Линейные зависимости в линейном пространстве

Линейные операторы

Определение 8.1.1	Пусть *каждому* элементу x линейного пространства Λ поставлен в соответствие *единственный* элемент y линейного пространства Λ^*. Тогда говорят, что задан *оператор* $\hat{A}$, действующий в Λ и имеющий значения в Λ^*, действие которого обозначается как $y = \hat{A}x$ или $y = \hat{A}(x)$. При этом элемент y называется *образом* элемента x, а элемент x — *прообразом* элемента y.

Как и в § 5.2, операторы подразделяются на *отображения*, если $\Lambda^* \nsubseteq \Lambda$, и *преобразования*, если $\Lambda^* \subseteq \Lambda$. В дальнейшем, за исключением особо оговоренных случаев, будем предполагать, что из контекста ясно, идет ли речь об отображении или о преобразовании.

Определение 8.1.2	Оператор называется *линейным*, если для любых $x, y \in \Lambda$ и любого числа λ имеют место равенства $1^\circ.\ \hat{A}(x+y) = \hat{A}x + \hat{A}y,$ $2^\circ.\ \hat{A}(\lambda x) = \lambda \hat{A} x.$

Пример 8.1.1

1°. В пространстве двумерных столбцов линейным оператором является правило

$$\left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\| ,$$

связывающее столбец-прообраз $x = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\|$ со столбцом-образом $y = \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{matrix} \right\|$.

2°. В пространстве бесконечно дифференцируемых функций линейным оператором является операция дифференцирования, ставящая в соответствие каждому элементу этого пространства его производную функцию.

3°. В пространстве непрерывных функций $f(\tau)$ линейным оператором является операция умножения такой функции на независимую переменную τ.

Действия с линейными операторами

Определение 8.2.1	Линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называются *равными* (что обозначается как $\hat{A} = \hat{B}$), если $$\forall x \in \Lambda : \qquad \hat{A}x = \hat{B}x\,.$$

	Суммой линейных операторов и $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется оператор $\hat{C}$ (что символически обозначается равенством $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$), ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие элемент $\hat{A}x + \hat{B}x$.

Лемма 8.2.1 **Сумма двух линейных операторов является линейным оператором.**

Доказательство.

Пусть $x, y \in \Lambda$ и λ, μ суть числа, а $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$, тогда, в силу определений 8.1.2 и 8.2.1,

$$\begin{aligned}
\hat{C}\big(\lambda x + \mu y\big) &= \hat{A}\big(\lambda x + \mu y\big) + \hat{B}\big(\lambda x + \mu y\big) = \\
&= \lambda \hat{A}x + \mu \hat{A}y + \lambda \hat{B}x + \mu \hat{B}y = \\
&= \lambda \hat{A}x + \lambda \hat{B}x + \mu \hat{A}y + \mu \hat{B}y = \\
&= \lambda\big(\hat{A}x + \hat{B}x\big) + \mu\big(\hat{A}y + \hat{B}y\big) = \\
&= \lambda \hat{C}x + \mu \hat{C}y\,.
\end{aligned}$$

Сравнивая начало и конец полученной цепочки равенств, приходим к заключению о линейности оператора $\hat{C}$.

Лемма доказана.

Определение 8.2.2	*Нулевым* оператором $\hat{O}$ называется оператор, ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие нулевой элемент этого пространства.

Определение 8.2.3	*Оператором, противоположным оператору* $\hat{A}$, называется оператор, обозначаемый $\tilde{\hat{A}}$, ставящий каждому элементу x пространства Λ в соответствие элемент $\tilde{x}$ (см. определение 7.1.1).

Из решения задачи 8.1.2 следует, что нулевой оператор линейный. Покажите самостоятельно, что оператор, противоположный любому линейному оператору, также линейный.

Лемма 8.2.2 **Для любых линейных операторов $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ выполняются соотношения**

$$\begin{array}{l} \hat{A}+\hat{B}=\hat{B}+\hat{A}\,, \\ \left(\hat{A}+\hat{B}\right)+\hat{C}=\hat{A}+\left(\hat{B}+\hat{C}\right), \\ \hat{A}+\hat{O}=\hat{A}\,, \quad \hat{A}+\tilde{\hat{A}}=\hat{O}\,. \end{array}$$

Определение 8.2.4

Произведением числа λ *на линейный оператор* $\hat{A}$ называется оператор (обозначаемый $\lambda\hat{A}$), ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие элемент $\lambda\big(\hat{A}x\big)$.

Лемма 8.2.3

Для произведения числа на линейный оператор справедливы соотношения

$$\begin{array}{l} \big(\alpha\beta\big)\hat{A} = \alpha\big(\beta\big)\hat{A}\,, \quad 1\hat{A} = \hat{A}\,, \\ \big(\alpha+\beta\big)\hat{A} = \alpha\hat{A} + \beta\hat{A}\,, \\ \alpha\big(\hat{A}+\hat{B}\big) = \alpha\hat{A} + \alpha\hat{B}\,. \end{array}$$

Теорема 8.2.1

Множество *всех* **линейных операторов, действующих в линейном пространстве Λ, является** *линейным пространством***.**

Определение 8.2.5	*Произведением* (иногда *композицией* или *суперпозицией*) линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется оператор (обозначаемый как $\hat{A}\hat{B}$), ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие элемент $\hat{A}\big(\hat{B}x\big)$.

Теорема 8.2.2

Произведение линейных операторов является *линейным* **оператором, для которого справедливы соотношения**

$$\big(\hat{A}\hat{B}\big)\hat{C} = \hat{A}\big(\hat{B}\hat{C}\big)\,, \qquad \big(\hat{A}+\hat{B}\big)\hat{C} = \hat{A}\hat{C}+\hat{B}\hat{C}\,,$$

$$\hat{A}\big(\hat{B}+\hat{C}\big) = \hat{A}\hat{B}+\hat{A}\hat{C}\,.$$

Доказательство.

Докажем вначале линейность произведения линейных операторов. Действительно, $\forall x, y \in \Lambda$ и любых чисел α, β:

$$\hat{A}\hat{B}\big(\alpha x+\beta y\big) = \hat{A}\Big(\hat{B}\big(\alpha x+\beta y\big)\Big) = \hat{A}\Big(\alpha\hat{B}x+\beta\hat{B}y\Big) = \\ = \alpha\hat{A}\big(\hat{B}x\big)+\beta\hat{A}\big(\hat{B}y\big) = \alpha\big(\hat{A}\hat{B}\big)x+\beta\big(\hat{A}\hat{B}\big)y.$$

Проверим теперь сочетательный закон для произведения линейных операторов. Имеем

$$\big(\hat{A}\big(\hat{B}\hat{C}\big)\big)x = \hat{A}\big(\hat{B}\hat{C}x\big) = \hat{A}\big(\hat{B}\big(\hat{C}x\big)\big),$$

но, с другой стороны,

$$\big(\big(\hat{A}\hat{B}\big)\hat{C}\big)x = \big(\hat{A}\hat{B}\big)\hat{C}x = \hat{A}\big(\hat{B}\big(\hat{C}x\big)\big),$$

что и требовалось показать. Остальные утверждения теоремы проверяются аналогично.

Теорема доказана.

Замечание 8.2.1. В общем случае произведение линейных операторов не обладает перестановочным свойством (или, иначе говоря, операторы *не коммутируют*), то есть $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$.

Определение 8.2.6	Оператор $\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$ называется *коммутатором* операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

Коммутатор коммутирующих операторов есть нулевой оператор.

