

Линии на плоскости и в пространстве

Пусть дана декартова система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ на плоскости и числовое множество Ω , являющееся промежутком (возможно, бесконечным) вещественной оси.

Определение 4.1.1

Будем говорить, что на плоскости задана *параметрически линия* L вектор-функцией $\vec{r} = \vec{F}(\tau)$ (или в координатной форме

$$\|\vec{r}\|_g = \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} F_x(\tau) \\ F_y(\tau) \end{matrix} \right\|,$$

где $F_x(\tau), F_y(\tau)$ — непрерывные, скалярные функции аргумента $\tau \in \Omega$), если

- 1) $\forall \tau_0 \in \Omega$ точка $\vec{r}_0 = \vec{F}(\tau_0)$ лежит на L ;
- 2) для любой точки \vec{r}_0 , лежащей на L , $\exists \tau_0 \in \Omega$ такое, что выполнено равенство $\vec{r}_0 = \vec{F}(\tau_0)$.

Иногда линия на плоскости задается в виде уравнения $G(x, y) = 0$, которое получается при исключении параметра τ из системы уравнений

$$\begin{cases} x = F_x(\tau), \\ y = F_y(\tau) \end{cases} \quad \tau \in \Omega.$$

Пример
4.1.1.1

- 1) Прямая линия, например, задается вектор-функцией $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$, где \vec{a} — направляющий вектор, а \vec{r}_0 — радиус-вектор одной из точек этой прямой. Скалярная форма задания прямой в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + \tau a_x, \\ y = y_0 + \tau a_y \end{cases} \quad \tau \in (-\infty, +\infty),$$

то есть

$$\begin{cases} F_x(\tau) = x_0 + \tau a_x, \\ F_y(\tau) = y_0 + \tau a_y \end{cases} \quad \tau \in (-\infty, +\infty),$$

или же $Ax + By + C = 0$, $|A| + |B| > 0$,
с $G(x, y) = Ax + By + C$.

- 2) В прямоугольной система координат окружность радиусом R с центром в точке $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ параметрически может быть задана так:

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cos \tau, \\ y = y_0 + R \sin \tau \end{cases} \quad \tau \in [0, 2\pi),$$

то есть

$$\begin{cases} F_x(\tau) = x_0 + R \cos \tau, \\ F_y(\tau) = y_0 + R \sin \tau \end{cases} ,$$

или же $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$,
с $G(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2$.

Определение 4.1.2	Линия называется <i>алгебраической</i> , если ее уравнение в декартовой системе координат имеет вид $\sum_{k=0}^m \alpha_k x^{p_k} y^{q_k} = 0,$
	где p_k и q_k — целые неотрицательные числа, а числа α_k не равны нулю одновременно.
Определение 4.1.3	Число $N = \max_{k=[0,m]} \{p_k + q_k\}$ называется <i>порядком алгебраического уравнения</i> , указанного в определении 4.1.2, где максимум находится по всем k , для которых $\alpha_k \neq 0$. <i>Наименьший</i> из порядков алгебраических уравнений, задающих данную алгебраическую линию, называется <i>порядком алгебраической линии</i> .

Примеры алгебраических линий на плоскости различных порядков приведены в табл. 4.1.1.

Т а б л и ц а 4.1.1

Название	Уравнение	Порядок
Прямая	$Ax + By + C = 0, A + B > 0$	1
Квадратная парабола	$x - y^2 = 0$	2
Гипербола	$xy - 1 = 0$	2
«Декартов лист»	$x^3 + y^3 - 3xy = 0$	3

Теорема 4.1.1 **Порядок алгебраической линии не зависит от выбора декартовой системы координат.**

Доказательство.

Пусть алгебраическая линия L имеет в исходной («старой») системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ порядок N и уравнение $G(x, y) = 0$. Перейдем к «новой» системе координат $\{O', \vec{g}'_1, \vec{g}'_2\}$.

Формулы перехода, согласно соотношениям (1.8.2), имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = \sigma_{11}x'_1 + \sigma_{12}y'_2 + \beta_1, \\ x_2 = \sigma_{21}x'_1 + \sigma_{22}y'_2 + \beta_2, \end{cases}$$

поэтому уравнение линии L в «новой» системе координат будет

$$G(\sigma_{11}x'_1 + \sigma_{12}y'_2 + \beta_1, \sigma_{21}x'_1 + \sigma_{22}y'_2 + \beta_2) = 0,$$

порядок которого N' . Откуда в силу определения 4.1.2 следует, что $N \geq N'$, то есть при переходе к «новой» системе координат порядок алгебраической кривой повыситься не может.

Применяя аналогичные рассуждения для обратного перехода от системы координат $\{O', \vec{g}'_1, \vec{g}'_2\}$ к системе $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$, получим $N' \geq N$ и окончательно $N' = N$.

Теорема доказана.

Замечание 4.1.1. Фигуры на плоскости можно задавать, используя ограничения типа *неравенств*.

Пример 4.1.2 1) В прямоугольной системе координат набор условий

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y - 3 \leq 0 \end{cases}$$

задает прямоугольный треугольник, катеты которого лежат на осях координат и имеют длины, равные 3.

