Умножение матриц

Определение 5.1.1	Матрица $\lVert C \rVert$ размера $m \times n$ с элементами $$\gamma_{ij} \quad \forall i = \overline{1,m}\,,\ \forall j = \overline{1,n}$$ называется *произведением* матрицы $\lVert A \rVert$ размера $m \times l$ с элементами $$\alpha_{ik} \quad \forall i = \overline{1,m}\,,\ \forall k = \overline{1,l}$$ на матрицу $\lVert B \rVert$ размера $l \times n$ с элементами $$\beta_{kj} \quad \forall k = \overline{1,l}\,,\ \forall j = \overline{1,n}\,,$$ где $$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{l} \alpha_{ik}\beta_{kj} \quad \forall i = \overline{1,m}\,,\ \forall j = \overline{1,n}\,.$$

$$\left\|\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{il} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{ml} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1j} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2j} & \cdots & \beta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{l1} & \beta_{l2} & \cdots & \beta_{lj} & \cdots & \beta_{\mathrm{ln}} \end{matrix}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{matrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1j} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2j} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{i1} & \gamma_{i2} & \cdots & \gamma_{ij} & \cdots & \gamma_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mj} & \cdots & \gamma_{mn} \end{matrix}\right\| \qquad \gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{l} \alpha_{ik}\beta_{kj}$$

Рис. 1. Умножение матриц

Результат *умножения матриц* — матрица $\|C\|$ — есть матрица размера $m \times n$ при любом натуральном l. Произведение матриц обозначается как $\|C\| = \|A\|\,\|B\|$. Правило вычисления компонентов произведения по компонентам сомножителей иллюстрирует рис. 1.

Пример 5.1.1 Приведем результаты умножения матриц, имеющих не более чем пару строк или столбцов.

1. Пусть размер $\|A\|$ есть 2×2, а размер $\|B\|$ — 2×1, тогда размер $\|C\|$ будет 2×1.

Конкретно в этом случае

$$\|C\| = \|A\|\,\|B\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} \end{array} \right\| .$$

2. Если размер $\|A\|$ есть 1×2, а размер $\|B\|$ — 2×2, тогда размер $\|C\|$ будет 1×2. Тогда

$$\|C\| = \|A\|\,\|B\| = \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} \end{array} \right\| .$$

3. Наконец, пусть размеры $\|A\|$ и $\|B\|$ одинаковые. Для размера 1×1 очевидно, что

$$\|C\| = \|A\|\,\|B\| = \|\,\alpha_{11}\beta_{11}\|\ .$$

Заметим, что в силу определения 5.1.1 матрицы такого размера по алгебраическим свойствам не будут отличаться от вещественных чисел.

Если же размеры $\|A\|$ и $\|B\|$ есть 2×2, то

$$\|C\| = \|A\|\,\|B\| = \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} \end{array} \right\| .$$

Замечания об умножении матриц

Из определения произведения матриц непосредственно следует, что для матриц подходящих размеров:

1) умножение матриц *некоммутативно*, то есть в общем случае

$$\|A\|\|B\| \neq \|B\|\|A\| ,$$

2) умножение матриц *ассоциативно*

$$\|A\|\Big(\|B\|\|C\|\Big) = \Big(\|A\|\|B\|\Big)\|C\| ,$$

3) умножение матриц обладает свойством *дистрибутивности*.

$$\|A\|\Big(\|B\| + \|C\|\Big) = \|A\|\|B\| + \|A\|\|C\| .$$

Легко убедиться, что умножение (как справа, так и слева) любой матрицы на подходящего размера *единичную* матрицу $\|E\|$ дает в результате ту же самую матрицу:

$$\|A\|\|E_1\| = \|A\| \qquad \text{или} \qquad \|E_2\|\|A\| = \|A\|\,.$$

Определение 5.1.2	Матрица $\|A\|^{-1}$ называется *обратной* к квадратной матрице $\|A\|$, если выполнены равенства $$\|A\|^{-1}\|A\| = \|A\|\|A\|^{-1} = \|E\|\,.$$

Обратная матрица существует *не для произвольной* квадратной матрицы. Для существования матрицы, обратной к $\|A\|$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\det\|A\| \neq 0$

Дадим

Определение 5.1.3	Квадратная матрица $\|A\|$, для которой ее определитель (детерминант) равен нулю, называется *вырожденной*, а квадратная матрица, для которой $\det\|A\| \neq 0$, — *невырожденной*.

Лемма 5.1.1 **Если обратная матрица существует, то она единственна.**

Доказательство.

Предположим, что невырожденная матрица $\|A\|$ имеет две обратные: $\|A\|_1^{-1}$ и $\|A\|_2^{-1}$. Тогда из равенств

$$\|A\|\|A\|_1^{-1} = \|E\| \qquad \text{и} \qquad \|A\|\|A\|_2^{-1} = \|E\|$$

следует, что

$$\|A\|\left(\|A\|_1^{-1} - \|A\|_2^{-1}\right) = \|A\|\|A\|_1^{-1} - \|A\|\|A\|_2^{-1} = \|O\| .$$

Умножив слева обе части данного равенства на $\|A\|_1^{-1}$, получим

$$\|A\|_1^{-1}\|A\|\left(\|A\|_1^{-1} - \|A\|_2^{-1}\right) = \|O\|$$

и, учтя, что $\|A\|_1^{-1}\|A\| = \|E\|$, приходим к равенству

$$\|A\|_1^{-1} - \|A\|_2^{-1} = \|O\| .$$

Лемма доказана.

В частном случае, когда $\|A\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \right\|$ и если $\det\|A\| \neq 0$, ее обратная матрица имеет вид

$$\|A\|^{-1} = \frac{1}{\det\|A\|} \left\| \begin{matrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{matrix} \right\| . \qquad (5.1.1)$$

Отметим, что для квадратных матриц порядка n справедливы следующие равенства:

$$\det\big(\|A\|\,\|B\|\big) = \det\|A\|\ \det\|B\|\,,$$

$$\det\|A\|^{-1} = \frac{1}{\det\|A\|}\,, \quad \text{если} \quad \det\|A\| \neq 0\,.$$

Пример 5.1.2 Используя матричные операции, систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 & + & \alpha_{12}\xi_2 & = & \beta_1\,, \\ \alpha_{21}\xi_1 & + & \alpha_{22}\xi_2 & = & \beta_2 \end{cases}$$

можно записать в виде $\|A\|\,\|x\| = \|b\|$, где

$$\|x\| = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\|, \quad \|b\| = \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\|, \quad \|A\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \right\|,$$

а ее решение при $\det\|A\| \neq 0$, как $\|x\| = \|A\|^{-1}\,\|b\|$.

Пример 5.1.3 Формулы перехода (1.8.2) от одной декартовой системы координат к другой с помощью матричных операций могут быть записаны в виде

$$\left\| \begin{matrix} \vec{g}\,'_1 \\ \vec{g}\,'_2 \\ \vec{g}\,'_3 \end{matrix} \right\| = \|S\|^{\mathrm{T}} \left\| \begin{matrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \\ \vec{g}_3 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\| = \|S\| \left\| \begin{matrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{matrix} \right\|,$$

где $\|S\|$ — матрица перехода.

Теорема 5.1.1 **Справедливо равенство** $\left(\|A\|\,\|B\|\right)^{\mathrm{T}} = \|B\|^{\mathrm{T}}\,\|A\|^{\mathrm{T}}$.

Доказательство.

Будем предполагать, что размеры матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ таковы, что произведения матриц, указанные в формулировке теоремы, существуют.

Пусть числа $\alpha_{ik}, \beta_{kj}, \gamma_{ij}$ суть элементы матриц $\|A\|, \|B\|$ и $\|C\| = \|A\|\|B\|$ соответственно. Тогда, согласно определению 5.1.1,

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{l} \alpha_{ik}\beta_{kj}\,.$$

Но, с другой стороны, по определению 1.1.8 (операции транспонирования):

$$\gamma^{\mathrm{T}}_{ij} = \gamma_{ji} = \sum_{k=1}^{l} \alpha_{jk}\beta_{ki} = \sum_{k=1}^{l} \alpha^{\mathrm{T}}_{kj}\beta^{\mathrm{T}}_{ik} = \sum_{k=1}^{l} \beta^{\mathrm{T}}_{ik}\alpha^{\mathrm{T}}_{kj}\,.$$

Откуда, в силу определения 5.1.1, следует заключение о справедливости утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Пример 5.1.4 Согласно правилу транспонирования произведения матриц равенство из примера 5.1.3

$$\left\|\begin{array}{c} \vec{g}\,'_1 \\ \vec{g}\,'_2 \\ \vec{g}\,'_3 \end{array}\right\| = \|S\|^{\mathrm{T}} \left\|\begin{array}{c} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \\ \vec{g}_3 \end{array}\right\|$$

может быть записано в виде

$$\|\,\vec{g}\,'_1\ \vec{g}\,'_2\ \vec{g}\,'_3\,\| = \|\,\vec{g}_1\ \vec{g}_2\ \vec{g}_3\,\|\,\|S\|\,.$$

Для дальнейших рассуждений нам будет полезно следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 5.1.2

Если произведение квадратной порядка n матрицы $\|Q\|$ на любой n-компонентный столбец $\|x\|$ есть нулевой n-компонентный столбец, то матрица $\|Q\|$ нулевая.

