякое уравнение вида**

$$Ax + By + Cz + D = 0 , \qquad |A| + |B| + |C| > 0 ,$$

в любой декартовой системе координат есть уравнение некоторой плоскости.

Доказательство.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \quad |A| + |B| + |C| > 0\,,$$

при $C \neq 0$ может быть записано в виде

$$\det \begin{Vmatrix} x + \dfrac{DA}{A^2+B^2+C^2} & y + \dfrac{DB}{A^2+B^2+C^2} & z + \dfrac{DC}{A^2+B^2+C^2} \\ 0 & -C & B \\ C & 0 & -A \end{Vmatrix} = 0, \tag{3.3.2}$$

а при $C = 0$ в виде

$$\det \begin{Vmatrix} x + \dfrac{DA}{A^2+B^2} & y + \dfrac{DB}{A^2+B^2} & z + 0 \\ -B & A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = 0. \tag{3.3.3}$$

Тогда в любой декартовой системе координат в качестве векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ при $C \neq 0$ можно взять

$$\left\|\vec{p}\right\|_g = \begin{Vmatrix} 0 \\ -C \\ B \end{Vmatrix} \qquad \text{и} \qquad \left\|\vec{q}\right\|_g = \begin{Vmatrix} C \\ 0 \\ -A \end{Vmatrix},$$

а в случае $C = 0$

$$\left\|\vec{p}\right\|_g = \begin{Vmatrix} -B \\ A \\ 0 \end{Vmatrix} \qquad \text{и} \qquad \left\|\vec{q}\right\|_g = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix},$$

поскольку из сопоставления уравнений (3.3.2) и (3.3.3) с формулой (3.3.1) следует, что как (3.3.2), так и (3.3.3) суть уравнения плоскости, проходящей через заданную точку параллельно двум неколлинеарным векторам.

Теорема доказана.

`Замечание:` уравнение (3.3.1) может быть также получено, если условие компланарности векторов $\vec{r} - \vec{r}_0$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ записать в виде равенства нулю их смешанного произведения:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{p}, \vec{q}) = 0\,.$$

`Задача 3.3.1` *В системе координат* $\{\,O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ *составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные, не лежащие на одной прямой точки:*

$$\|\vec{r_1}\|_g = \left\|\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{matrix}\right\|, \quad \|\vec{r_2}\|_g = \left\|\begin{matrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{matrix}\right\|, \quad \|\vec{r_3}\|_g = \left\|\begin{matrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{matrix}\right\|,$$

`Решение.` Из условия задачи следует, что неколлинеарные векторы $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ и $\vec{r}_3 - \vec{r}_1$ параллельны искомой плоскости. Кроме того, для радиуса-вектора любой принадлежащей этой плоскости точки $\vec{r}$ вектор $\vec{r} - \vec{r}_1$ также будет ей параллелен.

Из условия компланарности тройки векторов

$$\vec{r} - \vec{r}_1, \quad \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \text{и} \quad \vec{r}_3 - \vec{r}_1$$

получаем уравнение искомой плоскости, которое будет иметь вид $(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$ или же в координатной форме (согласно § 2.7):

$$\det \left\| \begin{matrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{matrix} \right\| (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3) = 0\,.$$

Наконец, учитывая, что смешанное произведение тройки линейно независимых (поскольку они суть базисные) векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ не равно нулю, то окончательно получаем искомое уравнение (в *любой* декартовой системе координат):

$$\det \left\| \begin{matrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{matrix} \right\| = 0\,.$$

`Решение получено.`

Задача 3.3.2 *В системе координат* $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ *составить уравнение плоскости, проходящей через заданную точку* $\left\| \vec{r}_0 \right\|_g = \left\| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{matrix} \right\|$ *перпендикулярно ненулевому вектору* $\left\| \vec{n} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{matrix} \right\|$.

Решение. По условию задачи для любой точки, принадлежащей этой плоскости, с радиусом-вектором $\vec{r}$ векторы $\vec{n}$ и $\vec{r} - \vec{r}_0$ будут ортогональны, т.е. $(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$.