2) В *ортонормированной* системе координат неравенство вида $x^2 + y^2 - 4 \leq 0$ определяет круг радиусом 2 с центром в начале координат.

Рассмотрим теперь случай линии в пространстве. Пусть дана пространственная система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Определение
4.1.4

Будем говорить, что в пространстве задана *параметрически линия* L вектор-функцией $\vec{r} = \vec{F}(\tau)$ (или в координатной форме

$$\|\vec{r}\|_g = \left\| \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} F_x(\tau) \\ F_y(\tau) \\ F_z(\tau) \end{array} \right\|,$$

где $F_x(\tau), F_y(\tau), F_z(\tau)$ — непрерывные, скалярные функции аргумента $\tau \in \Omega$), если

- 1) $\forall \tau_0 \in \Omega$ точка $\vec{r}_0 = \vec{F}(\tau_0)$ лежит на L ;
- 2) для любой точки \vec{r}_0 , лежащей на L , $\exists \tau_0 \in \Omega$ такое, что выполнено равенство $\vec{r}_0 = \vec{F}(\tau_0)$.

Иногда линия в пространстве задается системой уравнений

$$\begin{cases} G(x, y, z) = 0, \\ H(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

которая получается исключением параметра τ из соотношений

$$\begin{cases} x = F_x(\tau), \\ y = F_y(\tau), \\ z = F_z(\tau), \end{cases} \quad \tau \in \Omega,$$

или же равносильным уравнением, например, вида

$$G^2(x, y, z) + H^2(x, y, z) = 0.$$

Пример
4.1.3

1) В декартовой системе координат алгебраическая линия второго порядка $x^2 + y^2 = 0 \quad \forall z$ является прямой в пространстве.

2) В ортонормированной системе координат *винтовая линия* (пространственная спираль) радиусом R и с шагом $2\pi a$ может быть задана в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = R \cos \tau, \\ y = R \sin \tau, \\ z = a\tau, \end{cases} \quad \tau \in [0, 2\pi),$$

или же системой
$$\begin{cases} x = R \cos \frac{z}{a}, \\ y = R \sin \frac{z}{a}. \end{cases}$$

Поверхности в пространстве

Пусть имеется пространственная система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и Ω — множество упорядоченных пар чисел $\{\varphi; \theta\}$, заданное условиями: $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $\gamma \leq \theta \leq \delta$.

Определение 4.2.1

Будем говорить, что в пространстве задана *параметрически поверхность* S вектор-функцией $\vec{r} = \vec{F}(\varphi, \theta)$ (или в координатной форме

$$\|\vec{r}\|_g = \left\| \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} F_x(\varphi, \theta) \\ F_y(\varphi, \theta) \\ F_z(\varphi, \theta) \end{array} \right\|,$$

где $F_x(\varphi, \theta)$, $F_y(\varphi, \theta)$, $F_z(\varphi, \theta)$ — непрерывные, скалярные функции, зависящие от двух переменных $\{\varphi, \theta\} \in \Omega$, если

- 1) для любой упорядоченной пары чисел $\{\varphi, \theta\} \in \Omega$ точка $\vec{r}_0 = \vec{F}(\varphi_0, \theta_0)$ лежит на поверхности S ;
- 2) для любой точки \vec{r}_0 , лежащей на S , существует пара чисел $\{\varphi_0, \theta_0 \in \Omega\}$ таких, что $\vec{r}_0 = \vec{F}(\varphi_0, \theta_0)$.

Иногда поверхность в пространстве задается в виде уравнения $G(x, y, z) = 0$, которое получается при исключении φ_0, θ_0 из системы уравнений

$$\begin{cases} x = F_x(\varphi_0, \theta_0), \\ y = F_y(\varphi_0, \theta_0), \\ z = F_z(\varphi_0, \theta_0), \end{cases} \quad \{\varphi_0, \theta_0\} \in \Omega.$$

Пример
4.2.1

1) Плоскость S в пространстве задается, например, вектор-функцией $\vec{r} = \vec{r}_0 + \varphi\vec{p} + \theta\vec{q}$, где \vec{p} и \vec{q} — направляющие (т.е. неколлинеарные и параллельные S) векторы, а \vec{r}_0 — радиус-вектор одной из точек этой плоскости. Скалярная форма задания плоскости в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + \varphi p_x + \theta q_x, \\ y = y_0 + \varphi p_y + \theta q_y, \\ z = z_0 + \varphi p_z + \theta q_z, \end{cases} \quad \varphi, \theta \in (-\infty, +\infty).$$

2) В прямоугольной системе координат сфера радиусом R с центром в точке $\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ параметрически может быть задана так:

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cos \varphi \sin \theta, \\ y = y_0 + R \sin \varphi \sin \theta, \\ z = z_0 + R \cos \theta, \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in [0, \pi],$$

или же уравнением $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.

Определение
4.2.2

Поверхность называется *алгебраической*, если ее уравнение в декартовой системе координат имеет вид

$$\sum_{k=0}^m \alpha_k x^{p_k} y^{q_k} z^{r_k} = 0,$$

где p_k, q_k и r_k — целые неотрицательные числа, а числа α_k не равны нулю одновременно.