Задача 8.2.1 *В линейном пространстве алгебраических многочленов вида* $P_n(\tau) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \tau^k$ *найти коммутатор для операторов:*

$\hat{A}$, *ставящего в соответствие многочлену его производную функцию, и*

$\hat{B}$ *–– оператора умножения независимой переменной на многочлен.*

`Решение.` Построим оператор $\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$. Для любого $P_n(\tau)$ имеем

$$\hat{A}P_n(\tau)=\frac{d}{d\tau}P_n(\tau)=\frac{d}{d\tau}\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^k\right)=\sum_{k=1}^{n}k\alpha_k\tau^{k-1}\,,$$

$$\hat{B}P_n(\tau)=\tau P_n(\tau)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^{k+1}\,.$$

Откуда получаем

$$\hat{A}\hat{B}\,P_n(\tau)=\hat{A}\big(\hat{B}\,P_n(\tau)\big)=\frac{d}{d\tau}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^{k+1}=\sum_{k=0}^{n}(k+1)\alpha_k\tau^k\,,$$

$$\hat{B}\hat{A}\,P_n(\tau)=\hat{B}\big(\hat{A}\,P_n(\tau)\big)=\tau\sum_{k=1}^{n}k\alpha_k\tau^{k-1}=\sum_{k=0}^{n}k\alpha_k\tau^k\,,.$$

$$\big(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\big)P_n(\tau)=\sum_{k=0}^{n}(k+1)\alpha_k\tau^k-\sum_{k=0}^{n}k\alpha_k\tau^k=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^k=$$
$$=P_n(\tau),$$

`Решение получено.` и, следовательно, линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ не коммутируют.

В рассмотренной выше задаче 8.2.1 оказалось, что действие коммутатора $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ на любой элемент линейного пространства многочленов не приводит к изменению этого элемента. Для операторов, обладающих таким свойством, используют специальное наименование.

Определение 8.2.7

Оператор $\hat{E}$ называется *единичным* (или *тождественным*) оператором, если *каждому* элементу x линейного пространства Λ он ставит в соответствие *тот же самый* элемент, то есть

$$\hat{E}x = x \qquad \forall x \in \Lambda\,.$$

Докажите самостоятельно, что $\forall \hat{A}: \ \hat{A}\hat{E} = \hat{E}\hat{A} = \hat{A}$, а также линейность и единственность $\hat{E}$.

Определение 8.2.8

Оператор $\hat{B}$ называется *обратным* для линейного оператора $\hat{A}$ (обозначается $\hat{A}^{-1}$), если

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = \hat{E}\,.$$

Пример 8.2.1

В линейном пространстве функций $f(\tau)$, имеющих на $[\alpha, \beta]$ производную любого порядка и удовлетворяющих условиям $f^{(k)}(\alpha) = 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$, оператор дифференцирования $\hat{A}f = \dfrac{df}{d\tau}$ и оператор интегрирования с переменным верхним пределом $\hat{B}f = \int\limits_{\alpha}^{\tau} f(u)\,du$ являются взаимно обратными.

Действительно,

$$\hat{A}\hat{B}\,f = \frac{d}{d\tau}\int\limits_{\alpha}^{\tau} f(u)\,du = f(\tau) = \hat{E}f \qquad\qquad \text{и}$$

$$\hat{B}\hat{A}\,f = \int\limits_{\alpha}^{\tau} \frac{df}{d\tau}du = F(\tau) - f(\alpha) = f(\tau) = \hat{E}f\,.$$

`Замечание 8.2.2.` 1°. Не для всякого линейного оператора существует обратный оператор. Например, нулевой оператор $\hat{O}$ не имеет обратного. Действительно, пусть $\hat{O}x = o \quad \forall x \in \Lambda$, тогда для любого $\hat{A}$ имеет место $\hat{A}\hat{O}\,x = \hat{A}\big(\hat{O}x\big) = o$, и, следовательно, равенство $\hat{A}\hat{O} = \hat{E}$ не выполняется ни при каком $\hat{A}$.

2°. Обратный оператор, если существует, то он единственный. (Покажите это самостоятельно, использовав идею доказательства леммы 5.1.1.)

3°. Из условия $\hat{A}\hat{B} = \hat{E}$ может не следовать выполнение равенства $\hat{B}\hat{A} = \hat{E}$. Это имеет место, например, в пространстве многочленов вида $P_n(\tau) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \tau^k$ для пары операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, где $\hat{B}$ есть оператор умножения многочлена на независимую переменную, а оператор $\hat{A}$ многочлену $P_n(\tau)$ ставит в соответствие многочлен $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \tau^{k-1}$.

Координатное представление линейных операторов

Пусть в Λ^n заданы базис $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ и линейный оператор $\hat{A}$, имеющий образы в Λ^m с базисом $\{ f_1, f_2, \ldots, f_m\}$. Иначе говоря, $\hat{A}$ является *отображением* вида $\hat{A}: \ \Lambda^n \longrightarrow \Lambda^m$.

В § 7.2 показано, что $\forall x \in \Lambda^n$ существует единственное разложение

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i \,, \qquad \text{то есть} \qquad \|x\|_g = \| \; \xi_1 \, \xi_2 \; \ldots \; \xi_n \; \|^{\mathrm{T}} .$$

Аналогично в Λ^m существует единственное разложение образа отображения $y = \hat{A}x$, для которого в силу линейности $\hat{A}$ справедливо представление вида

$$y = \hat{A}x = \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \hat{A} g_i \,.$$

Приняв во внимание возможность и единственность в Λ^m разложения $\hat{A}g_i = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_{ki} f_k \quad \forall i = [1, n]$, с одной стороны, получаем, что

$$y = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \xi_i \right) f_k \, .$$

С другой стороны, если $\|y\|_f = \| \, \eta_1 \, \eta_2 \, \ldots \, \eta_m \, \|^{\mathrm{T}}$ — координатное представление элемента y в базисе $\{ f_1, \, f_2, \, \ldots, \, f_m \}$, то имеет место равенство $y = \sum\limits_{k=1}^{m} \eta_k f_k$.

Наконец, в силу единственности разложения элемента конечномерного пространства по базису, получаем

$$\eta_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \xi_i \qquad \forall k = [1, m] \, . \tag{8.3.1}$$

Данные соотношения позволяют находить координатное представление *образов* элементов линейного пространства по координатному представлению их *прообразов*. При этом отметим, что каждый линейный оператор вида $\hat{A}\ :\ \ \Lambda^n \longrightarrow \Lambda^m$ в паре конкретных базисов $\{\,g_1,\,g_2,\,\ldots,\,g_n\}$ и $\{\,f_1,\,f_2,\,\ldots,\,f_m\}$ полностью и однозначно описывается матрицей размера $m \times n$ с элементами α_{ki}.

Определение 8.3.1	Матрица $\|\hat{A}\|_{fg}$ размера $m{\times}n$, i-м столбцом которой является координатное представление $\|\hat{A}g_i\|_f$, называется *матрицей линейного оператора* $\hat{A}$ в базисах $\{\,g_1,\,g_2,\,\ldots,\,g_n\}$ и $\{\,f_1,\,f_2,\,\ldots,\,f_m\}$.

В использованных обозначениях

$$\left\|\hat{A}\right\|_{fg} = \left\|\begin{array}{ccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \cdots & \alpha_{mn} \end{array}\right\| .$$

В матричной форме *уравнения связи* (8.3.1) координатных представлений образов и прообразов будут иметь вид

$$\|y\|_f = \left\|\hat{A}\right\|_{fg} \|x\|_g\,, \tag{8.3.2}$$

в чем легко убедиться, использовав в (8.3.1) для столбцов *двухиндексную* форму записи: $\quad \eta_{k1} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ki}\xi_{i1} \quad \forall k = [1, m]$.

Теорема 8.3.1 **Между множеством всех линейных операторов вида** $\hat{A}\ :\ \ \Lambda^n \longrightarrow \Lambda^m$ **и множеством всех матриц размера** $m \times n$ **имеется** *взаимно однозначное соответствие***.**

Действия с линейными операторами в матричной форме

Будем рассматривать далее оператор вида $\hat{A} : \Lambda^n \to \Lambda^n$, то есть *линейное преобразование*, действующее в Λ^n с базисом $\{ g_1, g_2, \dots, g_n\} \in \Lambda^n$, матрица которого квадратная, порядка n. Введенные в § 1.1 и § 5.1 операции с матрицами позволяют выполнять в конкретном базисе действия с линейными операторами в следующей форме.

1°. **Критерий равенства операторов:** $\hat{A} = \hat{B} \quad \Leftrightarrow \quad \|\hat{A}\|_g = \|\hat{B}\|_g$.

Действительно, согласно определению 8.2.1 условие $\hat{A} = \hat{B}$ означает, что $\hat{A}x = \hat{B}x \quad \forall x \in \Lambda^n$ или же в координатной форме в силу (8.3.2) $\|\hat{A}\|_g\|x\|_g = \|\hat{B}\|_g\|x\|_g \quad \forall x \in \Lambda^n$.