В *ортонормированной* системе $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ это условие имеет координатный вид

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0$$

или если обозначить $A = n_x$, $B = n_y$, $C = n_z$ и соответственно $D = -n_x x_0 - n_y y_0 - n_z z_0$, то получаем знакомое равенство $Ax + By + Cz + D = 0$.

Решение получено.

Определение 3.3.2	Ненулевой вектор $\vec{n}$ называется *нормальным* вектором плоскости $(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$.

Определение 3.3.3	Вектор $\left\Vert \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \right\Vert$ называется *главным* вектором плоскости $Ax+By+Cz+D=0\,, \quad \lvert A\rvert+\lvert B\rvert+\lvert C\rvert>0\,.$

В *ортонормированной* системе координат главный вектор плоскости является также и ее нормальным вектором.

Задача 3.3.3 *В ортонормированной системе координат* $\{\,O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *найти расстояние от точки* M *с радиусом-вектором* $\left\Vert\vec{R}\right\Vert_e = \left\Vert \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \right\Vert$ *до плоскости* $(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$.

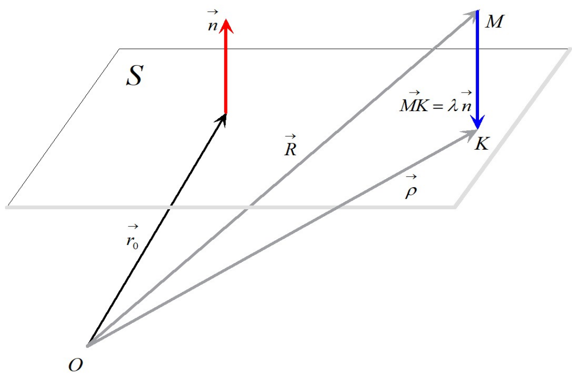

Рис. 6. К решению задачи 3.3.3

Решение. Пусть K есть ортогональная проекция точки M на данную плоскость, тогда $\vec{MK} = \lambda\vec{n}$ и $\vec{\rho} = \vec{R} + \lambda\vec{n}_0$. Точка K принадлежит данной плоскости, поэтому имеет место соотношение $(\vec{n}, \vec{R} + \lambda\vec{n} - \vec{r}_0) = 0$, из которого получаем $\lambda = -\dfrac{(\vec{n}, \vec{R} - \vec{r}_0)}{|\vec{n}|^2}$. Тогда искомое расстояние будет равно

$$|\vec{MK}| = \left|\frac{(\vec{n}, \vec{R} - \vec{r}_0)}{|\vec{n}|}\right| = \frac{\left|(\vec{n}, \vec{R} - \vec{r}_0)\right|}{|\vec{n}|}.$$

В *ортонормированной* системе вектор $\vec{n} = \left\|\begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}\right\|^{\mathrm{T}}$ — нормальный вектор плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Откуда $|\vec{MK}| = \dfrac{|A(X - x_0) + B(Y - y_0) + C(Z - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Точка $\vec{r}_0 \in S$, следовательно, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Поэтому ответ задачи можно записать так:

$$|\vec{MK}| = \frac{|\ AX + BY + CZ + D\ |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Решение получено.

Теорема 3.3.4 **Для того чтобы плоскости**

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\,, \qquad |A_1| + |B_1| + |C_1| > 0\,,$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\,, \qquad |A_2| + |B_2| + |C_2| > 0\,,$$

были параллельны или совпадали, необходимо и достаточно, чтобы их главные векторы были коллинеарны.

Доказательство.

Докажем достаточность.

Если главные векторы плоскостей коллинеарны, то $\exists \lambda \neq 0$ такое, что $A_1 = \lambda A_2,\ \ B_1 = \lambda B_2,\ \ C_1 = \lambda C_2$.

Тогда система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

может быть записана в виде

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + \ \ \ D_1 = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + \lambda D_2 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы следует, что при $D_1 \neq \lambda D_2$ общих точек у рассматриваемых плоскостей нет, а при $D_1 = \lambda D_2$ все точки общие. Таким образом, достаточность доказана.