Определение
4.2.3

Число $N = \max_{k=[0,m]} \{p_k + q_k + r_k\}$ называется *порядком алгебраического уравнения*, указанного в определении 4.2.2, где максимум находится по всем k , для которых $\alpha_k \neq 0$.

Наименьший из порядков алгебраических уравнений, задающих данную алгебраическую поверхность, называется *порядком алгебраической поверхности*.

Примеры алгебраических поверхностей различных порядков приведены в табл. 4.2.1.

Т а б л и ц а 4.2.1

Название	Уравнение	Порядок
Плоскость	$Ax + By + Cz + D = 0,$ $ A + B + C > 0$	1
Прямой круговой цилиндр	$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \forall z$	2
Сфера	$x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$	2
Гиперболический параболоид	$xy + z = 0$	2

Теорема **Порядок алгебраической поверхности не зависит от выбора декартовой системы координат.**
4.2.1

Доказательство.

Аналогично доказательству теоремы 4.1.1.

Теорема доказана.

Замечание 4.2.1. Тела в пространстве (равно как и фигуры на плоскости) можно задавать, используя условия типа *неравенств*.

Например, шар радиусом R с центром в начале координат может быть задан неравенством

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$$

Цилиндрические и конические поверхности

Пусть в пространстве заданы система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и некоторая линия $\vec{r} = \vec{F}(\varphi) \quad \varphi \in \Omega$, которую будем называть *направляющей*. Проведем через каждую точку направляющей линии прямую, называемую *образующей*, параллельную некоторому фиксированному ненулевому вектору \vec{a} .

Определение
4.3.1

Совокупность всех точек пространства, лежащих на образующих данного вида, называется *цилиндрической поверхностью*.

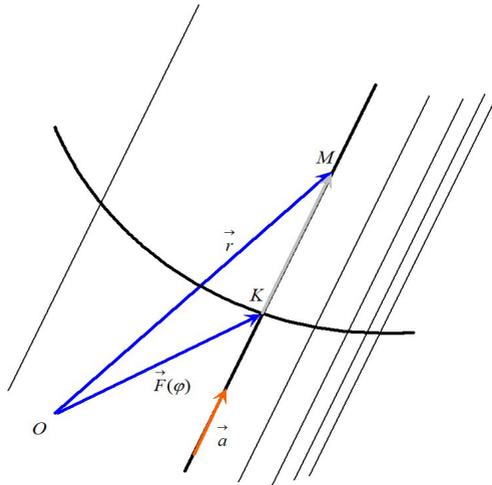


Рис. 1. Цилиндрическая поверхность

Составим уравнение цилиндрической поверхности в общем виде. Во введенных обозначениях (см. рис. 1):

$$\vec{r} = \vec{F}(\varphi) + K\vec{M},$$

а по определению цилиндрической поверхности $K\vec{M} = \theta\vec{a}$ и, следовательно, уравнение этой поверхности в векторной форме имеет вид

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = \vec{F}(\varphi) + \theta\vec{a} \quad \varphi \in \Omega, \theta \in (-\infty, +\infty).$$

Пусть в координатах $\left\| \vec{F}(\varphi) \right\|_g = \left\| \begin{array}{c} F_x(\varphi) \\ F_y(\varphi) \\ F_z(\varphi) \end{array} \right\|$ и $\left\| \vec{a} \right\|_g = \left\| \begin{array}{c} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array} \right\|$.

Тогда после исключения θ получаем

$$\frac{x - F_x(\varphi)}{a_x} = \frac{y - F_y(\varphi)}{a_y} = \frac{z - F_z(\varphi)}{a_z}.$$

Пример
4.3.1

Прямая круговая цилиндрическая поверхность, для которой в ортонормированной системе координат

— направляющей служит окружность радиуса 3, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси Oz , с центром в начале координат,

— а образующими являются прямые, перпендикулярные этой плоскости,

задается системой условий
$$\begin{cases} x = 3 \cos \varphi, \\ y = 3 \sin \varphi, \\ z = \theta, \end{cases}$$
 поскольку в рассматриваемом случае

$$\left\| \vec{F}(\varphi) \right\|_e = \left\| \begin{array}{c} 3 \cos \varphi \\ 3 \sin \varphi \\ 0 \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad \left\| \vec{a} \right\|_e = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\|.$$

Заметим, что если из данной системы исключить и параметр φ , то получится уравнение вида $x^2 + y^2 = 9 \quad \forall z$. Откуда следует, что данная поверхность алгебраическая, порядка $N = 2$.

Проведем через каждую точку *направляющей* линии образующую прямую иначе, чем в цилиндрическом случае: пусть образующая прямая проходит через некоторую, не принадлежащую направляющей линии, фиксированную точку A (называемую *вершиной*), радиус-вектор которой \vec{r}_0 .

Определение
4.3.2

Совокупность всех точек пространства, лежащих на образующих данного вида, называется *конической поверхностью*.