Но тогда по лемме 5.1.2 матрица $\|\hat{A}\|_g - \|\hat{B}\|_g$ нулевая и, следовательно, условие $\hat{A} = \hat{B}$ равносильно $\|\hat{A}\|_g = \|\hat{B}\|_g$.

2°. **Сложение операторов:** $\|\hat{A} + \hat{B}\,\|_g = \|\hat{A}\|_g + \|\hat{B}\|_g$.

Действительно, из разложений $\hat{A}g_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{ki}g_k \quad \forall i = [1,n]$ и $\hat{B}g_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_{ki}g_k \quad \forall i = [1,n]$ следует, что

$$\big(\hat{A} + \hat{B}\big)x = \hat{A}x + \hat{B}x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}g_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_{ki}g_k = \sum_{k=1}^{n} \big(\alpha_{ki} + \beta_{ki}\big)g_k\,.$$

3°. **Умножение числа на оператор:** $\|\lambda\hat{A}\|_g = \lambda\|\hat{A}\|_g$.

Из $\hat{A}g_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{ki}g_k \quad \forall i = [1,n]$ для любого числа λ находим, что

$$\big(\lambda\hat{A}\big)g_i = \hat{A}(\lambda g_i) = \hat{A}\left(\lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}g_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda\alpha_{ki})g_k\,.$$

4°. Произведение операторов: $\|\hat{A}\hat{B}\,\|_g = \|\hat{A}\|_g\|\hat{B}\|_g$.

По определению матрицы линейного оператора имеем

$$\begin{aligned}(\hat{A}\hat{B})g_i = \hat{A}(\hat{B}g_i) = \hat{A}\sum_{k=1}^{n}\beta_{ki}g_k = \sum_{k=1}^{n}\beta_{ki}\hat{A}\,(g_k) = \\ = \sum_{k=1}^{n}\beta_{ki}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jk}g_j = \sum_{j=1}^{n}\kappa_{ji}g_j\ ,\end{aligned}$$

где $\kappa_{ji} = \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\beta_{ki}$, что совпадает с определением произведения матриц 5.1.1.

5°. Обращение операторов: $\|\hat{A}^{-1}\|_g = \|\hat{A}\|_g^{-1}$.

Будем предполагать, что обратный оператор существует. Поскольку из определения 8.2.8 следует, что $\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{E}$, и, принимая во внимание результат пункта 4°, получаем, что искомое матричное представление $\|\hat{A}^{-1}\|_g$ оператора $\hat{A}^{-1}$ должно удовлетворять соотношениям

$$\|\hat{A}^{-1}\|_g\|\hat{A}\|_g = \|\hat{A}\|_g\|\hat{A}^{-1}\|_g = \|\hat{E}\|_g,$$

то есть являться обратной матрицей к матрице $\|\hat{A}\|_g$.

Следствие 8.3.1 **Размерность линейного пространства линейных отображений вида $\hat{A}:\ \Lambda^n \longrightarrow \Lambda^m$ равна $n \times m$.**

Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса

Выясним, как меняется $\left\|\hat{A}\right\|_{fg}$ — матрица линейного отображения $\hat{A}:\ \Lambda^n \longrightarrow \Lambda^m$ при замене базисов.

Пусть в пространстве Λ^n даны два базиса $\{\,g_1,\,g_2,\,\dots,\,g_n\}$ и $\{\,g'_1,\,g'_2,\,\dots,\,g'_n\}$, связанные матрицей перехода $\|G\|$, а в Λ^m — два базиса $\{\,f_1,\,f_2,\,\dots,\,f_m\}$ и $\{\,f'_1,\,f'_2,\,\dots,\,f'_m\}$ с матрицей перехода $\|F\|$. Найдем соотношение, связывающее $\left\|\hat{A}\right\|_{f'g'}$ и $\left\|\hat{A}\right\|_{fg}$. В этом случае справедлива

Теорема 8.3.2

Матрица линейного оператора $\left\|\hat{A}\right\|_{f'g'}$ в базисах $\{\,g'_1,\,g'_2,\,\dots,\,g'_n\}$ и $\{\,f'_1,\,f'_2,\,\dots,\,f'_m\}$ связана с матрицей этого же оператора $\left\|\hat{A}\right\|_{fg}$ в базисах $\{\,g_1,\,g_2,\,\dots,\,g_n\}$ и $\{\,f_1,\,f_2,\,\dots,\,f_m\}$ соотношением

$$\left\|\hat{A}\right\|_{f'g'} = \|F\|^{-1}\left\|\hat{A}\right\|_{fg}\|G\|\,.$$

Доказательство.

По теореме 7.3.1 при переходе от базиса $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \ldots, g'_n\}$ компоненты элементов $x \in \Lambda^n$ — прообраза и $y \in \Lambda^m$ — образа при действии оператора $\hat{A}$ в этих базисах связаны формулами перехода, то есть равенствами

$$\|x\|_g = \|G\| \|x\|_{g'} \qquad \text{и} \qquad \|y\|_f = \|F\| \|y\|_{f'}\,,$$

где

$$\|x\|_g = \|\, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \,\|^{\mathrm{T}} \qquad \text{и} \qquad \|x\|_{g'} = \|\, \xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n \,\|^{\mathrm{T}}$$

и аналогично

$$\|y\|_f = \|\, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m \,\|^{\mathrm{T}} \qquad \text{и} \qquad \|y\|_{f'} = \|\, \eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_m \,\|^{\mathrm{T}}.$$

При этом в рассматриваемых базисах образы и прообразы элементов связаны соотношениями

$$\|y\|_f = \left\|\hat{A}\right\|_{fg} \|x\|_g \qquad \text{и} \qquad \|y\|_{f'} = \left\|\hat{A}\right\|_{f'g'} \|x\|_{g'}\,,$$

и поскольку матрица перехода имеет обратную, то из выписанных соотношений последовательно получаем

$$\|y\|_{f'} = \|F\|^{-1}\|y\|_f = \|F\|^{-1}\left\|\hat{A}\right\|_{fg}\|x\|_g = \|F\|^{-1}\left\|\hat{A}\right\|_{fg}\|G\|\|x\|_{g'}.$$

Но, с другой стороны, $\|y\|_{f'} = \left\|\hat{A}\right\|_{f'g'} \|x\|_{g'}$, и мы приходим к равенству

$$\left(\left\|\hat{A}\right\|_{f'g'} - \|F\|^{-1}\left\|\hat{A}\right\|_{fg}\|G\|\right)\|x\|_{g'} = \|o\|\,,$$

из которого в силу произвольности столбца $\|x\|_{g'}$ и леммы 5.1.2 матрица, стоящая в круглых скобках, нулевая. Откуда следует справедливость утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Следствие 8.3.2 **Матрица линейного** *преобразования* $\hat{A}$ **при переходе от базиса** $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n \}$ **к другому базису** $\{ g'_1, g'_2, \ldots, g'_n \}$ **с матрицей перехода** $\|S\|$ **в** Λ^n **изменяется по правилу**

$$\left\|\hat{A}\right\|_{g'} = \|S\|^{-1} \left\|\hat{A}\right\|_{g} \|S\| .$$

Следствие 8.3.3 **Значение** *определителя* **матрицы линейного преобразования** *не зависит* **от выбора базиса в** Λ^n**.**

Доказательство.

По следствию 8.3.2 $\quad \det \left\|\hat{A}\right\|_{g'} = \det \left(\|S\|^{-1} \left\|\hat{A}\right\|_{g} \|S\| \right)$,
а в силу теоремы 6.2.4

$$\det \left(\|S\|^{-1} \left\|\hat{A}\right\|_{g} \|S\| \right) = \left(\det \|S\|^{-1}\right) \left(\det \left\|\hat{A}\right\|_{g} \right) \left(\det \|S\|\right) ,$$

а $\det \|S\|^{-1} \cdot \det \|S\| = 1,$ то окончательно получаем, что

$$\det \left\|\hat{A}\right\|_{g'} = \det \left\|\hat{A}\right\|_{g} .$$

Следствие доказано.