Доказательство.

Пусть $\|Q\| = \left\| \begin{matrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \cdots & \omega_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \cdots & \omega_{nn} \end{matrix} \right\|$. Выберем в качестве столбца $\|x\|$ столбец вида $\|x\| = \| \, 0 \, \ldots \, 1 \, \ldots \, 0 \, \|^{\mathrm{T}}$, где единица стоит в строке с номером k.

Тогда получим $\|Q\| \left\| \begin{matrix} 0 \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \omega_{1k} \\ \cdots \\ \omega_{kk} \\ \cdots \\ \omega_{nk} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{matrix} \right\|$, то есть k-й столбец матрицы $\|Q\|$ нулевой. В силу произвольности k приходим к заключению о справедливости утверждения леммы.

Лемма доказана.

Теорема 5.1.2 **Для невырожденных одинакового размера квадратных матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ справедливо равенство $\big(\|A\|\,\|B\|\big)^{-1} = \|B\|^{-1}\,\|A\|^{-1}$.**

Доказательство.

1. Пусть произведение матрицы $\big(\|A\|\,\|B\|\big)^{-1}$ на некоторый n-компонентный столбец $\|x\|$ есть столбец $\|c\|$, то есть $\big(\|A\|\,\|B\|\big)^{-1}\|x\| = \|c\|$ или $\|x\| = \|A\|\,\|B\|\,\|c\|$.
2. Из последнего равенства получаем, что
$$\|A\|^{-1}\|x\| = \|B\|\,\|c\| \qquad \Longrightarrow \qquad \|B\|^{-1}\|A\|^{-1}\|x\| = \|c\| .$$
3. Вычитая почленно равенства $\big(\|A\|\,\|B\|\big)^{-1}\|x\| = \|c\|$ и $\|B\|^{-1}\|A\|^{-1}\|x\| = \|c\|$, получаем в силу дистрибутивности матричного произведения
$$\Big(\big(\|A\|\,\|B\|\big)^{-1} - \|B\|^{-1}\|A\|^{-1}\Big)\|x\| = \|o\| .$$

Откуда на основании леммы 5.1.2 ввиду произвольности столбца $\|x\|$ заключаем, что матрица
$$\big(\|A\|\,\|B\|\big)^{-1} - \|B\|^{-1}\|A\|^{-1}$$
нулевая.

Теорема доказана.

Задача 5.1.1 *Проверить тождество* $\left(\|A\|^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\|A\|^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$.

Определение 5.1.4 Невырожденная квадратная матрица $\|Q\|$, для которой $\|Q\|^{-1}=\|Q\|^{\mathrm{T}}$, называется *ортогональной.*

Свойства ортогональных матриц, играющих важную роль во многих приложениях, можно сформулировать в виде следующих теорем.

Теорема 5.1.3 **Для ортогональной матрицы $\|Q\|$ справедливо равенство** $\det\|Q\|=\pm 1$.

Доказательство.

Умножая равенство $\|Q\|^{-1}=\|Q\|^{\mathrm{T}}$ последовательно слева и справа на $\|Q\|$, в силу определения 5.1.2, приходим к соотношению

$$\|Q\|\,\|Q\|)^{\mathrm{T}}=\|Q\|^{\mathrm{T}}\|Q\|=\|E\|\,.$$

Откуда находим, что $\det^2\|Q\|=1$, поскольку

— определитель произведения квадратных матриц одинакового размера равен произведению определителей сомножителей;

— определитель матрицы не меняется при ее транспонировании;

— $\det\|E\|=1$.

Теорема доказана.

Теорема 5.1.4 **Каждая ортогональная матрица второго порядка $\|Q\|$, для которой $\det\|Q\| = 1$, может быть представлена в виде $\left\|\begin{matrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{matrix}\right\|$, где φ — некоторое число, а каждая ортогональная матрица с $\det\|Q\| = -1$ — в виде $\left\|\begin{matrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{matrix}\right\|$.**

Доказательство.

Пусть матрица $\|Q\| = \left\|\begin{matrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{matrix}\right\|$ ортогональная, тогда должны быть справедливы равенства

$$\|Q\|\|Q\|^{\mathrm{T}} = \left\|\begin{matrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \omega_{11} & \omega_{21} \\ \omega_{12} & \omega_{22} \end{matrix}\right\| = \|E\|$$

и, следовательно,

$$\left\|\begin{matrix} \omega_{11}^2+\omega_{12}^2 & \omega_{11}\omega_{21}+\omega_{12}\omega_{22} \\ \omega_{11}\omega_{21}+\omega_{12}\omega_{22} & \omega_{21}^2+\omega_{22}^2 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\| .$$

Последнее матричное равенство может быть записано в виде системы скалярных условий

$$\begin{cases} \omega_{11}^2+\omega_{12}^2 & = 1\,, \\ \omega_{11}\omega_{21}+\omega_{12}\omega_{22} & = 0\,, \\ \omega_{21}^2+\omega_{22}^2 & = 1\,, \end{cases}$$

причем из этих равенств, как было показано при доказательстве теоремы 5.1.3, следует, что $\det\|Q\| = \pm 1$. Рассмотрим вначале случай $\det\|Q\| = 1$.

Если из суммы первого и третьего уравнений системы вычесть удвоенное равенство $\det\|Q\| = 1$, то есть равенство $\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21} = 1$, то мы получим

$$\left(\omega_{11}^2+\omega_{12}^2\right)+\left(\omega_{21}^2+\omega_{22}^2\right)-2\left(\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}\right) = 0$$

или $\quad \left(\omega_{11}-\omega_{22}\right)^2+\left(\omega_{12}+\omega_{21}\right)^2=0, \quad$ откуда следует, что

$$\left\{\begin{array}{rcr} \omega_{11} & = & \omega_{22}\,, \\ \omega_{12} & = & -\omega_{21}\,. \end{array}\right.$$

Наконец, из условий

$$\omega_{11}^2+\omega_{12}^2=1 \qquad \text{и} \qquad \omega_{21}^2+\omega_{22}^2=1$$

получаем оценки:

$$0 \le \omega_{11}^2 \le 1 \qquad \text{и} \qquad 0 \le \omega_{21}^2 \le 1\,,$$

из которых следует существование числа φ, такого, что

$$\left\{\begin{array}{rcr} \omega_{11} & = & \cos\varphi\,, \\ \omega_{21} & = & -\sin\varphi\,, \end{array}\right.$$

приводящие к требуемому виду матрицы $\|Q\|$, поскольку из полученных соотношений также, очевидно, следует, что $\omega_{11}^2+\omega_{21}^2=1$.

Случай $\det\|Q\|=-1$ рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

Следствие 5.1.1 **Матрица перехода от одного ортонормированного базиса на плоскости к другому ортогональная.**

Доказательство.

В § 1.8 было показано, что $\|S\|$ — матрица перехода от одной ортонормированной системы координат на плоскости к другой может иметь один из двух следующих видов:

$$\left\| \begin{matrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{matrix} \right\| \qquad \text{или} \qquad \left\| \begin{matrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{matrix} \right\|,$$

где φ — угол между первыми базисными векторами. Но тогда матрица перехода ортогональная в силу теоремы 5.1.4.

Следствие доказано.

Операторы и функционалы. Отображения и преобразования плоскости

Вводимое в курсе математического анализа понятие *функции* (как правила, устанавливающего однозначное соответствие между числом, принадлежащим области определения, и числом, принадлежащим множеству значений) может быть естественным образом обобщено на случай, когда область определения и область значений не являются числовыми множествами.

Определение 5.2.1	Будем говорить, что задан *оператор* $\hat{A}$, действующий на множестве Ω со значениями в множестве Θ, если указано правило, по которому каждому элементу множества Ω поставлен в соответствие единственный элемент из множества Ω.

Символически результат действия оператора $\hat{A}$ обозначается так: $y = \hat{A}x\,,\ x \in \Omega\,,\ y \in \Theta\,.$ Элемент y в этом случае называется *образом* элемента x, а элемент x — *прообразом* элемента y.

Определение 5.2.2	Если Θ — область значений некоторого оператора — является числовым множеством, то говорят, что на множестве Ω задан *функционал*.

Функционалы обычно обозначаются так же, как и функции: например, $y = \Phi(x) \quad x \in \Omega$.

Пример 5.2.1

1. Если каждому вектору $\vec{x}$ в пространстве поставлен в соответствие вектор $\vec{y}$, являющийся ортогональной проекцией вектора $\vec{x}$ на некоторую ось l, то говорят, что в пространстве задан оператор $\vec{y} = \hat{\Pr}_l \vec{x}$ ортогонального проектирования векторов на ось l. В этом случае можно записать, что $\vec{y} = \hat{A}\vec{x}$, где символически $\hat{A} = \hat{\Pr}_l$.

