Определители

Рассмотрим множество, состоящее из n натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, n$. Будем обозначать *перестановки* этих чисел (то есть последовательную их запись в некотором порядке без пропусков и повторений) как $\{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n\}$. Напомним, что полное число таких различных перестановок равно $n!$.

Определение 6.1.1	Будем говорить, что числа k_i и k_j образуют в перестановке *беспорядок* (*нарушение порядка*, или *инверсию*), если при $i > j$ имеет место $k_i < k_j$.

Полное число беспорядков в перестановке $\{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n\}$ будем обозначать $\text{Б}(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n)$. Например, $\text{Б}(3, 1, 4, 2) = 3$.

Пусть дана квадратная матрица

$$\|A\| = \left\| \begin{array}{ccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{nn} \end{array} \right\| = \|\alpha_{ij}\| \qquad i, j = \overline{1, n} \; .$$

Определение 6.1.2	*Детерминантом* (или *определителем*) квадратной матрицы $\lVert A\rVert$ размера $n\times n$ называется число $\det\lVert A\rVert$, получаемое по формуле $$\det\lVert A\rVert = \sum_{\{k_1,k_2,\ldots,k_n\}} (-1)^{\text{Б}(k_1,k_2,\ldots,k_n)}\alpha_{1k_1}\alpha_{2k_2}\cdots\alpha_{nk_n},$$ где $\{k_1,k_2,\ldots,k_n\}$ — всевозможные различные перестановки, образованные из натуральных чисел $1,2,3,\ldots,n$.

Поскольку в данном определении указано, что сумма берется по всем возможным различным перестановкам, то число слагаемых равно $n!$.

Из определения 6.1.2 также вытекает, что каждое слагаемое содержит в качестве сомножителя по одному элементу матрицы из каждого столбца и каждой строки.

Задача 6.1.1	*Проверить совпадение определения 6.1.2 и определения детерминантов матриц второго и третьего порядков 1.1.9 и 1.1.10.*

Свойства определителей

Теорема 6.2.1 **При транспонировании квадратной матрицы ее определитель не меняется.**

Доказательство.

Общий вид слагаемого в формуле определителя транспонированной матрицы $\|B\| = \|A\|^{\mathrm{T}}$ будет

$$(-1)^{\text{Б}(m_1,m_2,\dots,m_n)}\beta_{1m_1}\beta_{2m_2}\cdots\beta_{nm_n},$$

а учитывая, что $\beta_{km_k} = \alpha_{m_k k}$, получим

$$\det\|A\|^{\mathrm{T}} = \\ = \sum_{\{m_1,m_2,\dots,m_n\}} (-1)^{\text{Б}(m_1,m_2,\dots,m_n)}\alpha_{m_1 1}\alpha_{m_2 2}\cdots\alpha_{m_n n}\,.$$

Упорядочим сомножители каждого слагаемого по номерам строк, то есть приведем их к виду

$$(-1)^{\text{Б}(m_1,m_2,\ldots,m_n)}\alpha_{1k_1}\alpha_{2k_2}\cdots\alpha_{nk_n}\,,$$

где $1,2,\ldots,n$ — номера строк, а $\{k_1,k_2,\ldots,k_n\}$ — номера соответствующих столбцов.

Отметим, что для введенных обозначений имеет место очевидное равенство:

$$k_{m_j}=j\ \ \forall j=\overline{1,n}\,, \tag{6.2.1}$$

поскольку транспонирование транспонированной матрицы дает матрицу исходную.

Покажем, что тогда

$$\text{Б}\,(m_1,m_2,\ldots,m_n)=\text{Б}\,(k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n)\,.$$

Действительно, пусть m_i и m_j дают беспорядок, то есть $m_i>m_j$ при $i<j$, тогда дают беспорядок и числа k_{m_i} и k_{m_j}, поскольку в силу (6.2.1) $k_{m_i}=i<j=k_{m_j}$ при $m_i>m_j$. Заметим, что верно и обратное утверждение.