Область значений и ядро линейного оператора

Трактуя линейный оператор, действующий в линейном пространстве как некоторое обобщение понятия *функции*, естественно рассмотреть вопрос об области определения и области значений линейных операторов.

Под областью значений линейного оператора $\hat{A}$ будем понимать множество образов всех элементов $x \in \Lambda$, то есть элементов вида $\hat{A}x$. В этом случае очевидно, что для любого линейного оператора его область определения совпадает с Λ.

Ответ на вопрос: «Что представляет собой область значений линейного оператора?» дает

Теорема 8.4.1 **Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор, действующий в линейном пространстве Λ. Тогда**

1°. Множество элементов $\mathrm{Im}\hat{A}$ есть *подпространство* в Λ.

2°. Если, кроме того, $\Lambda = \Lambda^n$ с базисом $\{ g_1, g_2, \dots, g_n \}$, то $\dim \mathrm{Im}\hat{A} = \mathrm{rg} \left\| \hat{A} \right\|_g$.

Определение 8.4.1	*Рангом* линейного оператора $\hat{A}$ в Λ^n называется размерность его области значений. Ранг линейного оператора $\hat{A}$ обозначается как $\text{rg}\hat{A}$ (или $\text{rank}\hat{A}$).

Следствие 8.4.1 **В** $\Lambda^n \quad \text{rg}\hat{A} = \text{rg}\left\|\hat{A}\right\|_g \leq n$ **и не зависит от выбора базиса.**

Следствие 8.4.2 **Размерность области значений линейного оператора** $\hat{A}$**, действующего на некотором подпространстве** Λ^* **линейного пространства** Λ**, не превосходит** $\dim \Lambda^*$**.**

Теорема 8.4.2 **Ранг произведения линейных операторов** $\hat{A}$ **и** $\hat{B}$ **не превосходит ранга каждого из этих операторов.**

Ранг произведения матриц может быть меньше рангов каждого из сомножителей. Например,

$$\left\|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\| .$$

Другой (помимо области значений и ранга) важной характеристикой линейного оператора $\hat{A}$ является совокупность элементов x линейного пространства Λ, называемая *ядром* линейного оператора и обозначаемая $\ker\hat{A}$.

Определение 8.4.2	Ядро линейного оператора $\hat{A}$ состоит из элементов $x \in \Lambda$, таких, что $\hat{A}x = o$.

Теорема 8.4.4 **Если** $\Lambda = \Lambda^n$ **и** $\operatorname{rg}\hat{A} = r$**, то** $\ker A$ **есть подпространство в** Λ^n **и** $\dim\ker\hat{A} = n - r$ **.**

Доказательство.

Пусть в базисе $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n \}$ оператор $\hat{A}$ имеет матрицу $\left\|\hat{A}\right\|_g = \|\alpha_{ij}\|$. По следствию 8.4.1 $\operatorname{rg}\left\|\hat{A}\right\|_g = r$ для любого базиса.

В координатной форме равенство $\hat{A}x = o$, то есть условие принадлежности некоторого элемента $x \in \Lambda^n$ с координатным представлением $\|x\|_g = \| \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \|^{\mathrm{T}}$ ядру оператора $\hat{A}$, в силу (8.3.2), имеет вид $\left\|\hat{A}\right\|_g \|x\|_g = \|o\|$ или

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j = 0 \qquad \forall i = [1, n] \,. \tag{8.4.1}$$

При этом решения однородной системы линейных уравнений (8.4.1) образуют в своей совокупности линейное пространство.

Наконец, поскольку размерность ядра есть максимальное число линейно независимых решений этой системы уравнений, то она, согласно теореме 6.7.1, равна $n - r$.

Теорема доказана.

Типы линейных отображений

Как было отмечено в § 8.1, в тех случаях, когда область значений оператора не принадлежит области определения, следует говорить об отображении. В § 7.5 было использовано понятие *взаимно однозначного отображения*, называемого иногда *биекцией*.

Для отображений также выделяются специальные случаи так называемых инъективных и сюръективных отображений. Рассмотрим эти случаи подробнее.

Определение 8.4.3	Отображение $y = \hat{A}x \quad x \in \Omega,\ y \in \Theta$ множества Ω в множество Θ называется *инъективным* (или *инъекцией*), если из условия $\hat{A}x_1 = \hat{A}x_2$ вытекает $x_1 = x_2$.

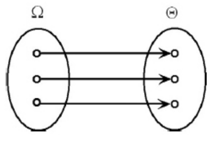
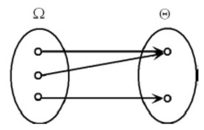
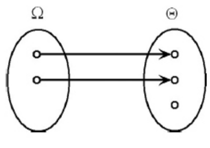
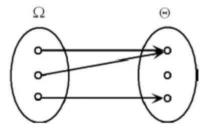
В случае инъекции множество всех значений оператора $\hat{A}$ может не совпадать с Θ.

Определение 8.4.4	Отображение $y = \hat{A}x \quad x \in \Omega,\ y \in \Theta$ множества Ω в множество Θ называется *сюръективным* (или *сюръекцией*), если каждый элемент из Θ имеет прообраз в Ω.

В случае сюръекции прообраз любого элемента из Θ всегда существует в Ω, но, вообще говоря, он не единственен.

В табл. 8.4.1 для сравнения приведены примеры отображений различных типов.

Таблица 8.4.1

Тип отображения	Инъективное	Неинъективное
Сюръективное		
Несюръективное		

Отметим также, что в конечномерном случае сюръективность отображения $\hat{A} : \Lambda^n \longrightarrow \Lambda^m$ означает выполнение условия $\Theta = \Lambda^m$, а инъективность — условия $\ker \hat{A} = \{o\}$.

Альтернативную форму условий инъективности и сюръективности в конечномерном случае дает

Теорема 8.4.5 **Ранг матрицы линейного оператора, являющегося сюръективным отображением, равен числу ее строк, а ранг матрицы инъективного отображения равен числу ее столбцов.**

Доказательство.

1°. Пусть в базисах $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ и $\{ f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ отображение $\hat{A} : \Lambda^n \longrightarrow \Lambda^m$ имеет матрицу $\left\|\hat{A}\right\|_{fg}$, причем $\operatorname{rg}\left\|\hat{A}\right\|_{fg} = m$.

Тогда система линейных уравнений $\left\|\hat{A}\right\|_{fg} \|x\|_g = \|y\|_f$ по теореме 6.6.1 (Кронекера – Капелли) имеет решение $\forall y \in \Lambda^m$, поскольку для расширенной матрицы этой системы ранг также равен m. Значит, для $\hat{A}$ каждый образ имеет хотя бы один прообраз, и данное отображение сюръективно.

2°. Пусть $\operatorname{rg}\left\|\hat{A}\right\|_{fg} = n$. Тогда, по теореме 6.4.1 (Крамера), система линейных уравнений вида

$$\left\|\hat{A}\right\|_{fg} (\|x_1\|_g - \|x_2\|_g) = \|o\|_f$$

имеет единственное решение, которое очевидно тривиальное. Поэтому равные образы имеют равные прообразы, и, следовательно, рассматриваемое отображение инъективно.

Теорема доказана.

Наконец, отображение, являющееся одновременно и инъективным и сюръективным, будет *взаимно однозначным*, или *биекцией*.

В случае, когда линейный оператор $\hat{A}$ является преобразованием в Λ^n с базисом $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, оказывается полезным дать уточняющее определению 8.3.1.

Определение 8.4.5	Квадратная, порядка n, матрица $\left\|\hat{A}\right\|_g$, столбцы которой есть координатные представления элементов $\hat{A}g_1, \hat{A}g_2, \ldots, \hat{A}g_n$ в базисе $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, называется *матрицей линейного преобразования* $\hat{A}$ этом в базисе.

Инвариантные подпространства и собственные векторы

Определение 8.5.1	Подпространство Λ^* линейного пространства Λ называется *инвариантным* подпространством линейного оператора[1] $\hat{A}$, если $\forall x \in \Lambda^* \quad \hat{A}x \in \Lambda^*$

Пример 8.5.1

1°. Множество радиусов-векторов точек некоторой прямой на плоскости Oxy, проходящей через начало координат, является инвариантным подпространством оператора поворота на угол π этих радиусов-векторов вокруг оси Oz (см. рис. 8.1).