2. Каждой дифференцируемой на $[\alpha, \beta]$ функции $f(\tau)$ можно поставить в однозначное соответствие $f'(\tau)$ — ее производную функцию, поэтому можно говорить об *операторе дифференцирования*, действующего по формуле $f'(x) = \hat{A}\, f(x)$ и обозначаемом символически как $\hat{A} = \dfrac{d}{d\tau}$.
3. Каждому вектору $\vec{x}$ в пространстве можно поставить в однозначное соответствие его длину — число $\left|\vec{x}\right|$. Согласно определению 5.2.2 данная зависимость является *функционалом*, определенным на множестве всех векторов.
4. На множестве квадратных матриц третьего порядка сопоставление матрицы и ее детерминанта является функционалом.
5. Если каждой непрерывной на $[\alpha, \beta]$ функции $f(x)$ поставить в соответствие ее определенный интеграл $\Phi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\tau)\, d\tau$, то можно говорить о функционале вида $\Phi(f)$, заданном на множестве функций, непрерывных на $[\alpha, \beta]$.

Определение 5.2.3	Оператором $\hat{A}$, отображающим плоскость (или, просто, *отображением* плоскости) P на плоскость Q, называется правило, по которому каждой точке плоскости P поставлена в соответствие единственная точка плоскости Q.

Отображение плоскости принято обозначать следующим образом: $\hat{A}: \ P \longrightarrow Q$.

Если точка M плоскости P отображается в точку M^* плоскости Q, то это представляется как $M^* = \hat{A}\,M$ (что также иногда записывают в виде $M^* = \hat{A}(M)$), при этом точка M^* является образом точки M, а точка M — прообразом точки M^*.

Определение 5.2.4	Отображение $\hat{A}: \; P \longrightarrow Q$ называется *взаимно однозначным*, если каждая точка плоскости Q имеет прообраз и притом единственный.

Определение 5.2.5	Отображение $\hat{A}$ плоскости P в саму себя называется *преобразованием* плоскости P.

Определение 5.2.6	Последовательное выполнение преобразований $M^* = \hat{A}\,M$ и $M^{**} = \hat{B}\,M^*$ называется *произведением* (или *композицией*) этих преобразований.

Произведение операторов записывается в виде $M^{**} = \hat{B}\,\hat{A}\,M$. Заметим, что в общем случае эта операция *не коммутативна*, но *ассоциативна*.

Определение 5.2.7	Преобразованием, *обратным* взаимно однозначному преобразованию $\hat{A}: P \longrightarrow P$, называется оператор $\hat{A}^{-1}: P \longrightarrow P$, такой, что для каждой точки M плоскости P имеет место $$\hat{A}^{-1}\hat{A}\,M = \hat{A}\,\hat{A}^{-1}\,M = M\,.$$

Определение 5.2.8	Точка плоскости P, переводимая преобразованием $\hat{A}$ сама в себя, называется *неподвижной* точкой для $\hat{A}$. Множество на P, состоящее из неподвижных точек для $\hat{A}$, называется *неподвижным* для $\hat{A}$. Множество точек на P, переходящее при действии $\hat{A}$ само в себя, называется *инвариантным* множеством этого преобразования.

Линейные преобразования плоскости

Векторно-координатный метод представления геометрических объектов удобным как для описания, так и для исследования преобразований плоскости.

Пусть на плоскости с декартовой системой координат $\{O\,,\ \vec{g}_1\,,\ \vec{g}_2\}$ каждой ее точке M поставлена в однозначное соответствие точка M^*, то есть согласно определению 5.2.6 задано преобразование этой плоскости $M^* = \hat{A}\,M$. И пусть координатные представления (координатные столбцы) радиусов-векторов этих точек суть соответственно

$$\left\|\vec{r}_M\right\|_g = \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\| \qquad \text{и} \qquad \left\|\vec{r}_{M^*}\right\|_g = \left\| \begin{array}{c} x^* \\ y^* \end{array} \right\| \,,$$

тогда координаты x^* и будут x^* некоторыми *функциями* от x и y : $x^* = F_x(x,y)$ и $y^* = F_y(x,y)$.

Поэтому систему уравнений или равносильное ей матричное равенство

$$\left\{ \begin{array}{l} x^* = F_x(x,y)\,, \\ y^* = F_y(x,y) \end{array} \right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\| \begin{array}{c} x^* \\ y^* \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} F_x(x,y) \\ F_y(x,y) \end{array} \right\|$$

можно рассматривать как описание (или способ задания) оператора $\vec{r}_{M^*} = \hat{A}\vec{r}_M$ в системе координат $\{O\,,\ \vec{g}_1\,,\ \vec{g}_2\}$.

Далее мы будем рассматривать частные, но важные для приложений, виды функций $F_x(x,y)$ и $F_y(x,y)$.

Определение 5.3.1	Оператор $\vec{r}_{M^*} = \hat{A}\vec{r}_M$ называется *линейным оператором*, если в каждой декартовой системе координат $\{O\,,\ \vec{g}_1\,,\ \vec{g}_2\}$ он задается формулами $$\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1\,, \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2\,. \end{cases}$$

При помощи матричных операций линейный оператор может быть записан в виде

$$\left\|\begin{array}{c} x^* \\ y^* \end{array}\right\| = \left\|\hat{A}\right\|_g \left\|\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right\| + \left\|\begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_2 \end{array}\right\|,$$

где матрица $\left\|\hat{A}\right\|_g = \left\|\begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{array}\right\|$ называется *матрицей линейного оператора* (*координатным представлением* $\hat{A}$) в системе координат $\{O\,,\ \vec{g}_1\,,\ \vec{g}_2\}$.

Определение 5.3.2

Оператор $\vec{r}_{M^*} = \hat{A}\vec{r}_M$ называется *линейным однородным оператором*, если он удовлетворяет определению 5.3.1 и, кроме того, $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

Если же $|\beta_1|+|\beta_2| > 0$, то оператор $\hat{A}$ называется *неоднородным*.

Пример 5.3.1

К линейным однородным операторам относятся:

1. Оператор $\hat{A}$, действие которого сводится к умножению координат радиуса-вектора прообраза на фиксированные положительные числа, называемый оператором *сжатия к осям*, или просто «сжатием к осям», имеющий матрицу

$$\left\|\hat{A}\right\|_g = \left\| \begin{matrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{matrix} \right\|,$$

   где числа κ_1 и κ_2 — коэффициенты сжатия.

2. Оператор *ортогонального проектирования* радиусов-векторов точек плоскости на некоторую заданную ось, проходящую через начало координат.

3. *Гомотетия* с коэффициентом κ и с центром в начале координат.

Теорема 5.3.1 **Для линейного однородного оператора $\hat{A}$ справедливы соотношения:**

$$\textbf{1)}\quad \hat{A}(\vec{r}_1+\vec{r}_2)=\hat{A}\vec{r}_1+\hat{A}\vec{r}_2 \quad \forall \vec{r}_1,\,\vec{r}_2\ ,$$

$$\textbf{2)}\quad \hat{A}(\lambda\vec{r})=\lambda\hat{A}\vec{r} \quad \forall \lambda,\vec{r}\ .$$

Доказательство.

В справедливости утверждения теоремы убедимся непосредственной проверкой, используя правила действия с матрицами. Например, для 1) имеем

$$\hat{A}(\vec{r}_1+\vec{r}_2)=\left\|\begin{matrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{matrix}\right\|\left(\left\|\begin{matrix}x_1\\ y_1\end{matrix}\right\|+\left\|\begin{matrix}x_2\\ y_2\end{matrix}\right\|\right)=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}x_1\\ y_1\end{matrix}\right\|+\left\|\begin{matrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}x_2\\ y_2\end{matrix}\right\|=\hat{A}\vec{r}_1+\hat{A}\vec{r}_2\,.$$

Теорема доказана.

Теорема 5.3.2 **Если для некоторого оператора $\hat{A}$ справедливы соотношения**

$$\textbf{1)}\quad \hat{A}(\vec{r}_1+\vec{r}_2)=\hat{A}\vec{r}_1+\hat{A}\vec{r}_2 \quad \forall\vec{r}_1,\,\vec{r}_2\ ,$$

$$\textbf{2)}\quad \hat{A}(\lambda\vec{r})=\lambda\hat{A}\vec{r} \quad \forall\lambda,\vec{r}\ ,$$

то этот оператор линейный и однородный.

Доказательство.

Пусть $\vec{r}=x\,\vec{g}_1+y\,\vec{g}_2$ и $\hat{A}\vec{r}=x^*\,\vec{g}_1+y^*\,\vec{g}_2$ суть соответственно координатные разложения для прообраза и образа, тогда

$$x^*\,\vec{g}_1+y^*\,\vec{g}_2=\hat{A}\big(x\,\vec{g}_1+y\,\vec{g}_2\big)=x\,\hat{A}\vec{g}_1+y\,\hat{A}\vec{g}_2\,.$$

По теореме 1.5.1 существуют числа $\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{21},\alpha_{22}$, такие, что

$$\hat{A}\vec{g}_1=\alpha_{11}\,\vec{g}_1+\alpha_{21}\,\vec{g}_2 \qquad \text{и} \qquad \hat{A}\vec{g}_2=\alpha_{12}\,\vec{g}_1+\alpha_{22}\,\vec{g}_2\,.$$

Тогда получаем

$$x^*\,\vec{g}_1+y^*\,\vec{g}_2=x\,\hat{A}\vec{g}_1+y\,\hat{A}\vec{g}_2=$$

$$=\big(\alpha_{11}x+\alpha_{12}y\big)\,\vec{g}_1+\big(\alpha_{21}x+\alpha_{22}y\big)\,\vec{g}_2\,.$$

И в силу линейной независимости векторов $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$ имеем

$$\left\{\begin{array}{l} x^*=\alpha_{11}x+\alpha_{12}y\,,\\ y^*=\alpha_{21}x+\alpha_{22}y \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left\|\begin{array}{c} x^*\\ y^* \end{array}\right\|=\left\|\begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{array}\right\|\left\|\begin{array}{c} x\\ y \end{array}\right\|.$$

Теорема доказана.