Теперь докажем необходимость.

Пусть плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\,, \quad |A_1| + |B_1| + |C_1| > 0\,. \quad \text{и}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\,, \quad |A_2| + |B_2| + |C_2| > 0$$

параллельны. Тогда они должны пересекать каждую из координатных плоскостей по параллельным прямым.

Для определенности будем считать, что это плоскости, для которых $x = 0$ и $z = 0$. Линии пересечения с первой из этих координатных плоскостей будут задаваться системами уравнений

$$\begin{cases} x = 0, \\ B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 0, \\ B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Параллельность этих прямых означает, что $\exists\lambda \neq 0$ такое, что

$$B_1 = \lambda B_2, \ \ C_1 = \lambda C_2.$$

Для случая $z = 0$ системы линейных уравнений, определяющие линии пересечения, имеют аналогичный вид:

$$\begin{cases} z = 0, \\ A_1 y + B_1 y + D_1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = 0, \\ A_2 x + B_2 y + D_2 = 0. \end{cases}$$

Теперь из условия параллельности секущих плоскостей и полученного ранее равенства $B_1 = \lambda B_2$ находим, что также и $A_1 = \lambda A_2$.

`Теорема доказана.`

Следствие 3.3.2 **Для того чтобы уравнения**

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\,, \qquad |A_1| + |B_1| + |C_1| > 0\,,$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\,, \qquad |A_2| + |B_2| + |C_2| > 0\,,$$

были уравнениями одной и той же плоскости, необходимо и достаточно, чтобы $\exists\lambda \neq 0$ **такое, что**

$$A_1 = \lambda A_2,\;\; B_1 = \lambda B_2,\;\; C_1 = \lambda C_2,\;\; D_1 = \lambda D_2.$$

Определение 3.3.4	*Пучком плоскостей* в пространстве называется совокупность всех плоскостей, проходящих через данную прямую.

Определение 3.3.5	*Уравнением пучка плоскостей*, проходящих через прямую, определяемую пересечением пары непараллельных плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\,,\quad \lvert A_1\rvert + \lvert B_1\rvert + \lvert C_1\rvert > 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\,,\quad \lvert A_2\rvert + \lvert B_2\rvert + \lvert C_2\rvert > 0\,,$ называется уравнение вида $\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2) = 0\,,$ где $\lvert\alpha\rvert + \lvert\beta\rvert > 0\,.$

Определение 3.3.6	*Связкой плоскостей* в пространстве называется совокупность всех плоскостей, проходящих через данную точку.

Способы задания прямой в пространстве

Существуют различные способы задания прямой в пространстве в декартовой системе координат $\left\{ O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3 \right\}$.

1°. Уравнение прямой в пространстве в векторной параметрической форме

Возьмем произвольную точку с радиусом-вектором $\vec{r} = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}$, принадлежащую прямой L, имеющей ненулевой направляющий вектор $\vec{a} = \begin{Vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Vmatrix}$ и проходящей через заданную точку с радиусом-вектором $\vec{r}_0 = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Vmatrix}$.

Тогда из коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{r} - \vec{r}_0$ следует, что уравнение прямой имеет вид

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau\vec{a} \qquad \forall\tau \in (-\infty, +\infty)\,.$$

См. рис. 1.

2°. Уравнение прямой в канонической форме

Рассмотрим координатную запись уравнения $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau\vec{a}$:

$$\begin{cases} x = x_0 + \tau a_x, \\ y = y_0 + \tau a_y, \\ z = z_0 + \tau a_z. \end{cases}$$

Если в этой системе уравнений исключить параметр τ, то при $a_x a_y a_z \neq 0$ получается так называемое *каноническое уравнение прямой*:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z},$$

хотя здесь правильнее говорить о *системе уравнений.*

Случай $a_x a_y a_z = 0$ рассматривается аналогично планометрическому.

