Нелинейные зависимости в линейном пространстве

Билинейные функционалы

Определение 9.1.1	Пусть в линейном пространстве Λ каждой упорядоченной паре элементов x и y поставлено в соответствие число $B(x,y)$ так, что 1) $B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 B(x_1, y) + \alpha_2 B(x_2, y)$, 2) $B(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \beta_1 B(x, y_1) + \beta_2 B(x, y_2)$ $\forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in \Lambda, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, тогда говорят, что в Λ задан *билинейный функционал* (или *билинейная форма*).

Пример 9.1.1

1°. Произведение двух линейных функционалов $F(x)$ и $G(y)$, определенных в Λ, $B(x,y) = F(x)G(y)$ есть билинейный функционал.

2°. Двойной интеграл

$$B(x,y) = \iint\limits_{\Omega} K(\sigma,\tau)x(\sigma)y(\tau)\,d\sigma d\tau =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(\sigma) \left(\int\limits_{\gamma}^{\delta} K(\sigma,\tau)y(\tau)\,d\sigma \right) d\sigma\,,$$

где функция двух переменных $K(\sigma,\tau)$ непрерывна на прямоугольнике $\{\Omega : \ \alpha \le \sigma \le \beta,\ \gamma \le \tau \le \delta\}$, есть билинейный функционал в линейном пространстве непрерывных функций $x(\sigma)$ и $y(\tau)$.

3°. Билинейным функционалом является скалярное произведение векторов на плоскости или в пространстве.

Билинейные функционалы в Λ^n

Пусть в Λ^n заданы базис $\{g_1,\, g_2,\, \ldots,\, g_n\}$ и билинейный функционал $B(x,y)$. Найдем формулу, выражающую его значение через координаты аргументов.

Предположим, что в данном базисе $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i g_i$ и $y = \sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j g_j$, тогда, согласно определению 9.1.1, справедливы равенства

$$B(x,y) = B\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i\,, \sum_{j=1}^{n} \eta_j g_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i B\left(g_i\,, \sum_{j=1}^{n} \eta_j g_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j B\left(g_i, g_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \xi_i \eta_j\,. \qquad (9.1.1)$$

`Определение 9.1.2`	Числа $\beta_{ij} = B(g_i, g_j) \quad \forall i,j = [1,n]$ называются *компонентами билинейного функционала* $B(x,y)$ в базисе $\{g_1,\, g_2,\, \ldots,\, g_n\}$, а матрица $\|B\|_g = \|\beta_{ij}\|$ — *матрицей билинейного функционала* в этом базисе.

В Λ^n с базисом $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ билинейный функционал может быть представлен в виде

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\xi_i\eta_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_{i1}\beta_{ij}\eta_{j1} = \sum_{i=1}^{n}\xi_{1i}^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\eta_{j1} =$$

$$= \|\,\xi_1\;\xi_2\;\dots\;\xi_n\,\| \left\| \begin{array}{cccc} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{array} \right\| =$$

$$= \|x\|_g^{\mathrm{T}}\|B\|_g\|y\|_g\,,$$

где столбцы $\|x\|_g$ и $\|y\|_g$ — координатные представления элементов x и y в данном базисе.

Матрица билинейного функционала зависит от выбора базиса. Правило изменения матрицы билинейного функционала при замене базиса дает

Теорема 9.1.1 **Пусть $\|S\|$ — матрица перехода от базиса $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \ldots, g'_n\}$, тогда**

$$\|B\|_{g'} = \|S\|^{\mathrm{T}} \|B\|_g \|S\| .$$

Доказательство.

По определению матрицы перехода от одного базиса к другому в пространстве Λ^n (см. § 7.3) имеют место соотношения $g'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{ij} g_i \quad \forall j = [1, n]$, но тогда

$$\beta'_{pq} = B\big(g'_p, g'_q\big) = B\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ip} g_i, \sum_{j=1}^{n} \sigma_{jq} g_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ip} \sigma_{jq} B\big(g_i, g_j\big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ip} \sigma_{jq} \beta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sigma^{\mathrm{T}}_{pi} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \sigma_{jq} \quad \forall p, q = [1, n].$$

Теорема доказана.