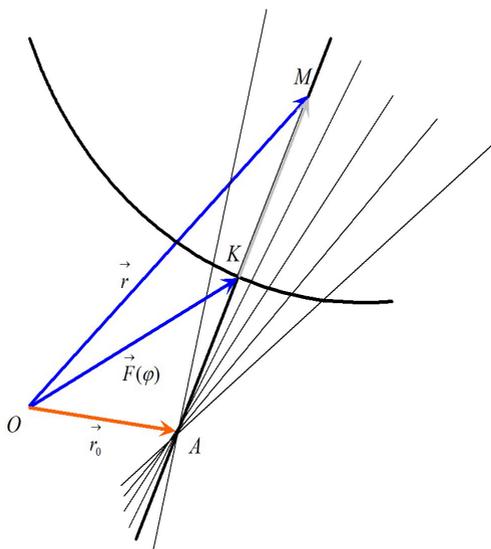


Рис. 2. Коническая поверхность

Составим уравнение конической поверхности в общем виде. Аналогично цилиндрическому случаю, во введенных обозначениях

$$\vec{r} = \vec{F}(\varphi) + K\vec{M}$$

(см. рис. 2), а по определению конической поверхности

$$K\vec{M} = \theta \cdot (\vec{r}_0 - \vec{F}(\varphi))$$

и, следовательно, уравнение этой поверхности в векторной форме имеет вид

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = \vec{F}(\varphi) + \theta (\vec{r}_0 - \vec{F}(\varphi)) \quad \varphi \in \Omega, \theta \in (-\infty, +\infty).$$

Пусть в координатах $\|\vec{F}(\varphi)\|_g = \left\| \begin{array}{c} F_x(\varphi) \\ F_y(\varphi) \\ F_y(\varphi) \end{array} \right\|$ и $\|\vec{r}_0\|_g = \left\| \begin{array}{c} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{array} \right\|$,

тогда после исключения θ получаем

$$\frac{x - F_x(\varphi)}{x_0 - F_x(\varphi)} = \frac{y - F_y(\varphi)}{y_0 - F_y(\varphi)} = \frac{z - F_z(\varphi)}{z_0 - F_z(\varphi)}.$$

Пример
4.3.2

Прямая круговая коническая поверхность, для которой в ортонормированной системе координат

- направляющей служит окружность радиусом 3, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси аппликат, с центром в начале координат,
- а образующими являются прямые, проходящие че-

рез вершину $\left\| \vec{r}_0 \right\|_e = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right\|$,

задается системой условий (см. пример 4.3.1):

$$\frac{x - 3 \cos \varphi}{-3 \cos \varphi} = \frac{y - 3 \sin \varphi}{-3 \sin \varphi} = \frac{z}{-1}, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Заметим, что если из полученных соотношений также исключить и параметр φ , то получится уравнение вида

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - (z + 1)^2 = 0.$$

Откуда следует, что данная поверхность алгебраическая, порядка $N = 2$.

Линии второго порядка на плоскости

Выбор базиса или системы координат является субъективным фактором, то есть он зависит от предпочтений пользователя координатного метода.

Поэтому в случае неоднозначности выбора системы координат возникает естественная потребность в методах, позволяющих сравнивать описания геометрических объектов, выполненные в разных системах. Примером подобного инструментария являются *формулы перехода*, рассмотренные в § 1.8.

Понятно, что использование формул перехода приводит к дополнительным затратам вычислительных ресурсов, и потому данное обстоятельство можно считать недостатком координатного метода.

Однако, с другой стороны, свободу выбора системы координат можно использовать для упрощения постановки задачи и/или метода решения.

Например, объем пирамиды $ABCD$, у которой известны координаты вершин и плоские углы при вершине D прямые, проще находится в системе координат $\{Dx'y'z'\}$, чем в системе $\{Axyz\}$ (см. рис. 3).

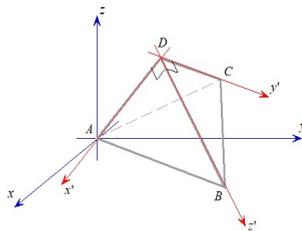


Рис. 3

В этом параграфе мы рассмотрим метод, позволяющий находить ортонормированную систему координат, в которой аналитическое описание геометрического объекта – плоской линии второго порядка – существенно упрощено по сравнению с общим случаем. Что, в свою очередь, позволяет облегчить исследование свойств такого объекта.

Пусть на плоскости дана ортонормированная система координат $\{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \}$ и некоторая линия L .

Определение
4.4.1

Если линия L является алгебраической линией второго порядка, то (в соответствии с определениями 4.1.2 и 4.1.3) ее уравнение в данной системе координат может иметь вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (4.4.1)$$

где числа A , B и C не равны нулю одновременно, а x и y суть координаты радиуса-вектора точки, принадлежащей L .

Поскольку коэффициенты уравнения 4.4.1 зависят от выбора системы координат, при исследовании свойств линий второго порядка целесообразно предварительно перейти к другой системе координат $\{O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$, в которой вид уравнения линии оказывается *наиболее простым*.