Для вектора $\vec{a}$, имеющего в базисе $\{\vec{g}_1\,,\ \vec{g}_2\}$ координатное представление $\|\,\vec{a}\,\|_g = \left\| \begin{matrix} a_x \\ a_y \end{matrix} \right\|$, при любом линейном преобразовании образ $\hat{A}\,\vec{a}$ есть вектор с координатным представлением

$$\left\|\hat{A}\,\vec{a}\right\|_g = \left\| \begin{matrix} a_x^* \\ a_y^* \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} a_x \\ a_y \end{matrix} \right\| .$$

Отметим, что в эти формулы не входят β_1 и β_2, поскольку вектор $\vec{a}$ равен разности радиусов-векторов его конца и начала.

Из теорем 5.3.1 и 5.3.2 вытекают важные следствия.

Следствие 5.3.1 **Столбцами матрицы линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{g}_1\,,\ \vec{g}_2\}$ являются координатные представления векторов $\hat{A}\,\vec{g}_1$ и $\hat{A}\,\vec{g}_2$.**

Следствие 5.3.2 **Каждому линейному однородному оператору преобразования плоскости в конкретном базисе соответствует однозначно определяемая квадратная матрица второго порядка, а каждая квадратная матрица второго порядка задает в этом базисе некоторый линейный однородный оператор.**

Задача 5.3.1 *Показать, что для линейных однородных операторов на плоскости справедливы утверждения:*

1. *Матрица произведения линейных однородных операторов равна произведению матриц операторов-сомножителей:* $\left\|\hat{A}\,\hat{B}\right\|_g = \left\|\hat{A}\right\|_g \left\|\hat{B}\right\|_g$.
2. *Если оператор, обратный линейному однородному оператору* $\hat{A}$, *существует, то* $\left\|\hat{A}^{-1}\right\|_g = \left\|\hat{A}\right\|_g^{-1}$.

Выясним теперь, как изменится матрица линейного однородного оператора при замене базиса. Имеет место

Теорема 5.3.3 **Пусть в исходной системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ однородный линейный оператор имеет матрицу $\left\|\hat{A}\right\|_g$. Тогда в системе координат $\{O', \vec{g}\,'_1, \vec{g}\,'_2\}$ этот оператор будет иметь матрицу**

$$\left\|\hat{A}\right\|_{g'} = \left\|S\right\|^{-1} \left\|\hat{A}\right\|_g \left\|S\right\|,$$

где $\left\|S\right\|$ – матрица перехода между системами координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ и $\{O', \vec{g}\,'_1, \vec{g}\,'_2\}$.

Доказательство.

Пусть в исходной системе координат действие линейного оператора описывается формулой

$$\left\| \vec{r}^{\,*} \right\|_g = \left\| \hat{A} \right\|_g \left\| \vec{r} \right\|_g , \tag{5.3.1}$$

а в новой системе координат формулой

$$\left\| \vec{r}^{\,*} \right\|_{g'} = \left\| \hat{A} \right\|_{g'} \left\| \vec{r} \right\|_{g'} . \tag{5.3.2}$$

Согласно теореме 1.8.1 при переходе от системы $\left\{ O, \vec{g}_1, \vec{g}_2 \right\}$ к системе $\left\{ O', \vec{g}\,'_1, \vec{g}\,'_2 \right\}$ справедливы равенства

$$\left\| \vec{r} \right\|_g = \left\| S \right\| \left\| \vec{r} \right\|_{g'} \quad \text{и} \quad \left\| \vec{r}^{\,*} \right\|_g = \left\| S \right\| \left\| \vec{r}^{\,*} \right\|_{g'} .$$

Подставив эти соотношения в равенство (5.3.1), получим

$$\left\| S \right\| \left\| \vec{r}^{\,*} \right\|_{g'} = \left\| \hat{A} \right\|_g \left\| S \right\| \left\| \vec{r} \right\|_{g'} \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \left\| \vec{r}^{\,*} \right\|_{g'} = \left\| S \right\|^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_g \left\| S \right\| \left\| \vec{r} \right\|_{g'} .$$

Почленное вычитание этого равенства из (5.3.2) дает

$$\left(\left\| \hat{A} \right\|_{g'} - \left\| S \right\|^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_g \left\| S \right\| \right) \left\| \vec{r} \right\|_{g'} = \left\| \vec{o} \right\| .$$

Последнее равенство верно для любого вектора $\left\| \vec{r} \right\|_{g'}$. Поэтому, в силу леммы 5.1.2, выражение, стоящее в круглых скобках, есть нулевая матрица. Откуда следует

$$\left\| \hat{A} \right\|_{g'} = \left\| S \right\|^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_g \left\| S \right\| .$$

Теорема доказана.

Следствие 5.3.3 **Величина $\det \left\| \hat{A} \right\|_g$ не зависит от выбора базиса.**

Доказательство.

Поскольку определитель произведения матриц равен произведению определителей сомножителей, то в силу теоремы 5.3.3 и невырожденности матрицы перехода $\| S \|$ имеем

$$\det \left\| \hat{A} \right\|_{g'} = \det \left(\| S \|^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_g \| S \| \right) =$$

$$= \det \| S \|^{-1} \det \left\| \hat{A} \right\|_g \det \| S \| =$$

$$= \frac{1}{\det \| S \|} \det \left\| \hat{A} \right\|_g \det \| S \| = \det \left\| \hat{A} \right\|_g .$$

Следствие доказано.

`Задача 5.3.2` *В ортонормированной системе координат найти формулы, задающие оператор ортогонального проектирования точек координатной плоскости на прямую*

$$x + 3y - 2 = 0\,.$$

`Решение.` Пусть точка-прообраз M имеет радиус-вектор с координатным представлением $\left\|\vec{r}_0\right\| = \left\|\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}\right\|$, а точка M^* — образ точки M — радиус-вектор $\left\|\vec{r}_0^{\,*}\right\| = \left\|\begin{matrix} x_0^* \\ y_0^* \end{matrix}\right\|$.

Из определения ортогональной проекции следует, что M^* есть точка пересечения прямой $x + 3y - 2 = 0$ и перпендикуляра к ней, проходящего через M. См. рис. 2.

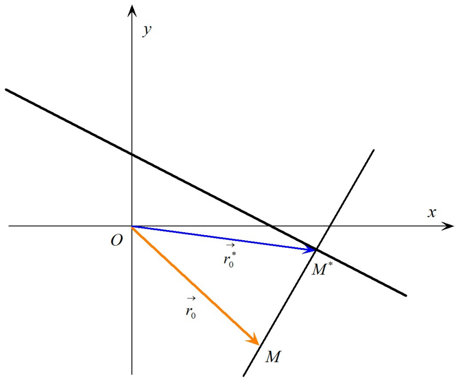

Рис. 2. К решению задачи 5.3.2

Поскольку нормальный вектор прямой $x + 3y - 2 = 0$ является направляющим вектором этого перпендикуляра, то уравнение последнего в параметрической форме будет иметь вид

$$\left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right\| + \tau \left\| \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right\| \qquad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Откуда следует, что координаты радиуса-вектора точки M^* будут удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x_0^* = x_0 + \ \tau\,, \\ y_0^* = \ y_0 + 3\tau\,, \\ x_0^* + 3y_0^* - 2 = 0\,. \end{cases}$$

Исключив из уравнений этой системы параметр τ, получим

$$\begin{cases} x_0^* \ = \ \frac{9}{10}\,x_0 - \frac{3}{10}\,y_0 + \frac{1}{5}\,, \\ y_0^* \ = \ -\frac{3}{10}\,x_0 + \frac{1}{10}\,y_0 + \frac{3}{5}\,. \end{cases} \tag{5.3.3}$$

Формулы (5.3.3) выражают координаты точки $M*$ — ортогональной проекции произвольной точки M на заданную прямую — через координаты точки M. Следовательно, эти формулы являются искомыми.

В матричном виде ответ можно представить так:

$$\left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| = \left\| \hat{A} \right\|_e \left\| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\|,$$

где

$$\left\| \hat{A} \right\|_e = \left\| \begin{matrix} \frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{matrix} \right\|.$$

В заключение отметим, что из формул (5.3.3) следует, что оператор $\hat{A}$ ортогонального проектирования точки на прямую является линейным и что он не имеет обратного (проверьте это самостоятельно).

Решение получено.

Аффинные преобразования и их свойства

Линейные операторы, преобразующие плоскость саму в себя (то есть линейные операторы вида $\hat{A} : P \to P$) и *имеющие обратный оператор*, играют важную с практической точки зрения роль и потому выделяются в специальный класс.