3°. Уравнение прямой, проходящей через две несовпадающие точки $\vec{r}_1$, и $\vec{r}_2$ с $\left\|\vec{r}_1\right\|_g = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{matrix} \right\|$ и $\left\|\vec{r}_2\right\|_g = \left\| \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{matrix} \right\|$

Поскольку в данном случае в качестве направляющего вектора $\vec{a}$ можно взять $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, а в качестве $\vec{r}_0$ — вектор $\vec{r}_1$, то векторная параметрическая форма уравнения прямой L примет вид $\vec{r} = \vec{r}_1 + \tau\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)$ или

$$\vec{r} = (1-\tau)\vec{r}_1 + \tau\vec{r}_2 \quad \forall\tau \in (-\infty, +\infty)\,.$$

Координатный вид полученного векторного уравнения прямой в пространстве можно найти, исключив параметр τ.

В результате получится система вида

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\,.$$

4°. Уравнение прямой в пространстве в 1-й векторной форме

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей с неколлинеарными нормальными векторами, т.е. плоскостей заданных уравнениями $(\vec{n}_1, \vec{r}) = d_1$ и $(\vec{n}_2, \vec{r}) = d_2$, т.е. системой

$$\begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{r}) = d_1, \\ (\vec{n}_2, \vec{r}) = d_2, \end{cases}$$

где векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ линейно независимые, $\vec{r}$ — радиус-вектор произвольной точки на прямой L , а d_1 и d_2 — некоторые известные числа. Или же, если дан $\vec{r}_0$ — радиус-вектор точки, через которую проходит прямая, то радиус-вектор любой точки этой прямой удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0, \\ (\vec{n}_2, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0. \end{cases}$$

Наконец, в координатной форме это будет система линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

5°. Уравнение прямой в пространстве во 2-й векторной форме

Прямая в пространстве может быть задана при помощи условия *коллинеарности* векторов $\vec{a}$ и $\vec{r}-\vec{r}_0$ в виде уравнения $[\vec{a},\vec{r}-\vec{r}_0]=\vec{o}$. Или же $[\vec{a},\vec{r}]=\vec{b}$, где $\vec{b}=[\vec{a},\vec{r}_0]$.

В ортонормированной системе координат уравнение этой прямой принимает вид векторного равенства

$$\det\begin{Vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_x & a_y & a_z \\ x & y & z \end{Vmatrix}=\vec{b},$$

которое в координатной форме будет

$$\left\{\begin{array}{l} a_y z - a_z y = b_x, \\ a_z x - a_x z = b_y, \\ a_x y - a_y x = b_z. \end{array}\right.$$

Отметим, что в последней системе скалярных условий только два уравнения из трех независимые, то есть любое из этих уравнений является следствием двух других.

Действительно, умножив первое уравнение на a_x, второе на a_y и третье на a_z и сложив затем полученные равенства почленно, приходим к тождеству вида $0=0$, поскольку числа a_x, a_y и a_z не равны нулю одновременно, а $\left\{\begin{array}{l} b_x = a_y z_0 - a_z y_0, \\ b_y = a_z x_0 - a_x z_0, \\ b_z = a_x y_0 - a_y x_0. \end{array}\right.$

Наконец, покажем, что расстояние h в пространстве от некоторой точки с радиусом-вектором $\vec{R}$ до прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau\vec{a}$ можно найти, воспользовавшись свойством, что S – площадь параллелограмма, построенного на паре векторов, равна длине векторного произведения этих векторов. Из рис. 7 получаем формулу

$$h = \frac{S}{|\vec{a}|} = \frac{\left|[\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{a}]\right|}{|\vec{a}|}.$$

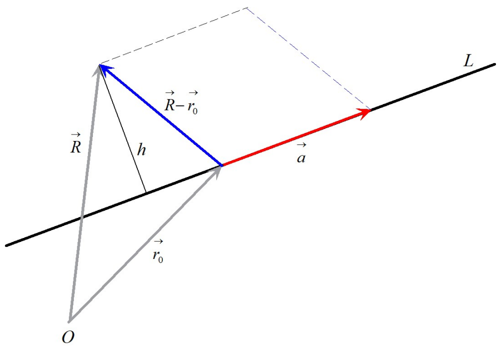

Рис. 7. К вычислению расстояния от точки до прямой в пространстве