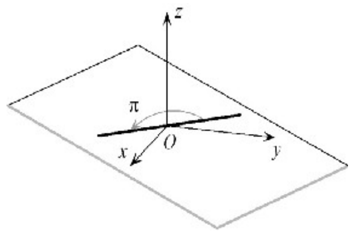


Рис. 8.1

2°. Для оператора дифференцирования в линейном пространстве функций $f(\tau)$, имеющих на (α, β) производную любого порядка, n-мерным инвариантным подпространством является линейная оболочка совокупности элементов вида $\left\{ e^{\lambda_1 \tau}, e^{\lambda_2 \tau}, \ldots, e^{\lambda_n \tau} \right\}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ — некоторые, попарно различные константы.

[1] В этом параграфе речь пойдет только об операторах, являющихся преобразованиями.

Теорема 8.5.1 **Линейный оператор $\hat{A}$, заданный в линейном пространстве Λ^n с базисом $\{\, g_1,\, g_2,\, \ldots,\, g_n \}$, имеет матрицу вида**

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1r} & \alpha_{1,r+1} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{r1} & \ldots & \alpha_{rr} & \alpha_{r,r+1} & \ldots & \alpha_{rn} \\ \hline 0 & \ldots & 0 & \alpha_{r+1,r+1} & \ldots & \alpha_{r+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{n,r+1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{array} \right\|$$

тогда и только тогда, когда линейная оболочка подмножества первых r базисных элементов $\{\, g_1,\, g_2,\, \ldots,\, g_r \}$ есть Λ^* — инвариантное подпространство оператора $\hat{A}$.

В приложениях важную роль играют определяемые ниже «собственные векторы» и «собственные значения» линейных преобразований.

Определение 8.5.2	*Ненулевой* элемент f называется *собственным вектором* линейного преобразования $\hat{A}$, если существует число λ, такое, что $\hat{A}f = \lambda f$. Число λ в этом случае называется *собственным значением* $\hat{A}$, соответствующим (или отвечающему) собственному вектору f.

Замечание о важности собственных векторов

Допустим, что для некоторого линейного преобразования $\hat{A}$, заданного в Λ^n, удалось найти *n линейно независимых* собственных векторов $g_1, g_2, \ldots, g_n$, для которых выполнены равенства

$$\hat{A}g_1 = \lambda_1 g_1, \quad \hat{A}g_2 = \lambda_2 g_2, \quad \ldots, \quad \hat{A}g_n = \lambda_n g_n .$$

Если принять набор этих элементов за базис $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, то данные соотношения можно рассматривать как *координатные разложения* образов базисных элементов:

$$\hat{A}g_k = 0g_1 + 0g_1 + \ldots + \lambda_k g_k + \ldots + 0g_n \qquad \forall k = [1, n] .$$

Согласно теореме 7.2.1, эти разложения единственны, поэтому, исходя из определения 8.3.1, можно утверждать, что матрица линейного преобразования в этом базисе будет иметь *диагональный* вид:

$$\left\|\hat{A}\right\|_g = \left\|\begin{matrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{matrix}\right\| ,$$

благодаря которому исследование свойств этого преобразования может существенно упроститься.

В том случае, когда удается найти базис, в котором матрица линейного преобразования имеет диагональный вид, данное преобразование принято называть *диагонализуемым.*

Вычисление собственных векторов и собственных значений линейного оператора в Λ^n

Выберем в Λ^n некоторый базис $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n \}$, в котором координатное разложение f — собственного вектора линейного преобразования $\hat{A}$ будет $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i g_i$, а линейное преобразование $\hat{A}$ имеет матрицу $\left\| \hat{A} \right\|_g = \| \alpha_{ij} \|$.

Пользуясь результатами, полученными в § 8.3, символическое равенство $\hat{A} f = \lambda f$ можно записать при помощи матричных операций в виде $\left\| \hat{A} \right\|_g \| f \|_g = \lambda \| f \|_g$, или же в координатной форме:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} \alpha_{11}\xi_1 & + & \alpha_{12}\xi_2 & + & \ldots & + & \alpha_{1n}\xi_n & = & \lambda\,\xi_1, \\ \alpha_{21}\xi_1 & + & \alpha_{22}\xi_2 & + & \ldots & + & \alpha_{2n}\xi_n & = & \lambda\,\xi_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1}\xi_1 & + & \alpha_{n12}\xi_2 & + & \ldots & + & \alpha_{nn}\xi_n & = & \lambda\,\xi_n, \end{array} \right.$$

что по правилам действий с линейными операторами в координатах (см. §8.3) равносильно $\left\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \right\|_g \| f \|_g = \| o \|_g$ или

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} (\alpha_{11} - \lambda)\xi_1 & + & \alpha_{12}\xi_2 & + & \ldots & + & \alpha_{1n}\xi_n & = & 0, \\ \alpha_{21}\xi_1 & + & (\alpha_{22} - \lambda)\xi_2 & + & \ldots & + & \alpha_{2n}\xi_n & = & 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1}\xi_1 & + & \alpha_{n12}\xi_2 & + & \ldots & + & (\alpha_{nn} - \lambda)\xi_n & = & 0. \end{array} \right. \tag{8.5.1}$$

Система уравнений (8.5.1) с неизвестными $\{\,\lambda,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n\}$ нелинейная, но если принять λ за параметр, то относительно неизвестных $\{\,\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n\}$ она линейная и однородная.

Согласно определению 8.5.2 собственный вектор f должен быть *ненулевым.* Покажем, что этого можно добиться путем подбора специальных значений параметра λ.

Действительно, необходимым и достаточным условием существования *ненулевого* частного решения однородной системы n линейных уравнений с n неизвестными, согласно следствию 6.7.2, является *равенство нулю определителя ее основной матрицы.*

Поэтому условие, которому должны удовлетворять искомые значения λ, будет иметь вид

$$\det\left\|\,\alpha_{ij}-\lambda\,\delta_{ij}\right\|=0, \qquad (8.5.2)$$

где — символ Кронекера, или же

$$\det\left\|\begin{matrix}\alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \ldots & \alpha_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn}-\lambda\end{matrix}\right\|=0\,.$$

Определение 8.5.3	Уравнение (8.5.2) называется *характеристическим уравнением*, а функция от λ, равная $\det\left\|\hat{A}-\lambda\,\hat{E}\right\|_g$, — *характеристическим многочленом* преобразования $\hat{A}$, действующего в Λ^n .

Теорема 8.5.2 **Характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса в Λ^n.**

Доказательство.

Заметим, что преобразование $\hat{A}-\lambda\,\hat{E}$, очевидно, линейное в силу линейности операторов $\hat{A}$ и $\hat{E}$. Тогда, согласно следствию 8.3.3, определитель его матрицы не меняется при замене базиса.

Поэтому при переходе от базиса $\{\,g_1,\,g_2,\,\ldots,\,g_n\}$ к базису $\{\,g_1',\,g_2',\,\ldots,\,g_n'\}$: $\det\left\|\hat{A}-\lambda\,\hat{E}\right\|_g=\det\left\|\hat{A}-\lambda\,\hat{E}\right\|_{g'}$.

Теорема доказана.

Характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением n-й степени относительно λ, что следует из определения детерминанта 6.1.2 и формулы (8.5.2).

В итоге мы получаем универсальный $\forall\Lambda^n$ алгоритм вычисления собственных значений и соответствующих им собственных векторов:

Решив характеристическое уравнение (8.5.2), из однородной системы уравнений (8.5.1) можно найти собственные векторы, соответствующие последовательно подставляемым в основную матрицу этой системы, найденным собственным значениям.

Примеры использования данного алгоритма в Λ^n иллюстрируют решения задач 8.6.1 и 8.6.2. В случае же линейных пространств, не имеющих базиса, задача отыскания собственных значений и построения собственных векторов может оказаться значительно сложнее.

Например, в линейном пространстве функций, имеющих на некотором интервале производную любого порядка, линейный оператор дифференцирования $\hat{A} = \dfrac{d}{d\tau}$ имеет бесконечно много собственных векторов (функций) $f(\tau) = \alpha e^{\lambda\tau}$ (где α – произвольная ненулевая константа) и собственных значений λ, удовлетворяющих дифференциальному уравнению вида $\dfrac{df}{d\tau} = \lambda f$.