Определение 5.4.1

Линейный оператор $\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1 , \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2 , \end{cases}$ отображающий плоскость P саму на себя, с матрицей $\left\| \hat{A} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \right\|$, для которой в любом базисе $\det \left\| \hat{A} \right\|_g \neq 0$, называется *аффинным преобразованием плоскости.*

Теорема 5.4.1 (признак аффинности)

Если для линейного преобразования плоскости $\det \left\| \hat{A} \right\|_g \neq 0$ в некоторой декартовой системе координат, то это преобразование аффинное.

Доказательство.

По следствию 5.3.3 определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса, поэтому для аффинности линейного преобразования достаточно, чтобы хотя бы в одном базисе $\det \left\| \hat{A} \right\|_g \neq 0$.

Теорема доказана.

Теорема 5.4.2 **Каждое аффинное преобразование имеет единственное обратное, которое также является аффинным.**

Доказательство.

Поскольку $\det \left\| \hat{A} \right\|_g \neq 0$, то матрица $\left\| \hat{A} \right\|_g^{-1}$ существует, единственна и невырожденная (см. § 5.1), а в силу теоремы 1.1.2 (Крамера) система линейных уравнений

$$\left\| \hat{A} \right\|_g \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\| - \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\|$$

всегда имеет единственное решение $\left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\|$ для любого столбца $\left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\|$. Но это означает, что между образами и прообразами аффинного преобразования существует взаимно однозначное соответствие, то есть для $\hat{A}$ существует единственное обратное аффинное преобразование, задаваемое формулой

$$\left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| = \left\| \hat{A} \right\|_g^{-1} \left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\| - \left\| \hat{A} \right\|_g^{-1} \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\| .$$

Теорема доказана.

Задача 5.4.1 *Определитель матрицы, полученной при решении задачи 5.3.2, оказался равным нулю. Останется ли это равенство верным, если заменить прямую, на которую выполняется ортогональное проектирование, на некоторую другую?*

Теорема 5.4.3 **При аффинном преобразовании всякий базис переходит в базис, а для любых двух базисов существует единственное аффинное преобразование, переводящее первый базис во второй.**

Доказательство.

Пусть аффинное преобразование $\hat{A}$ задано формулами

$$\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1\,, \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2\,, \end{cases}$$

тогда образами первой пары базисных векторов будут векторы

$$\vec{g}_1^{\,*} = \alpha_{11}\,\vec{g}_1 + \alpha_{21}\,\vec{g}_2 \qquad \text{и} \qquad \vec{g}_2^{\,*} = \alpha_{12}\,\vec{g}_1 + \alpha_{22}\,\vec{g}_2\,.$$

А поскольку $\det\left\|\hat{A}\right\|_g = \det\left\|\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix}\right\| \neq 0$, то векторы $\vec{g}_1^{\,*}$ и g_2^* линейно независимы (теорема 1.6.2) и из них можно образовать базис.

Сопоставляя определение 1.8.2 (определение матрицы перехода) и следствие 5.3.1 (о строении матрицы линейного преобразования), замечаем, что в том случае, когда базис $\left\{\vec{g}_1^{\,*}, \vec{g}_2^{\,*}\right\}$ является образом базиса $\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\right\}$ при аффинном преобразовании $\hat{A}$, матрица преобразования и матрица перехода от базиса $\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\right\}$ к базису $\left\{\vec{g}_1^{\,*}, \vec{g}_2^{\,*}\right\}$ совпадают, то есть $\|S\| = \left\|\hat{A}\right\|_g$.

Но поскольку для любой пары базисов матрица перехода существует, единственна и невырождена, то и преобразование, переводящее первый базис во второй, существует, аффинное и единственное.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос о том, что происходит с различными геометрическими объектами на плоскости при ее аффинном преобразовании.

Теорема 5.4.4 **При аффинном преобразовании образом прямой линии является прямая.**

Доказательство.

Пусть даны прямая $\begin{cases} x = x_0 + \tau p\,, \\ y = y_0 + \tau q\,, \end{cases}$ где p и q — не равные нулю одновременно, координаты направляющего вектора прямой, и аффинное преобразование

$$\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1\,, \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2\,. \end{cases}$$

Тогда образом прямой будет множество точек плоскости с координатами

$$\begin{cases} x^* = \big(\alpha_{11}x_0 + \alpha_{12}y_0 + \beta_1\big) + \tau\big(\alpha_{11}p + \alpha_{12}q\big)\,, \\ y^* = \big(\alpha_{21}x_0 + \alpha_{22}y_0 + \beta_2\big) + \tau\big(\alpha_{21}p + \alpha_{22}q\big)\,. \end{cases}$$

Заметим, что если $\left|\,\alpha_{11}p + \alpha_{12}q\,\right| + \left|\,\alpha_{21}p + \alpha_{22}q\,\right| > 0$, то это множество — прямая.

Предположим противное, пусть

$$\begin{cases} \alpha_{11}p + \alpha_{12}q = 0\,, \\ \alpha_{21}p + \alpha_{212}q = 0\,, \end{cases}$$

тогда в силу аффинности преобразования, то есть условия $\det\left\|\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix}\right\| \neq 0$, и по теореме 1.1.2 (Крамера) решение $p = q = 0$ будет единственным для этой системы уравнений, что противоречит условию.

Теорема доказана.

Теорема 5.4.5 **При аффинном преобразовании образом параллельных прямых являются параллельные прямые, общая точка пересекающихся прямых-прообразов переходит в точку пересечения их образов.**

Доказательство.

Предположим, что пара параллельных прямых переведена аффинным преобразованием в пересекающиеся или совпадающие прямые. Рассмотрим одну из точек, общих для образов прямых. Поскольку аффинное преобразование взаимно однозначно, то прообраз общей точки единственный и должен принадлежать одновременно каждой из прямых-прообразов. Однако таких точек нет, ибо прямые-прообразы параллельны. Следовательно, образы параллельных прямых также параллельны.

Если же прямые-прообразы пересекаются, то в силу однозначности аффинного преобразования образом их точки пересечения может быть только точка пересечения образов этих прямых.

Теорема доказана.

В качестве упражнения покажите, сто при аффинном преобразовании трапеция всегда переходит в трапецию.

Теорема 5.4.6 **При аффинном преобразовании сохраняется деление отрезка в данном отношении.**

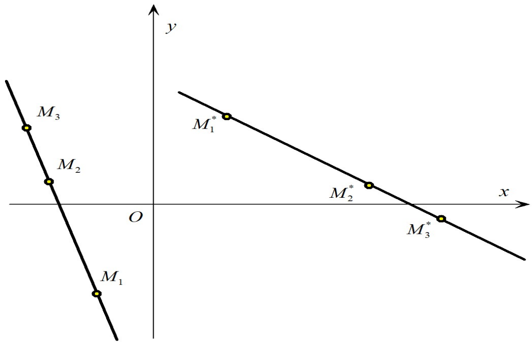

Рис. 3. К теореме 5.4.6

Доказательство.

Пусть точки $M_k^*,\ k = 1, 2, 3$ с координатами $\left\| \begin{matrix} x_k^* \\ y_k^* \end{matrix} \right\|$ являются образами попарно различных точек $M_k,\ k = 1, 2, 3$ (см. рис. 3) с координатами $\left\| \begin{matrix} x_k \\ y_k \end{matrix} \right\|$ соответственно. И пусть дано, что

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} = \lambda, \tag{5.4.1}$$

где $\lambda \neq -1$. Если преобразование аффинное, точки-образы также попарно различны. Кроме того, мы предположили, что одноименные координаты точек попарно различны. Случай, когда это не так, рассмотрите самостоятельно.

Нам нужно показать, что

$$\frac{x_2^* - x_1^*}{x_3^* - x_2^*} = \frac{y_2^* - y_1^*}{y_3^* - y_2^*} = \lambda.$$

Если аффинное преобразование задано в виде

$$\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1\,, \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2\,, \end{cases}$$

то, учитывая (5.4.1), имеем

$$\frac{x_2^* - x_1^*}{x_3^* - x_2^*} = \frac{\alpha_{11}(x_2 - x_1) + \alpha_{12}(y_2 - y_1)}{\alpha_{11}(x_3 - x_2) + \alpha_{12}(y_3 - y_2)} =$$

$$= \frac{\alpha_{11}\lambda(x_3 - x_2) + \alpha_{12}\lambda(y_3 - y_2)}{\alpha_{11}(x_3 - x_2) + \alpha_{12}(y_3 - y_2)} = \lambda\,.$$

Аналогично показывается, что $\dfrac{y_2^* - y_1^*}{y_3^* - y_2^*} = \lambda\,.$

Из полученных соотношений также следует равенство отношения длин образов и отношения длин прообразов отрезков, лежащих на одной прямой.

Проверим справедливость этих утверждений для случая ортонормированной системы координат.