Теорема 4.4.1 Для любой линии второго порядка существует ортонормированная система координат, в которой уравнение этой линии (при $a > 0, b > 0, p > 0$) имеет один из следующих девяти (называемых *каноническими*) видов:

Т а б л и ц а 4.4.1

Тип линии	Эллиптический	Гиперболический	Параболический
Вид линии	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$
Пустые множества	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1$		$y'^2 = -a^2 \quad \forall x'$
Изолированные точки	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0$		
Совпадающие прямые			$y'^2 = 0 \quad \forall x'$
Несовпадающие прямые		$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$	$y'^2 = a^2 \quad \forall x'$
Кривые	<i>Эллипс</i> $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$	<i>Гипербола</i> $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$	<i>Парабола</i> $y'^2 = 2px'$

где $\Delta = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Мы также потребуем, чтобы для канонического уравнения *эллипса* выполнялось $a \geq b$.

Доказательство.

1. Предварительно заметим, что без потери общности можно считать выполненными условия: $B \geq 0$ и $A \geq C$.

Действительно, если $B < 0$, то можно изменить знаки всех коэффициентов в уравнении 4.4.1.

Если же $A < C$, то, перейдя к новой ортонормированной системе координат, для которой $\vec{e}'_1 = \vec{e}_2$, $\vec{e}'_2 = \vec{e}_1$, $O\vec{O}' = \vec{o}$, мы получим желаемое соотношение, поскольку при таком переходе справедливы равенства $x = y'$, $y = x'$ в силу утверждений § 1.8. Заметим также, что при этой замене Δ не меняется, поскольку

$$\det \begin{vmatrix} C & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \Delta.$$

2. Если $B = 0$, то переходим к пункту 4 на с. 125.

Если же $B > 0$, то выбираем новую ортонормированную систему координат $\{O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$, получаемую из исходной поворотом против часовой стрелки вокруг точки O на угол $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$, такой, чтобы коэффициент при произведении $x'y'$ оказался равным нулю.

Выведем правило выбора этого угла. Для такого поворота (см. § 1.8):

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 &= \vec{e}_1 \cos \alpha + \vec{e}_2 \sin \alpha, \\ \vec{e}'_2 &= -\vec{e}_1 \sin \alpha + \vec{e}_2 \cos \alpha, \\ O\vec{O}' &= \vec{o}. \end{cases}$$

Тогда формулы перехода от $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ к $\{O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ будут иметь вид

$$\begin{cases} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases}$$

Подставляя выражения «старых» координат через «новые», получаем уравнение 4.4.1 в виде

$$\begin{aligned}
 & A(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 + 2B(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + \\
 & + C(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 + 2D(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + \\
 & + 2E(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + F = 0
 \end{aligned}$$

или же

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0,$$

где

$$\begin{cases}
 A' = A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha, \\
 2B' = -2A \sin \alpha \cos \alpha + 2B \cos^2 \alpha - 2B \sin^2 \alpha + 2C \sin \alpha \cos \alpha, \\
 C' = A \sin^2 \alpha - 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha.
 \end{cases}$$

Из условия $B' = 0$ следует: $2B \cos 2\alpha - (A - C) \sin 2\alpha = 0$,

т.е. окончательно: $\alpha = \frac{\pi}{4}$ при $A = C$ или же при $A > C$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C} \implies \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2B}{A - C},$$

то есть искомый угол найден.

Заметим, что угол также может быть найден из равносильного уравнения $\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{A - C}{B} \operatorname{tg} \alpha - 1 = 0$.

3. Убедимся, что при такой замене координат величины Δ и $A + C$ сохраняют свои значения. Действительно, из соотношений

$$1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha = 1 + \left(\frac{A - C}{2B} \right)^2 = \frac{1}{\sin^2 2\alpha}$$

и неравенства $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ получаем

$$\sin 2\alpha = \frac{2B}{\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}} \quad \text{и} \quad \cos 2\alpha = \frac{A - C}{\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}}.$$

Учитывая полученные равенства, из выражения для значения A' имеем

$$\begin{aligned} A' &= A \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + B \sin 2\alpha + C \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \\ &= \frac{A + C}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4B^2 + (A - C)^2}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем, что

$$C' = \frac{A + C}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{4B^2 + (A - C)^2}.$$

Теперь находим

$$\begin{aligned} \Delta' &= \det \begin{vmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{vmatrix} = A'C' = \\ &= \left(\frac{A + C}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} (4B^2 + (A - C)^2) = \\ &= AC - B^2 = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \Delta, \end{aligned}$$

то есть величина Δ не меняется при выполненной замене системы координат. Также очевидно, что при этом выполняется равенство $A' + C' = A + C$.