Свойства собственных векторов и собственных значений

Теорема 8.6.1 **В комплексном линейном пространстве Λ^n всякое линейное преобразование имеет хотя бы один собственный вектор.**

Доказательство.

Поскольку характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением n-й степени относительно λ, то к нему применима *основная теорема высшей алгебры* , утверждающая, что такое уравнение имеет хотя бы один комплексный корень.

Теорема доказана.

В случае вещественного линейного пространства теорема 8.6.1 неверна. Например, линейный оператор поворота в пространстве плоскости Oxy вокруг оси Oz на угол $\varphi \neq \pi k$ не имеет ни одного собственного вектора.

Действительно, характеристическое уравнение для этого оператора имеет вид (см. § 5.5):

$$\det \left\| \begin{matrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{matrix} \right\| = 0 \qquad \text{или} \qquad \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1 = 0\,,$$

то есть $\lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$. Откуда следует, что при $\varphi \neq \pi k$ вещественных решений данное характеристическое уравнение не имеет.

Для вещественного линейного конечномерного пространства оказывается справедливой

Теорема 8.6.2 **В вещественном линейном пространстве Λ^n всякое линейное преобразование имеет либо хотя бы один собственный вектор, либо двумерное инвариантное подпространство.**

Доказательство.

Если характеристическое уравнение имеет вещественный корень, то из системы (8.5.1) находим собственный вектор.

Пусть характеристическое уравнение имеет комплексный корень $\lambda = \alpha + i\beta$ с $\beta \neq 0$. Тогда, решив систему (8.5.1), получим соответствующий ему комплексный собственный вектор $f = u + iv$, где u и v — элементы Λ^n, представляемые вещественными n-компонентными столбцами.

Покажем теперь, что u и v линейно независимые. Допустим противное: $u = \kappa v$. Тогда из соотношения $\hat{A}f = \lambda f$ имеем $\hat{A}(\kappa + i)v = \lambda(\kappa + i)v$ или $\hat{A}v = \lambda v$, откуда следует вещественность λ, что противоречит предположению о невещественности собственного значения.

С другой стороны, опять-таки из $\hat{A}f = \lambda f$ имеем

$$\hat{A}(u + iv) = (\alpha + i\beta)(u + iv)$$

или, в силу линейности $\hat{A}$,

$$\hat{A}u + i\hat{A}v = (\alpha u - \beta v) + i(\beta u + \alpha v)\,.$$

Тогда по определению равенства комплексных чисел получаем, что

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{A}u = \alpha u - \beta v, \\ \hat{A}v = \beta u + \alpha v. \end{array}\right.$$

Но это и означает, что $\hat{A}$ имеет двумерное инвариантное подпространство, совпадающее с двумерной линейной оболочкой элементов u и v, поскольку

$$\hat{A}(\xi u + \eta v) = \xi\hat{A}u + \eta\hat{A}v = \xi(\alpha u - \beta v) + \eta(\beta u + \alpha v) =$$

$$= (\xi\alpha + \eta\beta)u + (\eta\alpha - \xi\beta)v \qquad \forall \xi,\, \eta \in \mathbb{R}.$$

Теорема доказана.

Задача 8.6.1 *Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования $\hat{A}$, действующего в пространстве трехмерных столбцов и заданного матрицей*

$$\left\| \begin{matrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{matrix} \right\| .$$

Решение. 1°. Рассмотрим сначала случай, когда $\hat{A}$ действует в комплексном линейном пространстве. Будем искать собственные значения по формулам (8.5.1) – (8.5.2). Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det \left\| \begin{matrix} -1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -3 & -2 & 3-\lambda \end{matrix} \right\| = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad (\lambda-1)(\lambda^2+1)=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \pm i\,.$$

То есть из трех собственных значений одно $\lambda_1 = 1$ — вещественное, а два $\lambda_2 = i$ и $\lambda_3 = -i$ — комплексные.

2°. Найдем соответствующие им собственные векторы. Для $\lambda = 1$ по формулам (8.5.2) имеем

$$\left\| \begin{matrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \varphi_{(1)1} \\ \varphi_{(1)2} \\ \varphi_{(1)3} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| ,$$

где $\| \ \varphi_{(1)1} \ \varphi_{(1)2} \ \varphi_{(1)3} \ \|^{\mathrm{T}}$ — координатное представление собственного вектора $f_{(1)}$, отвечающего $\lambda = 1$.

Очевидным набором элементарных преобразований приводим полученную систему уравнений к упрощенному виду:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \varphi_{(1)1} \\ \varphi_{(1)2} \\ \varphi_{(1)3} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| .$$

Откуда получаем, что собственный вектор, отвечающий $\lambda = 1$, представим как

$$\left\| f_{(1)} \right\| = \left\| \begin{matrix} \varphi_{(1)1} \\ \varphi_{(1)2} \\ \varphi_{(1)3} \end{matrix} \right\| = \mu \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| \qquad \forall \mu \neq 0\,.$$

3°. Пусть теперь $\lambda = i$, тогда систему линейных уравнений (8.5.1)

$$\left\| \begin{matrix} -1-i & -2 & 2 \\ -2 & -1-i & 2 \\ -3 & -2 & 3-i \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \varphi_{(2)1} \\ \varphi_{(2)2} \\ \varphi_{(2)3} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

можно упростить, разделив обе части первого уравнения на $1+i$. Заметим, что в полученной таким образом системе

$$\left\| \begin{matrix} -1 & -1+i & 1-i \\ -2 & -1-i & 2 \\ -3 & -2 & 3-i \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \varphi_{(2)1} \\ \varphi_{(2)2} \\ \varphi_{(2)3} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

третье уравнение оказывается суммой первых двух и его можно отбросить как линейно зависимое. Заменив затем второе уравнение разностью удвоенного первого и второго, получим

$$\left\| \begin{matrix} -1 & -1+\ \ i & 1-\ \ i \\ 0 & -1+3i & -2i \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \varphi_{(2)1} \\ \varphi_{(2)2} \\ \varphi_{(2)3} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| .$$

Полагая значение свободного неизвестного ξ_3 равным числу $-1-3i$, находим второй собственный вектор:

$$\left\| f_{(2)} \right\| = \left\| \begin{matrix} \varphi_{(2)1} \\ \varphi_{(2)2} \\ \varphi_{(2)3} \end{matrix} \right\| = \mu \left\| \begin{matrix} 2i \\ 2i \\ -1+3i \end{matrix} \right\| \quad \forall \mu \neq 0 \,.$$

4°. Проведя аналогичные вычисления, найдем, что собственный вектор, отвечающий третьему собственному значению $\lambda_3 = -i$, имеет вид

$$\left\| f_{(3)} \right\| = \left\| \begin{matrix} \varphi_{(3)1} \\ \varphi_{(3)2} \\ \varphi_{(3)3} \end{matrix} \right\| = \mu \left\| \begin{matrix} -2i \\ -2i \\ -1-3i \end{matrix} \right\| \quad \forall \mu \neq 0 \,.$$

(Покажите самостоятельно, что комплексная сопряженность f_2 и f_3 не случайна, то есть если λ_2 и λ_3 комплексно сопряжены, то будут комплексно сопряжены и отвечающие им собственные векторы f_2 и f_3.)

5°. Если оператор $\hat{A}$ действует в вещественном линейном пространстве, то согласно теореме 8.6.2 $\hat{A}$ имеет собственный вектор $\|f_1\| = \|\, 0\;1\;1 \,\|^{\mathrm{T}}$, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 1$, и инвариантное подпространство, являющееся линейной оболочкой элементов $u = \mathrm{Re} f_2$ и $v = \mathrm{Im} f_2$, то есть которое будет состоять из элементов вида

$$\left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \mu_1 \left\| \begin{array}{r} 0 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right\| + \mu_2 \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right\| \qquad \forall \mu_1,\, \mu_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Заметим, что при необходимости искомое инвариантное подпространство может быть задано и как однородная система линейных уравнений, которая в данном примере имеет вид

$$\xi_1 - \xi_2 = 0$$

Решение получено.

(см., например, решение задачи 8.4.1).