В силу равенств (5.4.1) имеем

$$\frac{\left|\overrightarrow{M_1^* M_2^*}\right|}{\left|\overrightarrow{M_2^* M_3^*}\right|} = \frac{\sqrt{(x_2^* - x_1^*)^2 + (y_2^* - y_1^*)^2}}{\sqrt{(x_3^* - x_2^*)^2 + (y_3^* - y_2^*)^2}} =$$

$$= \frac{|\lambda|\sqrt{(x_3^* - x_2^*)^2 + (y_3^* - y_2^*)^2}}{\sqrt{(x_3^* - x_2^*)^2 + (y_3^* - y_2^*)^2}} = |\lambda| = \frac{|\lambda|\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} = \frac{\left|\overrightarrow{M_1 M_2}\right|}{\left|\overrightarrow{M_2 M_3}\right|}.$$

Теорема доказана.

Отметим также, что из теоремы 5.4.6 непосредственно вытекает, что при аффинном преобразовании отрезок прямой переходит в отрезок.

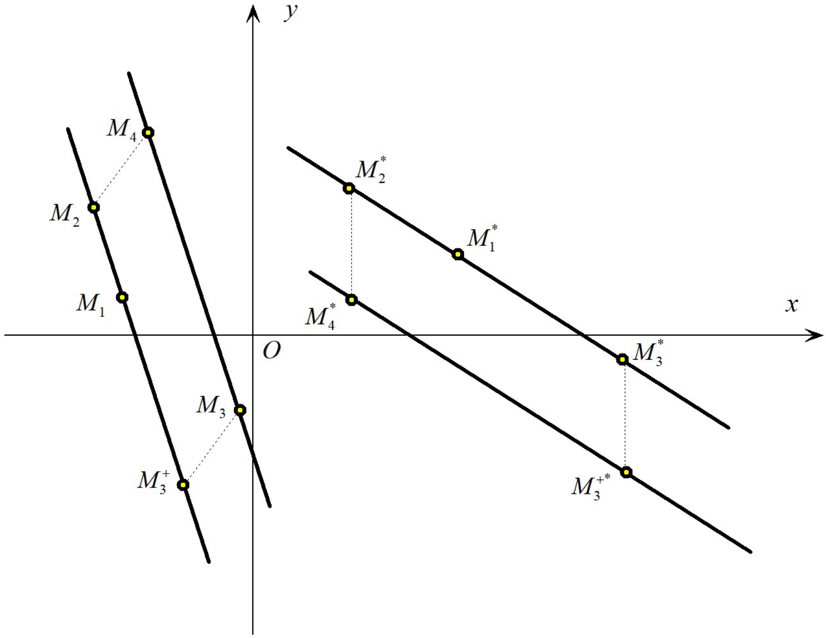

Рис. 4. К теореме 5.4.7

Теорема 5.4.7 **При аффинном преобразовании отношение длин образов двух отрезков, лежащих на параллельных прямых, равно отношению длин прообразов этих отрезков.**

Доказательство.

Пусть попарно несовпадающие точки M_1, M_2 и M_3, M_4 лежат на параллельных прямых, а точки M_1^*, M_2^* и M_3^*, M_4^* соответственно их образы при некотором аффинном преобразовании (см. рис. 4) и пусть известно, что $\dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\overrightarrow{M_3M_4}\right|} = |\lambda|$.

Проведем прямую $M_3M_3^+$, параллельную M_2M_4. Поскольку при аффинном преобразовании образы параллельных прямых параллельны, то согласно теореме 5.4.6 $M_4M_2M_3^+M_3$ и $M_4^*M_2^*M_3^{+*}M_3^*$ — параллелограммы. Следовательно, $\left|\overrightarrow{M_2^*M_4^*}\right| = \left|\overrightarrow{M_3^*M_3^{+*}}\right|$.

Наконец, еще раз используя теорему 5.4.6, получаем

$$\frac{\left|\overrightarrow{M_1^*M_2^*}\right|}{\left|\overrightarrow{M_3^*M_4^*}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{M_1^*M_2^*}\right|}{\left|\overrightarrow{M_3^{+*}M_2^*}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\overrightarrow{M_3^+M_2}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\overrightarrow{M_3M_4}\right|} = |\lambda|.$$

Теорема доказана.

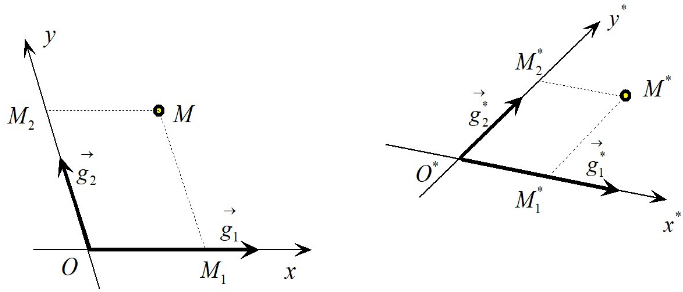

Рис. 5. К теореме 5.4.8

Теорема 5.4.8 **При аффинном преобразовании всякая декартова система координат переходит в декартову систему координат, причем координаты образа каждой точки плоскости в новой системе координат будут совпадать с координатами прообраза в исходной.**

Доказательство.

Пусть исходная система координат образована базисом $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ и началом координат O. Согласно теореме 5.4.3 при аффинном преобразовании базис переходит в базис. Дополняя преобразованный базис образом начала координат O^*, мы получаем преобразованную систему координат $\{O^*, \vec{g}_1^*, \vec{g}_2^*\}$.

Пусть в исходной системе координаты точки-прообраза M суть x и y, а в преобразованной системе координаты точки-образа M^* суть x^* и y^*, (рис. 5), тогда в силу теоремы 5.4.6 будут справедливы соотношения

$$|\,x\,| = \frac{\left|O\vec{M}_1\right|}{|\,\vec{g}_1|} = \frac{\left|O^*\vec{M}_1^*\right|}{|\,\vec{g}_1^*|} = |\,x^*|\,,$$

$$|\,y\,| = \frac{\left|O\vec{M}_2\right|}{|\,\vec{g}_2|} = \frac{\left|O^*\vec{M}_2^*\right|}{|\,\vec{g}_2^*|} = |\,y^*|\,.$$

Наконец, интерпретируя с помощью определения 1.2.4 знак координаты как сонаправленость (или противонаправленность) для каждой из пар векторов

$$\left\{\vec{g}_1,\, O\vec{M}_1\right\},\ \left\{\vec{g}_2,\, O\vec{M}_2\right\},\ \left\{\vec{g}_1^*,\, O^*\vec{M}_1^*\right\} \text{ и } \left\{\vec{g}_2^*,\, O^*\vec{M}_2^*\right\},$$

приходим к заключению о справедливости утверждения теоремы.

Теорема доказана.

При выяснении геометрического смысла модуля и знака детерминанта матрицы аффинного преобразования оказывается удобным использование (альтернативного определению 1.8.3) определения ориентации пары неколлинеарных векторов на плоскости.

Определение 5.4.2	Пусть $\vec{n}$ есть нормальный вектор плоскости P, направленный в сторону наблюдателя. Тогда пару неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, лежащих в этой плоскости, назовем *правоориентированной*, если существует $\lambda > 0$ (и соответственно *левоориентированной*, если существует $\lambda < 0$) такое, что $[\vec{a}, \vec{b}] = \lambda \vec{n}$.

Тогда будет справедлива

Теорема 5.4.9

1. При аффинном преобразовании с матрицей

$$\left\| \hat{A} \right\|_g = \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{array} \right\|$$

величины S^* **— площади образа параллелограмма и** S **– площади прообраза параллелограмма связаны соотношением**

$$S^* = \left| \det \left\| \hat{A} \right\|_g \right| \cdot S\,.$$

2. При аффинном преобразовании ориентация образов пары неколлинеарных векторов совпадает с ориентацией прообразов, если $\det \left\| \hat{A} \right\|_g > 0\,,$ **и меняется на противоположную, если** $\det \left\| \hat{A} \right\|_g < 0\,.$

Доказательство.

При аффинном преобразовании параллелограмм переходит в параллелограмм.

Рассмотрим некоторый базис, образованный векторами $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$, образы которых при аффинном преобразовании $\hat{A}$, согласно следствию 5.3.2, имеют вид

$$\vec{g}_1^{\,*} = \hat{A}\vec{g}_1 = \alpha_{11}\vec{g}_1 + \alpha_{21}\vec{g}_2 \qquad \text{и} \qquad \vec{g}_2^{\,*} = \hat{A}\vec{g}_2 = \alpha_{12}\vec{g}_1 + \alpha_{22}\vec{g}_2 .$$

По свойству векторного произведения (см. § 2.4) площадь параллелограмма, построенного на базисных векторах $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$, равна $S = \Big|\,[\,\vec{g}_1,\,\vec{g}_2\,]\,\Big|$, а площадь параллелограмма, построенного на их образах, будет $S^* = \Big|\,[\,\vec{g}_1^{\,*},\,\vec{g}_2^{\,*}\,]\,\Big|$.