Итак, при перестановке сомножителей абсолютная величина каждого слагаемого в формуле детерминанта не изменится, а знак останется тем же, поскольку не меняется число беспорядков. Окончательно получаем

$$\det\|A\|^{\mathrm{T}}=$$

$$=\sum_{\{k_1,k_2,\ldots,k_n\}}(-1)^{\text{Б}(k_1,k_2,\ldots,k_n)}\alpha_{1k_1}\alpha_{2k_2}\cdots\alpha_{nk_n}=\det\|A\|\,.$$

`Теорема доказана.`

Замечание 6.2.1. Утверждение теоремы 6.2.1 допускает следующую наглядную интерпретацию. Выделим в матрице элементы, входящие в некоторое слагаемое определения 6.1.2, и соединим их отрезками прямых, как показано на рис. 1.

Заметим, что пара элементов α_{ik_i} и α_{jk_j} дает беспорядок, если соединяющий их отрезок имеет «положительный» наклон, то есть правый конец отрезка расположен выше левого.

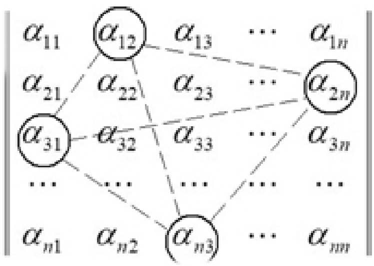

Рис. 1. К замечанию 6.2.1

Очевидно, что при транспонировании квадратной матрицы число отрезков с «положительным» наклоном не меняется, поэтому не меняется и знак каждого слагаемого формулы в определении 6.1.2, и, следовательно, значение определителя сохраняется.

Следствие 6.2.1 **Всякое свойство определителя матрицы, сформулированное для ее столбцов, справедливо для ее строк, и наоборот.**

Теорема 6.2.2 **При перестановке двух столбцов матрицы знак ее определителя меняется на противоположный.**

Доказательство.

Рассмотрим вначале случай, когда переставляются соседние столбцы. Поскольку общий вид слагаемых в выражении для определителя дается формулой

$$\sum_{\{k_1,k_2,\ldots,k_n\}} (-1)^{\text{Б}(k_1,k_2,\ldots,k_n)} \alpha_{1k_1}\alpha_{2k_2}\cdots\alpha_{nk_n}\ ,$$

то достаточно показать, что число беспорядков изменится при перестановке соседних столбцов на единицу.

Рассмотрим перестановку чисел

$$\Big\{k_1,\ldots,k_{i-1},k_i,k_{i+1},k_{i+2},\ldots,k_n\Big\}\,.$$

Если в ней поменять местами числа k_i и k_{i+1}, то число беспорядков, образуемых числами $\Big\{k_1,\ldots,k_{i-1},k_{i+2},\ldots,k_n\Big\}$, останется прежним, а за счет изменения порядка следования чисел k_i и k_{i+1} общее число беспорядков изменится на единицу. Это означает, что знак каждого слагаемого в формуле определителя изменится на противоположный и, следовательно, изменит знак и весь определитель.

Наконец, если требуется поменять местами столбцы, между которыми находится L столбцов, то для этого потребуется $L+L+1=2L+1$ перестановка соседних столбцов, и, поскольку $(-1)^{2L+1}=-1$, знак определителя опять-таки изменится на противоположный.

Теорема доказана.

Следствие 6.2.2 **Определитель матрицы, содержащей два одинаковых столбца, равен нулю.**

Доказательство.

При перестановке одинаковых столбцов значение определителя, с одной стороны, не меняется, но, с другой стороны, это значение должно изменить знак. Поэтому данный определитель может равняться только нулю.

Следствие доказано.

Теорема 6.2.3 (линейное свойство определителя) **Если k-й столбец матрицы задан в виде линейной комбинации некоторых «новых» столбцов, то ее определитель представим в виде той же линейной комбинации определителей матриц, k-ми столбцами которых являются соответствующие «новые» столбцы из исходной линейной комбинации.**

Доказательство.