Теорема 8.6.3

Совокупность *всех* **собственных векторов, отвечающих некоторому собственному значению линейного преобразования $\hat{A}$, дополненная нулевым элементом линейного пространства Λ, является в Λ** *инвариантным подпространством* **преобразования $\hat{A}$.**

Доказательство.

Пусть $\hat{A}f_1 = \lambda f_1$ и $\hat{A}f_2 = \lambda f_2$. Тогда для любых α и β, не равных нулю одновременно, имеем

$$\hat{A}\big(\alpha f_1 + \beta f_2\big) = \alpha\hat{A}f_1 + \beta\hat{A}f_2 = \alpha\lambda f_1 + \beta\lambda f_2 = \lambda\big(\alpha f_1 + \beta f_2\big)\,,$$

что доказывает справедливость утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Определение 8.6.1	Подпространство, состоящее из собственных векторов линейного преобразования $\hat{A}$, отвечающих некоторому собственному значению, дополненных нулевым элементом, называется *инвариантным собственным* (или просто *собственным*) подпространством линейного преобразования $\hat{A}$.

Теорема 8.6.4 **Всякое** *собственное* **подпространство линейного преобразования $\hat{A}$ является также** *инвариантным* **подпространством линейного преобразования $\hat{B}$, если $\hat{A}$ и $\hat{B}$** *коммутируют*.

Доказательство.

Пусть Λ^* — инвариантное собственное подпространство $\hat{A}$, то есть $\hat{A}f = \lambda f \quad \forall f \in \Lambda^*$. Тогда будет справедливо равенство $\hat{B}\hat{A}f = \hat{B}\big(\lambda f\big)$, а в силу коммутируемости и линейности $\hat{A}$ и $\hat{B}$ будет также верно и $\hat{A}\big(\hat{B}f\big) = \lambda\big(\hat{B}f\big) \quad \forall f \in \Lambda^*$.

Последнее условие означает, что $\hat{B}f \in \Lambda^* \quad \forall f \in \Lambda^*$, то есть Λ^* — инвариантное подпространство оператора $\hat{B}$.

Теорема доказана.

Теорема 8.6.5 **Собственные векторы линейного преобразования, отвечающие** *различным* **собственным значениям, линейно независимы.**

Доказательство.

Один собственный вектор линейно независим как ненулевой.

Пусть имеются m линейно независимых собственных векторов $f_1, f_2, \ldots, f_m$ линейного преобразования $\hat{A}$, отвечающих *различным* собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Покажем, что в этом случае будет линейно независим и $m+1$ собственный вектор $f_1, f_2, \ldots, f_m, f_{m+1}$, если эти элементы также отвечают различным собственным значениям.

Предположим противное: существует нетривиальная и равная нулевому элементу линейная комбинация собственных векторов $f_1, f_2, \ldots, f_m, f_{m+1}$, то есть такая, что

$$\kappa_1 f_1 + \kappa_2 f_2 + \ldots + \kappa_m f_m + \kappa_{m+1} f_{m+1} = o\,, \tag{8.6.1}$$

причем без ограничения общности можно считать, что $\kappa_{m+1} \neq 0$.

Подействуем оператором $\hat{A}$ на обе части равенства (8.6.1), получим

$$\hat{A}\left(\kappa_1 f_1 + \kappa_2 f_2 + \ldots + \kappa_m f_m + \kappa_{m+1} f_{m+1}\right) =$$

$$= \kappa_1 \lambda_1 f_1 + \kappa_2 \lambda_2 f_2 + \ldots + \kappa_m \lambda_m f_m + \kappa_{m+1} \lambda_{m+1} f_{m+1} = o\,. \tag{8.6.2}$$

С другой стороны, умножая обе части равенства (8.6.1) на λ_{m+1} и вычитая почленно результат этого умножения из равенства (8.6.2), получаем

$$\kappa_1\left(\lambda_1 - \lambda_{m+1}\right) f_1 + \kappa_2\left(\lambda_2 - \lambda_{m+1}\right) f_2 + \ldots$$

$$\ldots + \kappa_m\left(\lambda_m - \lambda_{m+1}\right) f_m = o\,.$$

Поскольку все собственные значения разные, а векторы $f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_m$ линейно независимые, то мы приходим к заключению, что $\kappa_1 = \kappa_2 = \ldots = \kappa_m = 0$.

Но тогда из (8.6.1) следует $\kappa_{m+1} = 0$, что противоречит сделанному выше предположению, и по принципу математической индукции из линейной независимости элементов $f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_m$ следует линейная независимость элементов $f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_m,\, f_{m+1}$.

Теорема доказана.

Следствие 8.6.1 **Линейное преобразование $\hat{A}$ в Λ^n может иметь (с точностью до произвольного ненулевого множителя) не более чем n собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям.**

Теорема 8.6.6 **Если у линейного преобразования $\hat{A}$, действующего в Λ^n, есть n различных собственных значений, то существует базис, образованный собственными векторами, в котором матрица данного линейного оператора имеет диагональный вид, причем на ее главной диагонали расположены собственные числа оператора $\hat{A}$.**

Теорема 8.6.7 **Пусть Λ^* — собственное подпространство в Λ^n линейного преобразования $\hat{A}$, отвечающее некоторому собственному значению λ_0** *кратности* k**.**
Тогда $\quad 1 \le \dim \Lambda^* \le k\,.$

Доказательство.

Выберем в Λ^n базис $\{\, g_1,\, g_2,\, \ldots,\, g_m,\, g_{m+1},\, \ldots,\, g_{n-1},\, g_n \,\}$ так, чтобы его первые $m = \dim \Lambda^*$ элементов принадлежали подпространству Λ^*.

В силу условия кратности собственного значения λ_0

$$\hat{A} g_i = \lambda_0 g_i \qquad \forall i = [1, m]\,.$$

Поэтому матрица $\left\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \right\|_g$ в этом базисе, согласно замечанию о важности собственных векторов (см. § 8.5), будет иметь вид

$$\left\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \right\|_g =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \lambda_0 - \lambda & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{1,m+1} & \ldots & \alpha_{1n} \\ 0 & \lambda_0 - \lambda & \ldots & 0 & \alpha_{2,m+1} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_0 - \lambda & \alpha_{m,m+1} & \ldots & \alpha_{mn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{m+1,m+1} - \lambda & \ldots & \alpha_{m+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{n,m+1} & \ldots & \alpha_{nn} - \lambda \end{matrix} \right\|.$$

Откуда следует, что $\qquad \det \left\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \right\|_g = (\lambda_0 - \lambda)^m P_{n-m}(\lambda).$

При этом множители вида $(\lambda_0 - \lambda)$ могут содержаться также и в многочлене $P_{n-m}(\lambda)$, значит, $m \le k$, где k — кратность λ_0, корня характеристического многочлена $\det \left\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \right\|_g$.

Условие $1 \le \dim \Lambda^*$ очевидно верное, поскольку подпространство Λ^* содержит ненулевые собственные векторы.

Теорема доказана.

Таким образом, размерность собственного подпространства Λ^*, отвечающего собственному значению λ кратности k, может оказаться меньше k.

Теорема 8.6.8 **Линейное преобразование $\hat{A}$ в Λ^n имеет нулевое собственное значение тогда и только тогда, когда оно не является взаимно однозначным.**

Доказательство.

Линейное преобразование $\hat{A}$ имеет в Λ^n собственное значение, равное нулю, тогда и только тогда, когда его матрица вырожденная, то есть в любом базисе $\det \left\| \hat{A} \right\|_g = 0$.

Пусть в Λ^n координатный столбец образа связан с координатным столбцом прообраза

$$\left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{matrix} \right\| .$$

Тогда из теоремы 6.4.1 (Крамера) следует, что для заданного координатного столбца элемента-образа $\left\| \eta_1 \, \eta_2 \, \dots \, \eta_n \right\|^{\mathrm{T}}$ эта система линейных уравнений, у которой неизвестными являются компоненты столбца элемента-прообраза $\left\| \xi_1 \, \xi_2 \, \dots \, \xi_n \right\|^{\mathrm{T}}$, либо оказывается *несовместной* (элемент-прообраз не существует), либо будет иметь согласно следствию 6.7.1 *неединственное* решение (элемент-прообраз определяется неоднозначно).

Теорема доказана.