4. В дальнейших рассуждениях будем полагать, что $B = 0$, и рассмотрим отдельно случаи $\Delta \neq 0$ и $\Delta = 0$ для уравнения вида $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

Пусть $\Delta \neq 0$. Это означает, что $A \neq 0$ и $C \neq 0$ и уравнение линии может быть переписано в виде

$$A \left(x + \frac{D}{A} \right)^2 + C \left(y + \frac{E}{C} \right)^2 = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F.$$

Обозначим $P = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F$, тогда, перейдя к новой ортонормированной системе координат

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1, \\ \vec{e}'_2 = \vec{e}_2, \\ O\vec{O}' = -\frac{D}{A}\vec{e}_1 - \frac{E}{C}\vec{e}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = x' - \frac{D}{A}, \\ y = y' - \frac{E}{C}, \end{cases}$$

получим $Ax'^2 + Cy'^2 = P$. Откуда следует, что

$$\pm \frac{x'^2}{\left| \frac{P}{A} \right|} \pm \frac{y'^2}{\left| \frac{P}{C} \right|} = \pm 1 \quad \text{при } P \neq 0,$$

$$\pm \frac{x'^2}{|C|} \pm \frac{y'^2}{|A|} = 0 \quad \text{при } P = 0,$$

и мы приходим, таким образом, к одному из шести следующих уравнений:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0, \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1 \quad \text{для } \Delta > 0,$$

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0, \quad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = -1 \quad \text{для } \Delta < 0.$$

Первые пять из этих случаев содержатся в формулировке теоремы, а шестой сводится к пятому умножением обеих частей уравнения на -1 с последующим переобозначением: $x = y'$ и $y = x'$.

5. Пусть $\Delta = 0$. Это означает, что $AC = 0$, то есть либо $A = 0$, либо $C = 0$ (но не вместе!). Пусть $A = 0$ (если это не так, то взаимно переобозначим переменные x' и y'), тогда уравнение линии $Cy'^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ может быть в силу $C \neq 0$ записано в виде

$$C \left(y + \frac{E}{C} \right)^2 = \frac{E^2}{C} - F - 2Dx.$$

При $D = 0$ получаем $C \left(y + \frac{E}{C} \right)^2 = \frac{E^2}{C} - F$, то есть одно

из трех уравнений $y'^2 = a^2$, $y'^2 = 0$, $y'^2 = -a^2$.

Если же $D \neq 0$, то уравнение можно привести к виду

$$\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = -\frac{2D}{C} \left(x - \frac{1}{2D} \left(\frac{E^2}{C} - F\right)\right)$$

и, таким образом, либо $y'^2 = 2px'$, либо $y'^2 = -2px'$, где $p > 0$.

Первый из этих случаев указан в формулировке теоремы, а второй сводится к первому заменой координат:

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = -\vec{e}_1, \\ \vec{e}'_2 = \vec{e}_2, \\ \vec{OO}' = \vec{o} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -x', \\ y = y', \end{cases}$$

и, таким образом, для линии второго порядка на плоскости получены все девять канонических случаев.

Теорема доказана.

- Замечания.**
1. В теореме 4.1.1 было показано, что порядок алгебраической линии, в том числе и для рассматриваемых в теореме 4.4.1 случаев, не меняется при замене системы координат.
 2. Из доказательства теоремы также следует, что поворот и параллельный перенос ортонормированной системы координат не допускают перемещения уравнения линии второго порядка из одной строки таблицы, приведенной в формулировке теоремы 4.4.1, в другую. Более того, в дальнейшем будет показано (см. § 5.4), что никакой заменой общей декартовой системы координат нельзя переместить линию второго порядка, находящуюся в одной из клеток таблицы в условии теоремы 4.4.1, в другую клетку.
 3. Пустое множество эллиптического типа иногда называют *мнимым эллипсом*, а пустое множество параболического типа – *парой мнимых параллельных прямых*.
 4. Алгоритм доказательства теоремы 4.4.1 можно использовать как для нахождения канонического вида уравнения линии второго порядка, так и для построения канонической системы координат, то есть системы координат, в которой данная линия второго порядка имеет канонический вид.

Исследование конкретных свойств различных типов линий второго порядка приводится в приложении 1.

Поверхности второго порядка в пространстве

Пусть в пространстве даны ортонормированная система координат $\{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$ и некоторая поверхность S .

Определение
4.5.1

Пусть поверхность S является алгебраической поверхностью второго порядка, тогда (в соответствии с определениями 4.2.2 и 4.2.3) ее уравнение в данной системе координат может иметь вид

$$\begin{aligned} &A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + \\ &+ 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz + \\ &+ 2A_{14}x + 2A_{24}y + 2A_{34}z + A_{44} = 0, \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

где числа $A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{12}, A_{13},$ и A_{23} не равны нулю одновременно, а x, y и z суть координаты радиуса-вектора точки, принадлежащей S .

Как и в плоском случае, коэффициенты уравнения (4.5.1) зависят от выбора системы координат, поэтому при исследовании свойств поверхностей второго порядка целесообразно предварительно перейти в ту систему координат, для которой уравнение поверхности оказывается наиболее простым.