Пусть в матрице $\|A\|_\alpha$ k-й столбец состоит из элементов $\alpha_{ik} = \lambda\beta_{ik} + \mu\gamma_{ik}$, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда справедливы равенства

$$(-1)^{\text{Б}(k_1,k_2,\ldots,k_n)}\alpha_{1k_1}\alpha_{2k_2}\ldots\alpha_{ik}\ldots\alpha_{nk_n} =$$

$$= (-1)^{\text{Б}(k_1,k_2,\ldots,k_n)}\alpha_{1k_1}\alpha_{2k_2}\ldots(\lambda\beta_{ik} + \mu\gamma_{ik})\ldots\alpha_{nk_n} =$$

$$= \lambda(-1)^{\text{Б}(k_1,k_2,\ldots,k_n)}\alpha_{1k_1}\alpha_{2k_2}\ldots(\beta_{ik})\ldots\alpha_{nk_n} +$$

$$+\mu(-1)^{\text{Б}(k_1,k_2,\ldots,k_n)}\alpha_{1k_1}\alpha_{2k_2}\cdots(\gamma_{ik})\ldots\alpha_{nk_n} .$$

А поскольку каждое из $n!$ слагаемых в формуле для $\det\|A\|_\alpha$ содержит точно по одному элементу из k-го столбца, то $\det\|A\|_\alpha = \lambda\det\|A\|_\beta + \mu\det\|A\|_\gamma$, где k-ые столбцы матриц $\|A\|_\beta$ и $\|A\|_\gamma$ соответственно состоят из элементов β_{ik} и γ_{ik}, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема доказана.

Следствие 6.2.3 **При вычислении определителя из столбца его матрицы можно выносить общий множитель.**

Следствие 6.2.4 **Если к некоторому столбцу матрицы прибавить линейную комбинацию остальных ее столбцов, то определитель матрицы не изменится.**

Доказательство.

Действительно, определитель, получившийся в результате данной операции с матрицей, можно (по теореме 6.2.3) представить в виде линейной комбинации исходного определителя и линейной комбинации определителей матриц, имеющих одинаковые столбцы. Последние равны нулю по следствию 6.2.2.

Следствие доказано.

Теорема 6.2.4 **Определитель произведения матриц размера $n\times n$ равен произведению их определителей, то есть**

$$\det\big(\|A\|\cdot\|B\|\big)=\det\|A\|\cdot\det\|B\|\,.$$

Доказательство.

1°. Обозначим $\|C\|=\|A\|\cdot\|B\|$. Пусть матрицы $\|A\|$, $\|B\|$ и $\|C\|$ имеют соответственно элементы α_{ij}, β_{kl} и γ_{pq}. Тогда по определению 5.1.1 $\quad \gamma_{pq}=\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{pj}\beta_{jq}\,,$ и потому

$$\det\|C\|=$$

$$=\det\left\|\begin{array}{ccc} \alpha_{11}\beta_{11}+\ldots+\alpha_{1n}\beta_{n1} & \cdots & \alpha_{11}\beta_{1n}+\ldots+\alpha_{1n}\beta_{nn} \\ \alpha_{21}\beta_{11}+\ldots+\alpha_{2n}\beta_{n1} & \cdots & \alpha_{21}\beta_{1n}+\ldots+\alpha_{2n}\beta_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1}\beta_{11}+\ldots+\alpha_{nn}\beta_{n1} & \cdots & \alpha_{n1}\beta_{1n}+\ldots+\alpha_{nn}\beta_{nn} \end{array}\right\|.$$

Введем в рассмотрение обобщенный тип перестановок натуральных чисел 1, 2, ..., n, в которых допускаются повторения одинаковых чисел. Такие перестановки условимся обозначать как $[1,\,2,\,\ldots,\,n]$.