Определение 8.6.2	Степенью порядка $k \geq 2$ квадратной матрицы $\|Q\|$, обозначаемую как $\|Q\|^k$, называется произведение следующего вида: $\underbrace{\|Q\| \cdot \|Q\| \cdot \ldots \cdot \|Q\|}_{k\ \textit{сомножителей}}$. Будем также считать, что $\|Q\|^1 = \|Q\|$ и $\|Q\|^0 = \|E\|$.

Теорема 8.6.9 (Гамильтона - Кэли) **Матрица линейного преобразования $\hat{A}$ в Λ^n является корнем характеристического уравнения этого преобразования.**

Доказательство.

Докажем теорему в предположении, что собственные векторы преобразования $\hat{A}$ образуют в Λ^n базис $\{ f_1, f_2, \ldots, f_n \}$.

Пусть данное линейное преобразование в этом базисе имеет матрицу $\left\|\hat{A}\right\|_f$ и характеристическое уравнение вида $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda^k = 0$. Тогда в силу линейности $\hat{A}$ для собственного вектора f, отвечающего собственному значению λ, имеем (см. задачу 8.5.2):

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left\|\hat{A}\right\|_f^k\right)\|f\|=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left(\left\|\hat{A}\right\|_f^k\|f\|\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left(\left\|\hat{A}\right\|_f\left(\left\|\hat{A}\right\|_f\ldots\left(\left\|\hat{A}\right\|_f\|f\|\right)\ldots\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left(\lambda^k\|f\|\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\lambda^k\right)\|f\|=0\cdot\|f\|=\|o\|\,.$$

Но поскольку это соотношение верно для всех базисных векторов, то оно будет верно и для каждого элемента $x\in\Lambda^n$. Тогда из леммы 5.1.2 следует, что

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left\|\hat{A}\right\|_f^k=\left\|\hat{O}\right\|_f\,.$$

Наконец, выполнив переход (с матрицей перехода $\|S\|$) к произвольному базису $\{\,g_1,\,g_2,\,\ldots,\,g_n\,\}$, получим

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left\|\hat{A}\right\|_g^k=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left(\|S\|^{-1}\left\|\hat{A}\right\|_f\|S\|\right)^k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left(\|S\|^{-1}\left\|\hat{A}\right\|_f\|S\|\cdot\|S\|^{-1}\left\|\hat{A}\right\|_f\|S\|\ldots\|S\|^{-1}\left\|\hat{A}\right\|_f\|S\|\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left(\|S\|^{-1}\left\|\hat{A}\right\|_f^k\|S\|\right)=\|S\|^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left\|\hat{A}\right\|_f^k\right)\|S\|=$$

$$=\|S\|^{-1}\left\|\hat{O}\right\|_f\|S\|=\left\|\hat{O}\right\|_g\,.$$

`Теорема доказана.`

Линейные функционалы

Рассмотрим специальный случай линейного оператора, когда его область значений содержится в одномерном линейном пространстве, изоморфном множеству вещественных чисел.

Такого рода зависимости, следуя классификации, введенной в § 5.2, следует относить к функционалам. Напомним данное ранее

Определение 8.7.1	Пусть *каждому* элементу x линейного пространства Λ поставлено в соответствие *однозначно* определяемое число, обозначаемое $f(x)$. Тогда говорят, что в Λ задан функционал $f(x)$.

Пример 8.7.1

1°. В пространстве n-компонентных столбцов можно задать функционал, сопоставив столбцу $\| \xi_1 \, \xi_2 \, \ldots , \xi_n \|^{\mathrm{T}}$ число $\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i \xi_i$, где $\varphi_i \quad i = [1, n]$ — некоторые фиксированные константы.

2°. В векторном геометрическом пространстве функционалом является длина вектора, то есть $f(\vec{r}\,) = |\vec{r}\,|$.

3°. В пространстве функций $x(\tau)$, определенных на $[-1, 1]$, функционалом является так называемая «дельта-функция Дирака», обозначаемая как $\delta(x(\tau))$, ставящая в соответствие каждой функции $x(\tau)$ ее значение в нуле, то есть число $x(0)$.

4°. В пространстве функций $x(\tau)$, непрерывных на (α, β), функционалом является

$$f\big(x(\tau)\big) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} p(\tau) x(\tau) \, d\tau \, ,$$

где $p(\tau)$ — некоторая непрерывная на (α, β) функция.

5°. В линейном пространстве квадратных матриц вида $\|A\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \right\|$ функционалом является

$$f(\|A\|) = \det \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \right\| .$$

Определение 8.7.2	Функционал $f(x)$ называется *линейным* функционалом (или линейной формой), если $\forall x, y \in$ и $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \, .$$

Задача 8.7.1 *Доказать, что в примере 8.7.1 функционалы 1°, 3° и 4° являются линейными, а функционалы 2° и 5° – нет.*

Представление линейного функционала в Λ^n

Пусть в Λ^n дан базис $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n \}$ и пусть элемент $x \in \Lambda^n$ имеет координатное разложение $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i g_i$ и координатное представление $\left\| \xi_1 \, \xi_2 \, \ldots \, \xi_n \right\|^{\mathrm{T}}$. Тогда для каждого линейного функционала $f(x)$ справедливы соотношения

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(g_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \xi_i \, .$$

Числа $\varphi_i = f(g_i) \quad \forall i = [1, n]$ принято называть *компонентами* (или *координатами*) линейного функционала $f(x)$ в данном базисе $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n \}$.

Из этих равенств следует легко проверяемая

Теорема 8.7.1 **Каждый линейный функционал $f(x)$ в Λ^n в конкретном базисе $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n \}$ имеет однозначно определяемую строку компонентов**

$$\|f\|_g = \left\| \varphi_1 \, \varphi_2 \, \ldots \, \varphi_n \right\| ,$$

а каждая строка $\left\| \varphi_1 \, \varphi_2 \, \ldots \, \varphi_n \right\|$ в этом базисе определяет линейный функционал $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i \xi_i$, или в матричном виде $f(x) = \|f\|_g \|x\|_g$.

Теорема 8.7.2 **В Λ^n в базисах $\{ g_1, g_2, \dots, g_n \}$ и $\{ g'_1, g'_2, \dots, g'_n \}$ компоненты координатных представлений линейного функционала**

$$\|f\|_g = \| \varphi_1 \, \varphi_2 \, \dots \, \varphi_n \| \quad \textbf{и} \quad \|f\|_{g'} = \| \varphi'_1 \, \varphi'_2 \, \dots \, \varphi'_n \|$$

связаны соотношением $\varphi'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{ij} \varphi_i \quad \forall j = [1, n]$,

где коэффициенты σ_{ij} суть элементы матрицы $\|S\|$ — перехода от первого базиса ко второму.

В матричной форме это утверждение имеет вид $\|f\|_{g'} = \|f\|_g \|S\|$.

Сопряженное (двойственное) пространство.

Поскольку линейные функционалы являются частным случаем линейных операторов, то для них можно ввести операции сравнения, сложения и умножения на число.

Теорема 8.7.3 **Множество всех линейных функционалов, заданных в линейном пространстве Λ , является линейным пространством.**

Определение 8.7.3	Линейное пространство линейных функционалов, заданных в Λ, называется *сопряженным* (или *двойственным*) пространству Λ и обозначается Λ^+.

Теорема 8.7.4 **Размерность пространства Λ^{n+}, сопряженного Λ^n, равна n.**

Вторичное сопряженное (вторичное двойственное) пространство

Поскольку Λ^{n+} является n-мерным линейным пространством, то в нем так же, как и в Λ^{n}, возможно определять линейные функционалы и рассматривать их совокупность как новое линейное пространство Λ^{n++}, сопряженное к Λ^{n+}. Будем называть это пространство *вторичным сопряженным* для линейного пространства Λ^{n}.

Очевидно, что линейные пространства Λ^{n}, Λ^{n+} и Λ^{n++} n-мерные и, следовательно, изоморфны друг другу. Однако, можно показать, что для пространств Λ^{n} и Λ^{n++} существует особый изоморфизм, позволяющий не делать различия между этими пространствами.

Это также позволяет записывать связь между значениями линейных функционалов, действующих в Λ^{n} и Λ^{n+}, в следующем симметричном виде: $f(x) = x(f)$.