Следствие 9.1.1 $$\det\|B\|_{g'} = \det\|B\|_g \det^2\|S\|\,.$$

Отметим, что в силу невырожденности матрицы перехода *знак определителя* матрицы билинейного функционала не зависит от выбора базиса.

Следствие 9.1.2 ***Ранг*** **матрицы билинейного функционала не зависит от выбора базиса.**

Доказательство.

Следует из теоремы 8.4.3 и невырожденности матрицы перехода $\|S\|$.

Следствие доказано.

Определение 9.1.3	Билинейный функционал называется *симметричным*, если для любой упорядоченной пары элементов x и y линейного пространства Λ имеет место равенство $B(y,x) = B(x,y)$.

Теорема 9.1.2 **Для симметричности билинейного функционала в Λ^n необходимо и достаточно, чтобы его матрица была *симметрической*.**

Доказательство.

Необходимость следует из соотношений

$$\beta_{ji} = B(g_j, g_i) = B(g_i, g_j) = \beta_{ij} \qquad \forall i, j = [1, n] \,.$$

Докажем достаточность.

Действительно, если $\beta_{ji} = \beta_{ij} \qquad \forall i, j = [1, n]$, то

$$B(y,x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_{ji}\eta_j\xi_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_{ji}\xi_i\eta_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\xi_i\eta_j = B(x,y) \,.$$

Теорема доказана.

Квадратичные функционалы

Определение 9.2.1	Пусть в линейном пространстве Λ каждому элементу x поставлено в соответствие число $\Phi(x) = B(x,x)$, где $B(x,y)$ — некоторый билинейный функционал в Λ, тогда говорят, что в Λ задан *квадратичный функционал* (или *квадратичная форма*).

В общем случае в вещественном линейном пространстве по заданному квадратичному функционалу нельзя восстановить порождающий его билинейный функционал, однако это можно сделать в случае симметричного билинейного функционала.

Действительно, пусть квадратичный функционал $\Phi(x)$ порожден симметричным билинейным функционалом $B(x,y)$, тогда для любых x и y имеют место равенства

$$\Phi(x+y) = B(x+y,x+y) = B(x,x) + B(x,y) + B(y,x) + B(y,y) =$$

$$= B(x,x) + 2B(x,y) + B(y,y) = \Phi(x) + 2B(x,y) + \Phi(y)\,.$$

Откуда $\quad B(x,y) = \dfrac{\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)}{2}.$

Определение 9.2.2	В Λ^n симметрическая матрица билинейного функционала $\dfrac{\Phi(x+y)-\Phi(x)-\Phi(y)}{2}$ называется *матрицей квадратичного функционала* $\Phi(x)$.

Пусть матрица квадратичного функционала $\|\Phi\|_g = \|\varphi_{ij}\|$. Тогда из свойств билинейного функционала следует, что если в Λ^n задан базис $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, то квадратичный функционал может быть представлен в виде

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}\xi_i\xi_j =$$

$$= \|\,\xi_1\,\xi_2\,\ldots\,\xi_n\,\| \left\| \begin{array}{cccc} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \ldots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \ldots & \varphi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \ldots & \varphi_{nn} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{array} \right\| =$$

$$= \|x\|_g^{\mathrm{T}}\|\Phi\|_g\|x\|_g\,,$$

где столбец $\|x\|_g$ — координатное представление элемента $x = \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i g_i$ в данном базисе. Замена базиса, в свою очередь, приводит к изменению матрицы квадратичного функционала по формуле

$$\|\Phi\|_{g'} = \|S\|^{\mathrm{T}}\|\Phi\|_g\|S\|\,,$$

следующей из теоремы 9.1.1.

Отметим, что иногда целесообразно строить квадратичный функционал $\Phi(x)$ по порождающему билинейному функционалу, просимметрировав предварительно последний.