Тогда $\quad [\,\vec{g}_1^{\,*},\,\vec{g}_2^{\,*}\,] = [\,\alpha_{11}\vec{g}_1 + \alpha_{21}\vec{g}_2,\ \alpha_{12}\vec{g}_1 + \alpha_{22}\vec{g}_2\,] =$

$$= (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})[\,\vec{g}_1,\,\vec{g}_2\,] \qquad \text{и} \tag{5.4.2}$$

$$\Big|[\,\vec{g}_1^{\,*},\,\vec{g}_2^{\,*}\,]\Big| = \Big|\det\big\|\hat{A}\,\big\|_g\Big|\cdot\Big|[\,\vec{g}_1,\,\vec{g}_2\,]\Big| \qquad \Rightarrow \qquad S^* = \Big|\det\big\|\hat{A}\,\big\|_g\Big|\cdot S.$$

Из соотношения (5.4.2) согласно определению 5.4.2 также следует, что ориентация пары векторов $\vec{g}_1^{\,*}$ и $\vec{g}_2^{\,*}$ совпадает с ориентацией пары $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$ при $\det\big\|\hat{A}\,\big\|_g > 0$, и меняется на противоположную при $\det\big\|\hat{A}\,\big\|_g < 0$.

Наконец, отметим, что полученные соотношения будут выполнены для любого базиса, а значит, и для любого параллелограмма.

Теорема доказана.

Теорема 5.4.10 **Для любой линии второго порядка, указанной в формулировке теоремы 4.4.1:**

1. **При аффинном преобразовании ее тип и вид не могут измениться.**
2. **Найдется аффинное преобразование, переводящее ее в любую другую линию второго порядка этого же типа и вида.**

Доказательство.

Рассмотрим первое утверждение теоремы.

1. В силу теорем 5.4.6 и 5.4.8 параллелограмм вместе со своей внутренней частью переходит в параллелограмм, и, значит, ограниченная линия перейдет в ограниченную. Отсюда следует, что эллипсы и точки могут переходить только в эллипсы и точки. С другой стороны, точка не может переходить в эллипс и наоборот, поскольку это противоречит взаимной однозначности аффинного преобразования.

2. Среди линий второго порядка только гиперболы и параллельные прямые имеют несвязанные ветви, то есть существует прямая, не пересекающая линию второго порядка, такая, что ветви этой линии расположены по разные стороны от прямой. Сохранение данного свойства при аффинном преобразовании очевидно. Параллельные же прямые не могут перейти в ветви гиперболы в силу теоремы 5.4.5.

3. Среди непрямых линий второго порядка только парабола является неограниченной связной кривой. Следовательно, при аффинном преобразовании парабола может перейти только в параболу.

4. Если линия второго порядка есть точка, прямая или же пара параллельных или пересекающихся прямых, то из утверждений теорем 5.4.4 и 5.4.5 вытекает, что их тип не может измениться.

Рассмотрим второе утверждение теоремы.

Из теорем 4.4.1 и 5.4.3 следует, что для каждой линии второго порядка может быть построено аффинное преобразование, приводящее уравнение линии к одной из следующих девяти форм:

$$\begin{array}{llllll} x'^2 + y'^2 & = \pm 1\,, & x'^2 - \ y'^2 & = 1\,, & x'^2 \pm y'^2 & = 0\,, \\ y'^2 \pm 1 & = 0\,, & y'^2 - 2x' & = 0\,, & y'^2 & = 0\,. \end{array} \qquad (5.4.3)$$

Пусть линии второго порядка L_1 и L_2 приводятся к одной и той же форме в списке (5.4.3) соответственно аффинными преобразованиями $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$. Тогда произведение преобразований $\hat{A}_2^{-1}\hat{A}_1$ очевидно переведет линию L_1 и L_2.

Произведение аффинных преобразований также аффинное. Поэтому приходим к заключению о справедливости второго утверждения теоремы.

`Теорема доказана.`

`Замечание 5.4.1.` Изменение при аффинном преобразовании типа линии второго порядка оказывается также невозможным и для случая «пустых множеств». Справедливость этого утверждения будет показана в теореме 9.4.1.

Таким образом, аффинным преобразованием нельзя переместить линию второго порядка из одной клетки таблицы в формулировке теоремы 4.4.1 в другую.

Теорема 5.4.11 **Для всякого аффинного преобразования существует пара взаимно ортогональных направлений, которые переводятся данным аффинным преобразованием во взаимно ортогональные.**

Доказательство.

Пусть в ортонормированной системе координат задана пара взаимно ортогональных направлений ненулевыми векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ с координатными представлениями $\left\|\vec{p}\right\|_e = \left\|\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}\right\|$ и $\left\|\vec{q}\right\|_e = \left\|\begin{matrix}\eta\\ -\xi\end{matrix}\right\|$.

Потребуем, чтобы их образы (*неколлинеарные* в силу аффинности $\widehat{A}$)

$$\left\|\vec{p}^*\right\|_e = \left\|\begin{matrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\alpha_{11}\xi+\alpha_{12}\eta\\ \alpha_{21}\xi+\alpha_{22}\eta\end{matrix}\right\|$$

и

$$\left\|\vec{q}^*\right\|_e = \left\|\begin{matrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}\eta\\ -\xi\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\alpha_{11}\eta-\alpha_{12}\xi\\ \alpha_{21}\eta-\alpha_{22}\xi\end{matrix}\right\|$$

были также взаимно ортогональны.

Условие ортогональности векторов $\vec{p}^*$ и $\vec{q}^*$ в ортонормированном базисе $\left\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\right\}$ имеет вид

$$(\alpha_{11}\xi+\alpha_{12}\eta)(\alpha_{11}\eta-\alpha_{12}\xi)+(\alpha_{21}\xi+\alpha_{22}\eta)(\alpha_{21}\eta-\alpha_{22}\xi)=0$$

или

$$-\left(\alpha_{11}\alpha_{12}+\alpha_{21}\alpha_{22}\right)\xi^2+\left(\alpha_{11}^2-\alpha_{12}^2+\alpha_{21}^2-\alpha_{22}^2\right)\xi\eta+$$
$$+\left(\alpha_{11}\alpha_{12}+\alpha_{21}\alpha_{22}\right)\eta^2=0\,.$$

После очевидного переобозначения коэффициентов приходим к уравнению

$$U\xi^2-2V\xi\eta-U\eta^2=0\,.$$

Рассмотрим следующие случаи:

1. Если $U = V = 0$, то любая пара взаимно ортогональных векторов данным аффинным преобразованием переводится во взаимно ортогональную пару векторов.
2. Если $U = 0$ и $V \neq 0$, то $\xi\eta = 0$, значит, искомая пара векторов — базисная.
3. Наконец, если $U \neq 0$, то отношение координат векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ находится из квадратного уравнения

$$\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2 - \frac{2V}{U}\left(\frac{\xi}{\eta}\right) - 1 = 0\,,$$

имеющего действительные решения

$$\left(\frac{\xi}{\eta}\right)_{1,2} = \frac{V}{U} \pm \sqrt{\frac{V^2}{U^2} + 1}$$

при любом ненулевом U.

Теорема доказана.

Ортогональные преобразования плоскости

Определение 5.5.1	*Ортогональным преобразованием плоскости* P называется линейный оператор вида $$\left\Vert \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\Vert = \left\Vert \hat{Q} \right\Vert_e \left\Vert \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\Vert + \left\Vert \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\Vert ,$$ матрица которого $\left\Vert \hat{Q} \right\Vert_g = \left\Vert \begin{matrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{matrix} \right\Vert$, *ортогональная* [1] в *любой ортонормированной* системе координат.

Заметим, что ортогональное преобразование является частным случаем аффинного преобразования, поскольку в силу теоремы 5.1.3 имеет место либо $\det \left\Vert \hat{Q} \right\Vert_e = 1$, либо $\det \left\Vert \hat{Q} \right\Vert_e = -1$.

[1] См. определение 5.1.4.

Помимо аффинных свойств, ортогональные преобразования обладают своими специфическими особенностями. Рассмотрим основные из них.

Признак того, что некоторый линейный оператор является ортогональным, может быть сформулирован как

Теорема 5.5.1 **Линейный оператор на плоскости является ортогональным, если его матрица ортогональная хотя бы в одной ортонормированной системе координат.**

Доказательство.

Пусть на плоскости имеются два ортонормированных базиса $\left\{\vec{e}_1,\, \vec{e}_2\right\}$ и $\left\{\vec{e}\,'_1,\, \vec{e}\,'_2\right\}$ с матрицей перехода $\|\, S \,\|$. Согласно следствию 5.1.1, эта матрица ортогональная и для нее справедливо равенство $\|\, S \,\|^{-1} = \|\, S \,\|^{\mathrm{T}}$.

Пусть матрица оператора $\hat{Q}$ ортогональна в $\left\{\vec{e}_1,\, \vec{e}_2\right\}$, то есть для нее $\left\|\, \hat{Q} \,\right\|_e^{-1} = \left\|\, \hat{Q} \,\right\|_e^{\mathrm{T}}$.