Теорема 4.5.1 Для любой поверхности второго порядка существует ортонормированная система координат, в которой уравнение этой поверхности имеет один из следующих семнадцати (называемых *каноническими*) видов:

Т а б л и ц а 4.5.1

<p>Пустое множество</p> $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = -1$	<p>Изолированная точка</p> $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 0$	<p>Эллиптический цилиндр</p> $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad \forall z'$
<p>Пустое множество</p> $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1 \quad \forall z'$	<p>Прямая</p> $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0 \quad \forall z'$	<p>Гиперболический цилиндр</p> $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad \forall z'$
<p>Пустое множество</p> $x'^2 = -a^2 \quad \forall y', z'$	<p>Пара пересекающихся плоскостей</p> $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0 \quad \forall z'$	<p>Параболический цилиндр</p> $y'^2 = 2px' \quad \forall z'$
	<p>Пара совпадающих или параллельных плоскостей</p> $x'^2 = 0 \quad \forall y', z'$ $x'^2 = a^2 \quad \forall y', z'$	<p>Конус</p> $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 0$

Т а б л и ц а 4.5.2

<p>Эллипсоид</p> $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$	<p>Эллиптический параболоид</p> $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 2z'$	<p>Однополостный гиперболоид</p> $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$
	<p>Гиперболический параболоид</p> $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 2z'$	<p>Двуполостный гиперболоид</p> $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $p > 0$.

Доказательство.

Хотя возможно доказать существование ортонормированной системы координат с требуемыми свойствами, применив подход, аналогичный использованному при доказательстве теоремы 4.4.1, представляется целесообразным рассмотреть этот вопрос в рамках теории евклидовых пространств, где утверждение теоремы 4.5.1 непосредственно вытекает из более общего случая, рассмотренного в § 12.2.

Теорема доказана.

Исследование свойств конкретных типов поверхностей второго порядка приводится в приложении 2.

Альтернативные системы координат

В ряде практических приложений оказывается целесообразным использование систем координат, отличных от декартовой.

Полярная система координат

Примером альтернативной системы координат на плоскости является *полярная система координат*.

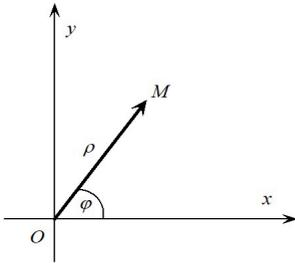


Рис. 4

Положение точки на плоскости в этой системе координат задается парой упорядоченных чисел $\{\rho, \varphi\}$, где $\rho = |\vec{OM}|$, $\varphi = \angle OMx$ удовлетворяют ограничениям $\rho \geq 0$ и $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Точка O называется *полюсом*, а луч Ox — *полярной осью*. Угол φ отсчитывается против часовой стрелки (рис. 4). Для полюса этот угол не определяется.

Формулы перехода от ортонормированной декартовой системы координат к полярной и обратно имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Использование полярной системы координат позволяет упростить описание объектов, обладающих точечной симметрией. Например, окружность единичного радиуса с центром в начале координат, имеющая в ортонормированной декартовой системе координат уравнение $x^2 + y^2 = 1$, в полярной системе координат задается условием $\rho = 1$.

Более того, в приложении 1 показано, что в полярной системе координат три различных типа линий второго порядка — эллипс, гипербола и парабола — задаются одним и тем же уравнением

$$\rho(1 - \varepsilon \cos \varphi) - p = 0, \quad (4.6.1)$$

где $p > 0$ и $\varepsilon > 0$ — некоторые константы, называемые соответственно *эксцентриситетом* и *фокальным параметром*, и что для различных значений ε при фиксированном p получаются различные типы кривых: эллипсы при $0 < \varepsilon < 1$, параболы при $\varepsilon = 1$ и гиперболы при $\varepsilon > 1$. Соответствующие случаи показаны на рис. 5.

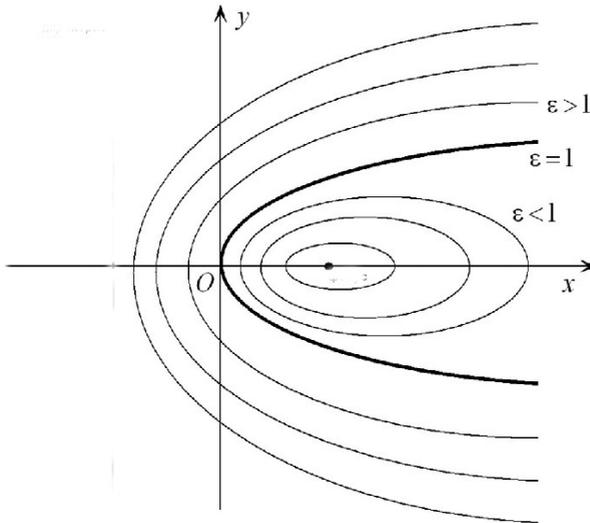


Рис. 5. Линии второго порядка с разными значениями ε

Проверим справедливость этого утверждения, выполнив в уравнении (4.6.1) переход от полярной к ортонормированной декартовой системе координат. Действительно, поскольку

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{и} \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

то уравнение (4.6.1) может быть преобразовано к виду

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 = 2\varepsilon px + p^2.$$

Если $\varepsilon = 1$, то это уравнение параболы. Если же $\varepsilon \neq 1$, то, выделив полные квадраты, получим

$$\left(x - \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2}\right)^2 + \frac{1}{1 - \varepsilon^2}y^2 = \frac{p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}.$$

Теперь нетрудно заметить, что при $0 < \varepsilon < 1$ это эллипс, а при $\varepsilon > 1$ — гипербола.