Действительно, для любого $B(x,y)$ можно указать симметричный билинейный функционал вида $\dfrac{B(x,y)+B(y,x)}{2}$, который будет порождать *тот же самый* квадратичный функционал $\Phi(x)$, что и $B(x,y)$. В этом случае очевидно, что

$$\varphi_{ij} = \frac{\beta_{ij}+\beta_{ji}}{2} = \frac{\beta_{ji}+\beta_{ij}}{2} = \varphi_{ji} \qquad \forall i,j=[1,n]$$

— элементы симметрической матрицы.

На практике нередко оказывается необходимым отыскание базисов, в которых квадратичный функционал имеет наиболее простой и удобный для исследования вид. Понятие *простой* уточняет

Определение 9.2.3

Квадратичный функционал $\Phi(x)$ имеет *диагональный* вид в базисе $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subset \Lambda^n$, если он в этом базисе представим как

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2 \,,$$

где $\lambda_i \quad \forall i = [1, n]$ — некоторые числа.

Если, кроме того, числа $\lambda_i \quad \forall i = [1, n]$ принимают лишь значения 0 или ± 1, то говорят, что квадратичный функционал в данном базисе имеет *канонический* вид.

Теорема 9.2.1 (Метод Лагранжа)

Для каждого квадратичного функционала в Λ^n существует базис, в котором функционал имеет канонический вид.

Доказательство.

Воспользуемся методом математической индукции.

1°. При $n = 1$ в любом базисе $\Phi(x) = \varphi_{11}\xi_1^2$. Если $\varphi_{11} = 0$, то мы уже имеем канонический вид, если же $\varphi_{11} \neq 0$, то при помощи очевидно невырожденной замены переменных $\xi_1' = \sqrt{|\varphi_{11}|}\, \xi_1$ приходим к каноническому виду.

2°. Предположим, что утверждение теоремы верно для квадратичных функционалов, зависящих от $n-1$ переменной, и рассмотрим случай n переменных.

Будем считать, что $\varphi_{11} \neq 0$. Этого можно добиться изменением нумерации переменных в случае, когда хотя бы одно из чисел $\varphi_{ii} \quad \forall i = [2, n]$ не равно нулю. Если же $\varphi_{ii} = 0 \quad \forall i = [1, n]$, то без ограничения общности можно считать, что $\varphi_{12} \neq 0$. Тогда, выполнив невырожденную замену переменных

$$\begin{aligned} &\xi_1 = \xi_1' + \xi_2', \\ &\xi_2 = \xi_1' - \xi_2', \\ &\xi_3 = \xi_3', \qquad \xi_4 = \xi_4', \quad \ldots, \qquad \xi_n = \xi_n', \end{aligned}$$

получим координатное представление квадратичного функционала с ненулевым диагональным элементом

$$\Phi(x) = 2\xi_1' - 2\xi_2' + R\big(\,\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_n'\,\big)\,,$$

где $R\big(\,\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_n'\,\big)$ не содержит квадратов от ξ_1' и ξ_2'.

3°. В записи квадратичного функционала сгруппируем слагаемые, содержащие переменную ξ_1:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi_{ik}\xi_i\xi_k =$$

$$= \varphi_{11}\left(\xi_1^2 + 2\sum_{i=2}^{n}\frac{\varphi_{1i}}{\varphi_{11}}\xi_1\xi_i\right) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{k=2}^{n}\varphi_{ik}\xi_i\xi_k,$$

и выделим полный квадрат, воспользовавшись соотношениями

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_i\alpha_k = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2 =$$

$$= \left(\alpha_1 + \sum_{i=2}^{n}\alpha_i\right)^2 = \alpha_1^2 + 2\alpha_1\sum_{i=2}^{n}\alpha_i + \left(\sum_{i=2}^{n}\alpha_i\right)^2 =$$

$$= \alpha_1^2 + 2\sum_{i=2}^{n}\alpha_1\alpha_i + \sum_{i=2}^{n}\sum_{k=2}^{n}\alpha_i\alpha_k\,.$$