По линейному свойству определителя (теорема 6.2.3):

$$\det \|C\| =$$

$$= \sum_{[l_1, l_2, \ldots, l_n]} \beta_{l_1 1}\beta_{l_2 2}\ldots\beta_{l_n n} \cdot \det \left\| \begin{matrix} \alpha_{1l_1} & \alpha_{1l_2} & \cdots & \alpha_{1l_n} \\ \alpha_{2l_1} & \alpha_{2l_2} & \cdots & \alpha_{2l_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{nl_1} & \alpha_{nl_2} & \cdots & \alpha_{nl_n} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \sum_{[l_1, l_2, \ldots, l_n]} \beta_{l_1 1}\beta_{l_2 2}\ldots\beta_{l_n n} \cdot \det \|A^*\|_{[l_1, l_2, \ldots, l_n]} \ .$$

Поскольку перестановки $[\,l_1, l_2, \ldots, l_n]$ (в отличие от $\{\,l_1, l_2, \ldots, l_n\}$) могут содержать одинаковые числа, то общее число слагаемых в полученной сумме равно n^n, но не равных нулю среди них в силу следствия 6.2.2 оказывается только $n!$.

2°. Заметим, что, поскольку матрицы $\|A^*\|_{[l_1, l_2, \ldots, l_n]}$ составлены из тех же столбцов, что и $\|A\|$, но записанных в разном порядке, то их определители могут отличаться друг от друга в силу теоремы 6.2.2 только знаком.

Перестроим каждую из матриц $\|A^*\|_{[l_1, l_2, \ldots, l_n]}$, переставив ее столбцы так, чтобы каждый столбец с индексом $l_k \quad k = [1, n]$ был расположен слева от столбцов с большими индексами.

В итоге этой операции столбцы будут полностью упорядочены, для чего потребуется число перестановок столбцов, равное числу беспорядков в перестановке $\{\, l_1,\, l_2,\, \ldots,\, l_n\}$, и, следовательно, для каждой матрицы $\|A^*\|_{[l_1,\, l_2,\, \ldots,\, l_n]}$ будет справедливо соотношение

$$\det \|A^*\|_{[l_1,\, l_2,\, \ldots,\, l_n]} = (-1)^{\text{Б}(l_1,\, l_2,\, \ldots,\, l_n)} \cdot \det \|A\| \ .$$

3°. Подставляя это соотношение в выражение для $\det \|C\|$, получаем

$$\det \|C\| =$$

$$= \det \|A\| \sum_{[l_1,\, l_2,\, \ldots,\, l_n]} (-1)^{\text{Б}(l_1,\, l_2,\, \ldots,\, l_n)} \beta_{l_1 1} \beta_{l_2 2} \ldots \beta_{l_n n} =$$

$$= \det \|A\| \cdot \det \|B\|^{\text{T}} ,$$

что в силу теоремы 6.2.1 означает

$$\det\big(\|A\| \cdot \|B\|\big) = \det \|A\| \cdot \det \|B\| \, .$$

Теорема доказана.

Разложение определителей

Выберем в *квадратной* матрице n-го порядка $\|A\|$ строки с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцы с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$, где $1 \le k \le n$. Заметим, что выбор строк и выбор столбцов выполняется *независимо друг от друга.*

Определение 6.3.1	Детерминант квадратной подматрицы порядка k, образованной элементами, стоящими на пересечении строк $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_k$, называется *минором* k-го порядка матрицы $\|A\|$ и обозначается $M^{j_1, j_2, \ldots, j_k}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$.

Определение 6.3.2	Детерминант квадратной подматрицы порядка $n-k$, образованной элементами, остающимися после удаления строк $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_k$, называется *дополнительным минором* (к минору $M^{j_1, j_2, \ldots, j_k}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$) и обозначается как $\overline{M}^{j_1, j_2, \ldots, j_k}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$.