Перейдем к базису $\left\{\vec{e}\,'_1,\, \vec{e}\,'_2\right\}$, в котором матрица линейного оператора $\hat{Q}$, согласно теореме 5.3.3 будет иметь вид

$$\left\|\, \hat{Q} \,\right\|_{e'} = \|\, S \,\|^{-1} \left\|\, \hat{Q} \,\right\|_e \|\, S \,\| \,.$$

Найдем в новом базисе матрицу $\left\| \hat{Q} \right\|_{e'}^{-1}$. Использовав теоремы 5.1.1 и 5.1.2, а также ортогональность матриц $\| S \|$ и $\left\| \hat{Q} \right\|_{e}$, получим

$$\left\| \hat{Q} \right\|_{e'}^{-1} = \left(\| S \|^{-1} \left\| \hat{Q} \right\|_{e} \| S \| \right)^{-1} = \| S \|^{-1} \left\| \hat{Q} \right\|_{e}^{-1} \left(\| S \|^{-1} \right)^{-1} =$$

$$= \| S \|^{-1} \left\| \hat{Q} \right\|_{e}^{-1} \| S \| = \| S \|^{\mathrm{T}} \left\| \hat{Q} \right\|_{e}^{\mathrm{T}} \left(\| S \|^{\mathrm{T}} \right)^{\mathrm{T}} =$$

$$= \left(\| S \|^{\mathrm{T}} \left\| \hat{Q} \right\|_{e} \| S \| \right)^{\mathrm{T}} = \left(\| S \|^{-1} \left\| \hat{Q} \right\|_{e} \| S \| \right)^{\mathrm{T}} = \left\| \hat{Q} \right\|_{e'}^{\mathrm{T}}.$$

Но равенство $\left\| \hat{Q} \right\|_{e'}^{-1} = \left\| \hat{Q} \right\|_{e'}^{\mathrm{T}}$ означает, что матрица линейного оператора $\hat{Q}$ ортогональная и в базисе $\left\{ \vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2 \right\}$.

Теорема доказана.

Теорема 5.5.2 **В ортонормированной системе координат ортогональное преобразование плоскости сохраняет:**

1. **Скалярное произведение векторов.**
2. **Длины векторов и расстояния между точками плоскости.**
3. **Величины углов между прямыми.**

Доказательство.

1. Пусть дано ортогональное преобразование плоскости $\hat{Q}$ с матрицей $\left\| \hat{Q} \right\|_e$ в ортонормированной системе координат $\left\{ O,\, \vec{e}_1,\, \vec{e}_2 \right\}$.

   Тогда, как было показано в § 2.3, скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с координатными представлениями

$$\|\,\vec{a}\,\|_e = \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \end{array} \right\| \qquad \text{и} \qquad \left\|\,\vec{b}\,\right\|_e = \left\| \begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_2 \end{array} \right\|$$

   в ОНБ выражается в следующем виде:

$$(\vec{a},\,\vec{b}) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 = \|\,\xi_1\ \xi_2\,\| \left\| \begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_2 \end{array} \right\| = \|\,\vec{a}\,\|_e^{\mathrm{T}} \left\|\,\vec{b}\,\right\|_e .$$

   Для скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, учитывая ортогональность матрицы $\left\| \hat{Q} \right\|_e$, получаем

$$(\hat{Q}\vec{a},\,\hat{Q}\vec{b}) = \left\| \hat{Q}\vec{a} \right\|_e^{\mathrm{T}} \left\| \hat{Q}\vec{b} \right\|_e = \left(\left\| \hat{Q} \right\|_e \|\,\vec{a}\,\|_e \right)^{\mathrm{T}} \left\| \hat{Q} \right\|_e \left\|\,\vec{b}\,\right\|_e =$$

$$= \|\,\vec{a}\,\|_e^{\mathrm{T}} \left\|\,\hat{Q}\,\right\|_e^{\mathrm{T}} \left\|\,\hat{Q}\,\right\|_e \left\|\vec{b}\right\|_e = \|\,\vec{a}\,\|_e^{\mathrm{T}} \left\|\,\hat{Q}\,\right\|_e^{-1} \left\|\,\hat{Q}\,\right\|_e \left\|\vec{b}\right\|_e =$$

$$= \|\,\vec{a}\,\|_e^{\mathrm{T}} \left\|\,\hat{E}\,\right\| \left\|\vec{b}\right\|_e = \|\,\vec{a}\,\|_e^{\mathrm{T}} \left\|\vec{b}\right\|_e = (\,\vec{a},\,\vec{b})\,.$$

Равенство $(\hat{Q}\vec{a},\,\hat{Q}\vec{b}) = (\,\vec{a},\,\vec{b})$ означает, что при ортогональном преобразовании плоскости скалярное преобразование сохраняется в любом ортонормированном базисе.

2. Из сохранения при ортогональном преобразовании скалярного произведения для любой пары векторов следует сохранение длин векторов, поскольку

$$\left|\hat{Q}\vec{a}\right| = \sqrt{\,(\hat{Q}\vec{a},\hat{Q}\vec{a})\,} = |\sqrt{\,(\vec{a},\vec{a})\,} = |\,\vec{a}\,|\,.$$

3. В силу 2 при ортогональном преобразовании равные треугольники переходят в равные (третий признак равенства треугольников), и величины углов между векторами на плоскости будут сохраняться.

Теорема доказана.

Используя свойства ортогональных преобразований, покажем, что для аффинных преобразований справедлива следующая важная теорема.

Теорема 5.5.3 **Каждое аффинное преобразование может быть представлено в виде произведения ортогонального преобразования и двух сжатий по взаимно ортогональным направлениям.**

Доказательство.

1. В силу следствия 5.3.2, а также справедливости утверждений задачи 5.3.1 и примера 5.3.1 нам достаточно убедиться, что матрица каждого аффинного преобразования в любом ортонормированном базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$ может быть представлена в виде произведения ортогональной матрицы и диагональной матрицы с положительными значениями диагональных элементов.

2. По теореме 5.4.11 существует ортогональный (но, вообще говоря, не нормированный) базис $\left\{ \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2 \right\}$, в который данное аффинное преобразование $\hat{A}$ переведет исходный ортонормированный базис $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\}$. При этом существуют положительные нормирующие множители κ_1 и κ_2, такие, что

$$\vec{e}\,'_1 = \frac{\vec{\varepsilon}_1}{\kappa_1}\,, \qquad \vec{e}\,'_2 = \frac{\vec{\varepsilon}_2}{\kappa_2}\,, \qquad \kappa_1 = |\,\vec{\varepsilon}_1\,|\,, \qquad \kappa_2 = |\,\vec{\varepsilon}_2\,|\,,$$

то есть $\left\{ \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2 \right\}$ — ортонормированный базис.

3. С другой стороны, линейное преобразование $\hat{Q}$, переводящее ортонормированный базис $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\}$ в ортонормированный базис $\left\{ \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2 \right\}$, очевидно, ортогональное и имеет в исходном базисе ортогональную матрицу $\|\hat{Q}\|_e$. Тогда будут справедливы соотношения

$$\left\| \begin{matrix} \vec{\varepsilon}_1 \\ \vec{\varepsilon}_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \vec{e}\,'_1 \\ \vec{e}\,'_2 \end{matrix} \right\|,$$

$$\left\| \begin{matrix} \vec{e}\,'_1 \\ \vec{e}\,'_2 \end{matrix} \right\| = \left\|\hat{Q}\right\|_e^{\mathrm{T}} \left\| \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} \vec{\varepsilon}_1 \\ \vec{\varepsilon}_2 \end{matrix} \right\| = \left\|\hat{A}\right\|_e^{\mathrm{T}} \left\| \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{matrix} \right\|,$$

из которых следует равенство

$$\left(\left\|\hat{A}\right\|_e^{\mathrm{T}} - \left\| \begin{matrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{matrix} \right\| \left\|\hat{Q}\right\|_e^{\mathrm{T}} \right) \left\| \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \vec{o} \\ \vec{o} \end{matrix} \right\|.$$

Тогда в силу линейной независимости базисных векторов $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\}$ мы имеем $\left\|\hat{A}\right\|_e^{\mathrm{T}} = \left\| \begin{matrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{matrix} \right\| \left\|\hat{Q}\right\|_e^{\mathrm{T}}$ или после транспонирования обеих частей этого равенства

$$\left\|\hat{A}\right\|_e = \left\|\hat{Q}\right\|_e \left\| \begin{matrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{matrix} \right\|.$$

Таким образом, аффинное преобразование представимо в виде произведения ортогонального преобразования и оператора «сжатия к осям» (см. пример 5.3.1).

`Теорема доказана.`

Понятие группы

Определение 5.6.1	Множество G называется *группой по отношению к заданной операции*, если любым двум его элементам x и y этой операцией поставлен в соответствие третий элемент этого же множества, называемый *произведением* и обозначаемый xy , и если выполняются следующие условия: 1) $\forall x, y, z \in G : \quad x(yz) = (xy)z$, 2) существует элемент e, такой, что $\forall x \in G : \quad xe = ex = x$, 3) $\forall x \in G$ существует элемент x^{-1}, такой, что $x^{-1}x = e$.

Если, кроме того, $\forall x, y \in G : \quad xy = yx$, то группа называется *коммутативной*, или *абелевой*.

Пример 5.6.1

Группами являются, например:

1) множество *вещественных чисел относительно операции сложения*, где e – число 0;

2) множество *положительных вещественных чисел относительно операции умножения*, где e – число 1;

3) множество *поворотов плоскости вокруг фиксированной точки относительно операции композиции*;

4) множество *аффинных преобразований плоскости относительно операции композиции.*