Получим

$$\Phi(x) = \varphi_{11}\left(\xi_1^2 + 2\sum_{i=2}^{n}\frac{\varphi_{1i}}{\varphi_{11}}\xi_1\xi_i + \sum_{i=2}^{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{\varphi_{1i}\varphi_{1k}}{\varphi_{11}^2}\xi_i\xi_k\right) +$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=2}^{n}\left(\varphi_{ik} - \frac{\varphi_{1i}\varphi_{1k}}{\varphi_{11}^2}\right)\xi_i\xi_k$$

и, окончательно,

$$\Phi(x) = \varphi_{11}\left(\xi_1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{\varphi_{1i}}{\varphi_{11}}\xi_1\right)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{k=2}^{n}\left(\varphi_{ik} - \frac{\varphi_{1i}\varphi_{1k}}{\varphi_{11}^2}\right)\xi_i\xi_k.$$

В последней формуле первое слагаемое есть полный квадрат, а второе — квадратичный функционал, не зависящий от ξ_1 и приводящийся, согласно предположению индукции, к каноническому виду некоторой невырожденной заменой переменных $\quad \xi'_k = \sum\limits_{i=2}^{n}\tau_{ki}\xi_i \quad \forall k = [2, n]$.

4°. Выполним замену переменных квадратичного функционала $\Phi(x)$ по формулам

$$\left\{\begin{array}{rcl} \xi'_1 & = & \sqrt{|\varphi_{11}|}\left(\xi_1 + \sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{\varphi_{1i}}{\varphi_{11}}\xi_1\right), \\ \xi'_k & = & \sum\limits_{i=2}^{n}\tau_{ki}\xi_i \qquad \forall k = [2, n], \end{array}\right. \tag{9.2.1}$$

которая приведет к представлению его в каноническом виде. Поскольку в силу $\varphi_{11} \neq 0$ матрица выполненной замены переменных

$$\|T\| = \left\|\begin{array}{cccc} \sqrt{|\varphi_{11}|} & \sqrt{|\varphi_{11}|}\dfrac{\varphi_{12}}{\varphi_{11}} & \dots & \sqrt{|\varphi_{11}|}\dfrac{\varphi_{1n}}{\varphi_{11}} \\ 0 & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{array}\right\|$$

имеет определитель, не равный нулю, то замена (9.2.1) невырожденная. Но тогда матрица $\|T\|$ имеет обратную: $\|S\| = \|T\|^{-1}$ (см. следствие 7.5.3), которая в свою очередь является матрицей перехода от исходного базиса к искомому *каноническому* базису.

Теорема доказана.

`Замечание 9.2.1.` Базис, в котором квадратичный функционал имеет канонический вид, не единственный, равно как не является единственным сам канонический вид квадратичного функционала в Λ^n.

Вариант метода Лагранжа, использованный в доказательстве теоремы 9.2.1, не всегда оказывается самой эффективной (с точки зрения затрат вычислительных усилий) процедурой. Иногда приведение матрицы квадратичного функционала к диагональному (или каноническому) виду более рационально выполнять путем использования некоторого набора элементарных преобразований.

0.0.1. Исследование знака квадратичного функционала

Несмотря на неединственность диагонального или канонического представления, квадратичные функционалы в Λ^n обладают рядом важных свойств, инвариантных относительно (то есть не зависящих от) выбора базиса. Одной из таких характеристик является ранг квадратичного функционала, которую вводит

Определение 9.3.1 Максимальное число не равных нулю коэффициентов канонического вида квадратичного функционала $\Phi(x)$ в Λ^n называется его *рангом* и обозначается как $\operatorname{rg}\Phi$ (или $\operatorname{rank}\Phi$).

Теорема 9.3.1 **Ранг квадратичного функционала в Λ^n не зависит от выбора базиса.**

Доказательство.

По следствию 9.1.2 ранг матрицы билинейного функционала не зависит от выбора базиса. Поэтому не будет зависеть от выбора базиса и ранг матрицы порождаемого им квадратичного функционала.

С другой стороны, в силу теорем 8.4.3 и 9.1.1 ранг матрицы квадратичного функционала равен числу ненулевых коэффициентов в каноническом виде, а значит, и его рангу.

Теорема доказана.

При исследовании знака значений квадратичного функционала оказывается полезным использование следующих его характеристик.