Выберем в матрице $\|A\|$ i-ю строку и j-й столбец, на пересечении которых расположен элемент α_{ij}. Удалим из $\|A\|$ выбранные строку и столбец, рассмотрим квадратную подматрицу $\|A^*\|$ порядка $n-1$.

Определение 6.3.3	Детерминант матрицы $\|A^*\|$ называется *дополнительным минором элемента* α_{ij} и обозначается как $\overline{M}_i^j$.

Сгруппируем в определении 6.1.2 – детерминанта матрицы $\|A\|$ — *все* слагаемые, содержащие элемент α_{ij}, и вынесем его за скобки. Получим равенство вида

$$\det\|A\| = \alpha_{ij}D_{ij} + \ldots$$

Проверьте самостоятельно, что число сгруппированных слагаемых равно $(n-1)!$.

Определение 6.3.4	Число D_{ij} называется *алгебраическим дополнением элемента* α_{ij}.

Из определений 6.1.2 и 6.3.4 очевидны равенства

$$\begin{aligned} \det\|A\| &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}D_{ij} \qquad \forall i = [1,n], \\ \det\|A\| &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}D_{ij} \qquad \forall j = [1,n], \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

которые можно использовать для вычисления определителей квадратных матриц, находя значения алгебраических дополнений при помощи соотношений, которые устанавливает

Теорема 6.3.1 **Справедливы равенства**

$$D_{ij} = (-1)^{i+j}\,\overline{M}_i^j \qquad \forall i,j = [1,n]\,.$$

Доказательство.

1. По определению детерминанта 6.1.2

$$\det\|A\| =$$

$$= \alpha_{11} \sum_{\{1,k_2,\ldots,k_n\}} (-1)^{\text{Б}(1,k_2,\ldots,k_n)} \alpha_{2k_2}\cdots\alpha_{nk_n} + \ldots,$$

то есть

$$D_{11} = \sum_{\{k_2,\ldots,k_n\}} (-1)^{\text{Б}(k_2,\ldots,k_n)} \alpha_{2k_2}\alpha_{3k_3}\cdots\alpha_{nk_n} + \ldots,$$

поскольку очевидно, что Б $(1,k_2,\ldots,k_n) =$ Б $(k_2,\ldots,k_n)$, но тогда выражение для D_{11} совпадает с формулой определителя матрицы порядка $n-1$, получаемой из $\|A\|$ удалением первого столбца и первой строки. Следовательно, $D_{11} = \overline{M}_1^1$.

2. Построим новую матрицу $\|A'\|$, переместив элемент α_{ij} матрицы $\|A\|$ в ее левый верхний угол, переставив i-ю строку на первое место, для чего потребуется $i-1$ перестановка строк, и переставим на первое место j-й столбец, что потребует выполнения $j-1$ перестановок столбцов. Тогда определитель перестроенной матрицы $\|A'\|$ равен

$$\det\|A'\| = (-1)^{i-1+j-1}\det\|A\| = (-1)^{i+j}\det\|A\|.$$

Согласно линейному свойству определителя (теорема 6.2.3) данное соотношение будет также выполняться и для каждого из его слагаемых, а значит, в силу формул (6.3.1) и для каждого алгебраического дополнения. Поэтому справедливо равенство $D_{ij} = (-1)^{i+j}\,D_{11}$.

3. Наконец, очевидно, что значение дополнительного к α_{ij} минора не зависит от его положения в матрице, т.е. $\overline{M}_i^j = \overline{M'}_1^1$. Учитывая соотношения $\overline{M}_i^j = \overline{M'}_1^1 = D'_{11} = (-1)^{i+j}D_{ij}$, приходим к доказываемому равенству $D_{ij} = (-1)^{i+j}\,\overline{M}_i^j$.

Теорема доказана.

Следствие 6.3.1 **Разложение определителя по j-му столбцу имеет вид**

$$\det\|A\| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}\alpha_{kj}\overline{M}_k^j,$$

или $$\det\|A\| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}M_k^j\overline{M}_k^j.$$

Для практических приложений особо полезной является обобщающая теорему 1.1.1

Теорема 6.3.2 **Для любой квадратной матрицы $\|A\|$ имеет место равенство**

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} D_{ik} = \delta_{jk} \cdot \det \|A\| \, ,$$

где $\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k \end{cases}$ **— символ Кронекера.**

Доказательство.