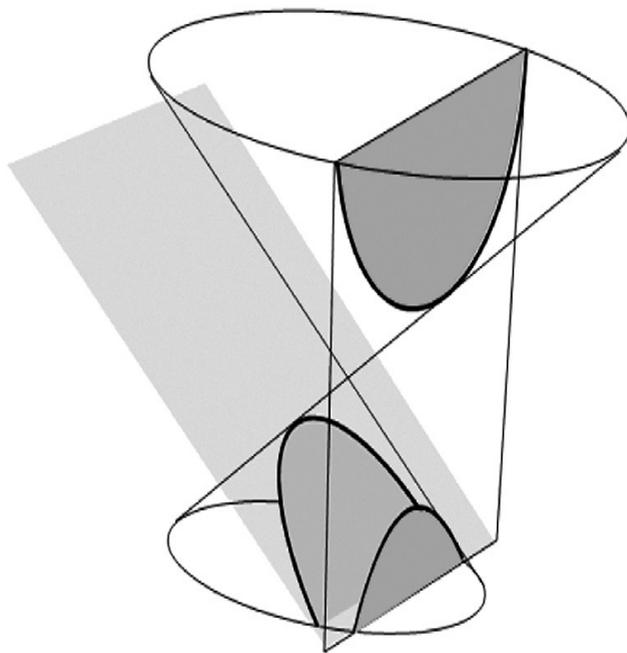


Рис. 6. Конические сечения

Далее, если ослабить ограничения на параметры уравнения (4.6.1), разрешив им принимать (в смысле предельного перехода) как нулевые, так и бесконечно большие положительные значения, то можно получить и другие виды линий второго порядка, указанные в формулировке теоремы 4.4.1.

Так, например, при $\varepsilon = 0$ мы имеем для $p > 0$ окружность, а для $p = 0$ — изолированную точку.

Наконец, поскольку линии пересечения конической поверхности некоторой плоскостью являются линиями второго порядка (это иллюстрирует рис. 6), то можно дать

Определение
4.6.1

Линия, уравнение которой в полярной системе координат имеет вид

$$\rho(1 - \varepsilon \cos \varphi) - p = 0, \quad \text{где } p \geq 0 \text{ и } \varepsilon \geq 0,$$

называется *коническим сечением*.

Сферическая система координат

В ряде практических приложений, требующих аналитического исследования пространственных объектов, используется так называемая *сферическая система координат*.

Положение точки M в пространстве в этой системе однозначно задается при помощи тройки чисел $\{\rho, \varphi, \theta\}$, где (см. рис. 7):

$$\rho = |\vec{OM}|, \quad \varphi = \angle POx, \\ \theta = \angle MOz.$$

Эти числа удовлетворяют ограничениям

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Использование сферической системы координат иногда позволяет получить более простое аналитическое описание геометрических объектов, обладающих точечной симметрией.

Например, уравнение сферы единичного радиуса с центром в начале координат в сферической системе будет иметь вид $\rho = 1$.

Формулы перехода между ортонормированной декартовой системой координат и сферической имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \theta, \end{cases}$$

а для обратного перехода соответственно

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{cases}$$

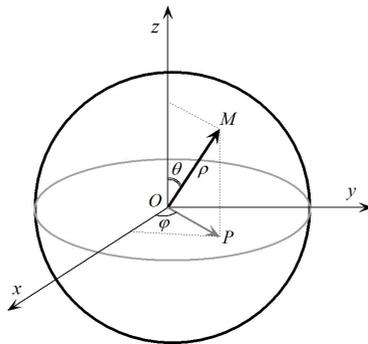


Рис. 7. Сферическая система координат

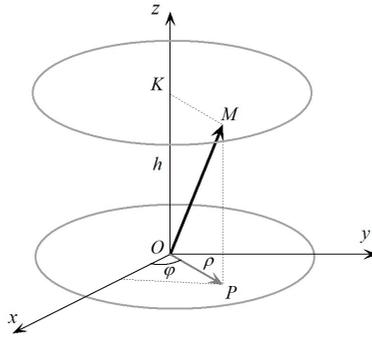


Рис. 8. Цилиндрическая система координат

Цилиндрическая система координат

В тех случаях, когда исследуемый пространственный объект обладает осевой симметрией, может оказаться удобным применение *цилиндрической системы координат*.

В тех случаях, когда исследуемый пространственный объект обладает осевой симметрией, может оказаться удобным применение цилиндрической системы координат.

Положение точки M в пространстве в этой системе однозначно задается при помощи упорядоченной тройки чисел $\{\rho, \varphi, h\}$, где (см. рис. 8)

$$\rho = |\vec{OP}|, \quad \varphi = \angle POx,$$

а h есть z -координата точки M .

Значения этих чисел удовлетворяют ограничениям

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad h \in (-\infty, +\infty).$$

Формулы перехода от ортонормированной декартовой системы координат к цилиндрической и обратно имеют вид

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = h, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ h = z. \end{cases}$$