Определение 9.3.2	1°. Максимальное число положительных коэффициентов диагонального (канонического) вида квадратичного функционала $\Phi(x)$ в Λ^n называется его *положительным индексом инерции* и обозначается $\mathrm{rg}_+\,\Phi$. 2°. Максимальное число отрицательных коэффициентов диагонального (канонического) вида квадратичного функционала $\Phi(x)$ называется его *отрицательным индексом инерции* и обозначается $\mathrm{rg}_-\,\Phi$. 3°. Разность между положительным и отрицательным индексами инерции называется *сигнатурой* квадратичного функционала $\Phi(x)$ и обозначается $\mathrm{sgn}\,\Phi$.

Теорема 9.3.2 (инерции квадратичных функционалов)

Значения положительного и отрицательного индексов инерции, а также сигнатуры квадратичного функционала $\Phi(x)$ в Λ^n *не зависят* **от выбора базиса, в котором этот функционал имеет диагональный (или канонический) вид.**

Доказательство.

1°. Пусть квадратичный функционал $\Phi(x)$ имеет в некотором базисе $\{g_1,\, g_2,\, \ldots,\, g_n\}$ координатное представление $\Phi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_{ik}\xi_i\xi_k$ и пусть существуют два различных базиса $\{g'_1,\, g'_2,\, \ldots,\, g'_n\}$ и $\{g"_1,\, g"_2,\, \ldots,\, g"_n\}$, в которых данный функционал имеет следующий диагональный вид:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\eta_i^2 - \sum_{i=k+1}^{m}\lambda_i\eta_i^2, \qquad m \le n, \;\; \lambda_i > 0 \;\; \forall i = [1,m]$$

и, соответственно,

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{p}\mu_i\kappa_i^2 - \sum_{i=p+1}^{q}\mu_i\kappa_i^2, \qquad q \le n, \quad \mu_i > 0 \;\; \forall i = [1,q]\,,$$

где $\|x\|_{g'} = \|\,\eta_1\,\eta_2\,\ldots\,\eta_n\,\|^{\mathrm{T}}$ и $\|x\|_{g''} = \|\,\kappa_1\,\kappa_2\,\ldots\,\kappa_n\,\|^{\mathrm{T}}$.

В этом случае должны существовать формулы перехода от диагональных базисов к исходному, такие, что

$$\eta_s = \sum_{j=1}^{n}\omega_{sj}\xi_j \quad \text{и} \quad \kappa_s = \sum_{j=1}^{n}\theta_{sj}\xi_j \qquad \forall s = [1,n]\,. \quad (9.3.1)$$

2°. Для некоторого элемента

$$x = \sum_{j=1}^{n}\xi_j g_j = \sum_{j=1}^{n}\eta_j g'_j = \sum_{j=1}^{n}\kappa_j g''_j$$

приравняем значения функционала $\Phi(x)$ в диагональных базисах

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\eta_i^2 - \sum_{i=k+1}^{m}\lambda_i\eta_i^2 = \sum_{i=1}^{p}\mu_i\kappa_i^2 - \sum_{i=p+1}^{q}\mu_i\kappa_i^2$$

и преобразуем полученное равенство к виду

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\eta_i^2 + \sum_{i=p+1}^{q}\mu_i\kappa_i^2 = \sum_{i=k+1}^{m}\lambda_i\eta_i^2 + \sum_{i=1}^{p}\mu_i\kappa_i^2\,. \qquad (9.3.2)$$

3°. Исследуем полученное соотношение. Допустим, что $k < p$, и предположим, что элемент x имеет в диагональных базисах координаты

$$\eta_j = 0 \quad \forall j = [1, k] \qquad \text{и} \qquad \kappa_j = 0 \quad \forall j = [p+1, n]\,. \tag{9.3.3}$$

Этих условий меньше, чем n, поскольку $k < p$. Если их подставить в равенства (9.3.1), то мы получим однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Поскольку число таких уравнений меньше числа неизвестных, то можно утверждать, что она в силу теоремы 6.7.1 имеет нетривиальные решения, и, следовательно, элемент может быть *ненулевым.*

С другой стороны, из равенства (9.3.2), положительности чисел $\lambda_j \quad \forall j = [1, m]$ и $\mu_j \quad \forall j = [1, q]$, а также условий (9.3,3) следует, что и все $\kappa_j = 0 \;\; \forall j = [1, n]$.