По определению 6.3.4 алгебраического дополнения имеем $\det \|A\| = \alpha_{1j} D_{1j} + \alpha_{2j} D_{2j} + \cdots + \alpha_{nj} D_{nj}$, то есть утверждение теоремы для случая $i = j$ справедливо.

Пусть теперь $i \neq j$. Тогда выражение

$$\alpha_{1j} D_{1k} + \alpha_{2j} D_{2k} + \cdots + \alpha_{nj} D_{nk}$$

можно рассматривать как разложение по k-у столбцу определителя матрицы, у которой k-й столбец совпадает с j-м столбцом. Но такой определитель равен нулю по следствию 6.2.2.

Теорема доказана.

Следствие 6.3.2 **Если квадратная матрица $\|A\|$ невырожденна, то элементами ее обратной матрицы $\|A\|^{-1}$ являются числа $\beta_{ij} = \dfrac{1}{\Delta}(-1)^{i+j}\overline{M}^{i}_{j}$, где $\Delta = \det\|A\|$.**

Доказательство.

Найдем произведение матриц $\|A\|$ и $\|B\|$, элементы которых α_{ij} и β_{ij} $\forall i, j = [1, n]$. Пусть γ_{ij} — элемент произведения $\|A\|$ и $\|B\|$, тогда, согласно определению 5.1.1 и теореме 6.3.2, имеем

$$\gamma_{pq} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{pj}\beta_{jq} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{pj}\frac{1}{\Delta}(-1)^{j+q}\overline{M}^{j}_{q} = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{pj}D_{qj} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\cdot\Delta\cdot\delta_{pq} = \delta_{pq} \,.$$

Аналогичное соотношение получается и для произведения $\|B\|\|A\|$ и по определению 1.1.4:

$$\|A\|\|B\| = \|B\|\|A\| = \|E\|,$$

но тогда, по определению 5.1.2 и лемме 5.1.1, $\|B\| = \|A\|^{-1}$.

Следствие доказано.

Проверьте самостоятельно справедливость формулы (5.1.1).

Обозначим $I = i_1 + i_2 + \ldots + i_k$ и $J = j_1 + j_2 + \ldots + j_k \quad \forall k = [1, n]$, тогда оказывается справедливой обобщающая следствие 6.3.1

Теорема 6.3.3 (Лапласа) **Для фиксированного набора столбцов** $j_1, j_2, \ldots, j_k$ **имеет место равенство**

$$\det \|A\| \quad = \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}} (-1)^{I+J} \, M^{j_1, j_2, \ldots, j_k}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \overline{M}^{j_1, j_2, \ldots, j_k}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \, .$$

Отметим, что в этой формуле суммирование выполняется по всем возможным перестановкам номеров строк $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$.

Задача 6.3.1 *Найти определитель матрицы n-го порядка*

$$\Delta_n = \det \left\| \begin{matrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{matrix} \right\| .$$

Решение. 1°. Заметим, что в данной матрице сумма элементов каждого столбца одинакова и равна $x + a(n-1)$. Поэтому, прибавив к первой строке сумму остальных строк и вынося общий множитель из первой строки, мы получим матрицу с тем же определителем (см. следствия 6.2.4 и 6.2.3):

$$\Delta_n = \big(x + a(n-1)\big) \cdot \det \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{matrix} \right\| .$$

2°. Вычитая последовательно из каждой строки, начиная со второй, первую строку, умноженную на a, получим

$$\Delta_n = \big(x + a(n-1)\big) \cdot \det \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{matrix} \right\| .$$

3°. Последовательно применив $n-1$ раз следствие 6.3.1 для разложения определителя по первому столбцу, приходим к выражению

Решение получено.

$$\Delta_n = \big(x + a(n-1)\big)(x-a)^{n-1} .$$

Правило Крамера

Рассмотрим неоднородную систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \alpha_{11}\xi_1 & + & \alpha_{12}\xi_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}\xi_n & = & \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 & + & \alpha_{22}\xi_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2n}\xi_n & = & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1}\xi_1 & + & \alpha_{n2}\xi_2 & + & \cdots & + & \alpha_{nn}\xi_n & = & \beta_n, \end{array}\right. \qquad (6.4.1)$$

записываемую в неразвернутом виде $\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j = \beta_i, \quad i = [1,n],$ или же в матричной форме $\|A\|\|X\| = \|B\|$, где квадратная матрица $\|A\|$ имеет компоненты α_{ij}, а столбцы $\|X\|$ и $\|B\|$ — соответственно ξ_j и β_i.

Определение 6.4.1	Упорядоченный набор чисел $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ будем называть *частным решением* (или просто *решением*) системы линейных уравнений (6.4.1), если при подстановке этих чисел в каждое из уравнений системы мы получаем тождество.

Имеет место

Теорема 6.4.1 (правило Крамера) **Для того чтобы система линейных уравнений (6.4.1) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta = \det \|A\| \neq 0$.**
В этом случае решение системы будет иметь вид

$$\xi_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad \forall j = [1, n],$$

где Δ_j – определитель матрицы, получаемой из матрицы $\|A\|$ заменой ее j-го столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta_j = \det \left\| \begin{array}{cccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \beta_1 & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \beta_2 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \beta_n & \cdots & \alpha_{nn} \end{array} \right\|$$

$\uparrow$ – **j-й столбец.**

Доказательство.

1°. Проверим вначале утверждение теоремы в предположении, что система линейных уравнений (6.4.1) имеет единственное решение $\|X\| = \|\,\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\|^{\mathrm{T}}$, то есть когда выполняются равенства

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j = \beta_i \qquad \forall i = [1, n].$$

Умножив последовательно для всех $i = [1, n]$ обе части этих равенств на алгебраическое дополнение D_{ik} и просуммировав по i результаты умножения, получим

$$\sum_{i=1}^{n} D_{ik} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i D_{ik} \qquad \forall k = [1, n].$$

Изменим порядок суммирования (то есть выполним перегруппировку слагаемых) в левой части этого равенства:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} D_{ik} \right) \xi_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_i D_{ik} \qquad \forall k = [1, n].$$

Но выражение в круглых скобках равно $\Delta \cdot \delta_{jk}$ (по теореме 6.3.2), поэтому, учитывая, что

$$\Delta \sum_{j=1}^{n} \xi_j \delta_{jk} = \Delta \cdot \xi_k \qquad \text{и} \qquad \sum_{i=1}^{n} \beta_i D_{ik} = \Delta_k \ ,$$

получаем $\quad \Delta \cdot \xi_k = \Delta_k \quad \forall k = [1, n].$

Поскольку уравнения вида $\quad \Delta \cdot \xi_k = \Delta_k \quad \forall k = [1, n]$ имеют единственное решение тогда и только тогда, когда $\Delta \neq 0$, то необходимость доказана. При этом также очевидно, что

$$\xi_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} \quad \forall k = [1, n]. \qquad (6.4.2)$$

2°. Докажем теперь, что в условиях теоремы однозначно заданный набор чисел

$$\xi_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad \forall j = [1, n]$$

есть решение данной системы линейных уравнений. Убедимся в этом, подставив значения ξ_j в левые части исходной системы линейных уравнений (6.4.1):

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \frac{\Delta_j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k D_{kj} \right) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} D_{kj} \right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta_{ik} \Delta = \beta_i \qquad \forall i = [1, n]\,.$$

Для получения последнего равенства мы снова изменили порядок суммирования и воспользовались теоремой 6.3.2.

Теорема доказана.