Тогда в силу (9.3.1) мы получаем однородную систему n линейных уравнений

$$\kappa_s = \sum_{j=1}^{n} \theta_{sj} \xi_j \qquad \forall s = [1, n]$$

с n неизвестными и невырожденной (поскольку она есть матрица перехода) основной матрицей, имеющую только тривиальное решение, то есть элемент x обязан быть *нулевым.* Полученное противоречие показывает ошибочность предположения о том, что $k < p$.

4°. Аналогичными рассуждениями показываем, что невозможно и соотношение $k > p$. Поэтому приходим к заключению, что $k = p$.

5°. По теореме 9.3.1 $m = q$ и потому $k - m = p - q$.

`Теорема доказана.`

При исследовании знака значений квадратичного функционала оказывается полезным понятие его *знаковой определенности.*

Определение 9.3.3	1°. Квадратичный функционал $\Phi(x)$ называется *положительно определенным* на подпространстве $\Omega \subseteq \Lambda$, если $\Phi(x) > 0$ для любого ненулевого $x \in \Omega$. 2°. Квадратичный функционал $\Phi(x)$ называется *отрицательно определенным* на подпространстве $\Omega \subseteq \Lambda$, если $\Phi(x) < 0$ для любого ненулевого $x \in \Omega$. 3°. Если же Ω совпадает с Λ, то говорят, что квадратичный функционал $\Phi(x)$ является *положительно* (или соответственно *отрицательно*) *определенным.* 4°. Если же $\Phi(x) \geq 0$ $\big(\Phi(x) \leq 0\big)$ для всех $x \in \Lambda$, то говорят, что квадратичный функционал является *положительно* (*отрицательно*) *полуопределенным.*

В ряде прикладных задач возникает потребность в исследовании знаковой определенности квадратичного функционала без приведения его к диагональному виду. Удобное для этого условие положительной определенности квадратичного функционала дает

Теорема 9.3.4 (критерий Сильвестра) **Для положительной определенности квадратичного функционала в Λ^n необходимо и достаточно, чтобы у его матрицы были** *положительными* **все главные миноры вида**

$$\det\begin{Vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1k} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{k1} & \varphi_{k2} & \cdots & \varphi_{kk} \end{Vmatrix} \qquad \forall k = [1, n]\,.$$

Исходя из критерия Сильвестра для положительной определенности квадратичного функционала, можно получить аналогичный критерий *отрицательной* определенности квадратичного функционала.

Следствие 9.3.1 **Для отрицательной определенности квадратичного функционала в Λ^n необходимо и достаточно, чтобы главные миноры матрицы функционала (указанные в формулировке теоремы 9.3.4) четного порядка были положительны, а нечетного порядка – отрицательны.**

Доказательство.

Пусть квадратичный функционал $\Phi(x)$ отрицательно определенный, тогда функционал $-\Phi(x)$ будет, очевидно, положительно определенным. Применив к нему критерий Сильвестра положительной определенности, получим, в силу линейного свойства определителя (см. следствие 6.2.3), для главного минора k-го порядка условие

$$\det \begin{Vmatrix} -\varphi_{11} & -\varphi_{12} & \cdots & -\varphi_{1k} \\ -\varphi_{21} & -\varphi_{22} & \cdots & -\varphi_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\varphi_{k1} & -\varphi_{k2} & \cdots & -\varphi_{kk} \end{Vmatrix} =$$

$$= (-1)^k \det \begin{Vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1k} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{k1} & \varphi_{k2} & \cdots & \varphi_{kk} \end{Vmatrix} > 0 \qquad \forall k = [1, n] \, .$$

Откуда и следует доказываемое утверждение.

Следствие доказано.

Инварианты линий второго порядка на плоскости

Независимость значений ранга и сигнатуры квадратичного функционала от выбора базиса позволяет выполнить классификацию линий второго порядка на плоскости способом, отличным от приведенного в теореме 4.4.1.

Рассмотрим линию второго порядка на плоскости Oxy в базисе $\{g_1,\, g_2\}$ и с началом координат в точке O. Эта линия в общем случае задается согласно определению 4.4.1 уравнением вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0\,,$$

где числа A, B, C, D, E и F произвольны с одним лишь ограничением, что A, B и C не равны нулю одновременно, т.е. $|A| + |B| + |C| > 0$.

Нетрудно проверить, что при замене начала координат коэффициенты A, B и C не меняются, а при смене базиса преобразуются как коэффициенты квадратичного функционала (см. теорему 9.1.1). Поэтому можно считать, что многочлен $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ задает в исходном базисе $\{g_1,\, g_2\}$ квадратичный функционал

$$\Phi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

с матрицей $\left\| \begin{array}{cc} A & B \\ B & C \end{array} \right\|$.

Из теорем 9.2.2 и 9.3.1 следует, что $\operatorname{rg}\Phi$ — *ранг* и $|\operatorname{sgn}\Phi|$ — *модуль сигнатуры* квадратичного функционала не зависят от выбора системы координат и, следовательно, являются инвариантами линии второго порядка на плоскости.

Модуль сигнатуры здесь необходим, поскольку одновременное изменение знаков всех коэффициентов уравнения линии второго порядка меняет уравнение, но линия при этом останется той же.

В запись уравнения линии второго порядка на плоскости входят также и коэффициенты D, E и F. Поэтому необходимо выяснить, существуют ли другие инварианты, образованные при помощи коэффициентов A, B, C, D, E и F.

Для этого рассмотрим вспомогательный квадратичный функционал в Λ^3 с базисом $\{g_1,\ g_2,\ g_3\}$:

$$\Psi(x,y,z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2$$

с матрицей $\left\| \begin{array}{ccc} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{array} \right\|$. В этом случае совокупность всех точек в Λ^3, для которых $\Psi(x,y,1) = 0$, есть рассматриваемая нами линия второго порядка, расположенная в пространстве на плоскости $z = 1$.

Сделаем в Λ^3 такую замену координат, при которой плоскость $z = 1$ переходит сама в себя. Найдем для такой замены правило изменения коэффициентов квадратичного функционала $\Psi(x,y,z)$.

Лемма 9.4.1

Матрица $\|S\|$ перехода от декартовой системы координат $\{O,\ g_1,\ g_2,\ g_3\}$ к декартовой системе координат $\{O',\ g'_1,\ g'_2,\ g'_3\}$, для которой плоскость $z = 1$ переходит сама в себя, имеет вид

$$\|S\| = \left\| \begin{array}{ccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| .$$

Доказательство.

Воспользуемся формулами замены координат в плоскости Oxy:

$$\begin{cases} x = \sigma_{11}x' + \sigma_{12}y' + \sigma_{13}\,, \\ y = \sigma_{21}x' + \sigma_{22}y' + \sigma_{23}. \end{cases}$$

В матричном виде эти соотношения для Λ^3 при $z = 1$ и $z' = 1$ принимают вид

$$\left\| \begin{matrix} x \\ y \\ 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x' \\ y' \\ 1 \end{matrix} \right\| .$$

Невырожденность матрицы $\|S\|$ следует из очевидного условия $\det \left\| \begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{matrix} \right\| \neq 0\,.$

Лемма доказана.

Поскольку ранг и сигнатура квадратичного функционала не меняются при любых заменах базиса, то это будет верным и для замен, переводящих плоскость $z = 1$ саму в себя. Поэтому $\operatorname{rg}\Psi$ и $\operatorname{sgn}\Psi$ сохраняются при таких заменах, а числа $\operatorname{rg}\Psi$ и $|\operatorname{sgn}\Psi|$ являются инвариантами уравнения линии второго порядка. Таким образом, доказана

Теорема 9.4.1 **При любых заменах декартовой системы координат на плоскости числа** $\operatorname{rg}\Phi$, $|\operatorname{sgn}\Phi|$, $\operatorname{rg}\Psi$ **и** $|\operatorname{sgn}\Psi|$ **являются инвариантами линии второго порядка.**

Подсчитаем значения четырех параметров $\operatorname{rg}\Phi$, $|\operatorname{sgn}\Phi|$, $\operatorname{rg}\Psi$ и $|\operatorname{sgn}\Psi|$ для каждого из девяти канонических видов линий второго порядка на плоскости, приведенных в формулировке теоремы 4.4.1, в предположении, что система координат $\{O',\, g_1',\, g_2',\, g_3'\}$ оказалась канонической.

Например, для эллипса имеем

$$\Phi(x',y') = \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}\,, \qquad \Psi(x',y',z') = \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - z'^2\,.$$

Это дает $\operatorname{rg}\Phi = 2$, $|\operatorname{sgn}\Phi| = 2$, $\operatorname{rg}\Psi = 3$ и $|\operatorname{sgn}\Psi| = 1$.

Такой метод дает нужный результат в восьми случаях из девяти. Однако для параболы (хотя с функционалом $\Phi(x', y') = y'^2$ проблем не возникает) подсчет значений ранга и сигнатуры по виду функционала в каноническом базисе $\Psi(x', y', z') = y'^2 - 2px'$ невозможен, поскольку его матрица имеет недиагональный вид:

$$\|\Psi\|_{g'} = \left\| \begin{array}{rrr} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{array} \right\| .$$

Для получения диагонального вида и подсчета ранга и сигнатуры здесь можно использовать матрицу перехода следующего вида:

$$\|S\| = \left\| \begin{array}{lcr} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right\| ,$$

которая приводит матрицу $\|\Psi\|_{g'}$ к диагональному виду.

Такая замена координат хотя и не обеспечивает перехода плоскости $z = 1$ самой в себя, но она, как всякая линейная замена, сохраняет ранг и сигнатуру.

Таблица 9.4.1

Вид линии	**Уравнение**	rg Ψ	$\lvert\mathrm{sgn}\,\Psi\rvert$	rg Φ	$\lvert\mathrm{sgn}\,\Phi\rvert$
Эллипс	$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$	3	1	2	2
Мнимый эллипс	$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=-1$	3	3	2	2
Изолированная точка	$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=0$	2	2	2	2
Гипербола	$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$	3	1	2	0
Пересекающиеся прямые	$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=0$	2	0	2	0
Парабола	$y'^2=2px'$	3	1	1	1
Параллельные прямые	$y'^2=a^2 \quad \forall x'$	2	0	1	1
Совпадающие прямые	$y'^2=0 \quad \forall x'$	1	1	1	1
Пара мнимых прямых	$y'^2=-a^2 \quad \forall x'$	2	2	1	1

Действительно,

$$\|\Psi\|_{g''} = \|s\|^{\mathrm{T}}\|\Psi\|_{g'}\|s\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{rcr} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{rcr} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{rcr} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccr} 2p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2p \end{array} \right\|,$$

что в итоге дает $\quad \mathrm{rg}\,\Phi = 1,\ |\,\mathrm{sgn}\,\Phi| = 1,\ \mathrm{rg}\,\Psi = 3$ и $|\,\mathrm{sgn}\,\Psi| = 1.$

Полученные результаты сведем в таблицу 9.4.1, из которой следует, что каждый вид линии второго порядка на плоскости имеет свой уникальный набор значений инвариантов, который может быть принят за признак принадлежности некоторой линии второго порядка к конкретному виду.

Экстремальные свойства квадратичных функционалов

Из теоремы 9.2.1 следует существование в Λ^n базиса, в котором квадратичный функционал $\Phi(x)$ имеет диагональный вид. Допустим, что этот базис $\{ g'_1, g'_2, \ldots, g'_n \}$ построен так, что $\Phi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i'^2$ и $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ \ldots \leq \lambda_n$. Тогда справедлива

Теорема 9.5.1 **Для квадратичного функционала $\Phi(x)$ в Λ^n верны оценки $\lambda_1 = \min\limits_{x \in \Omega} \Phi(x)$ и $\lambda_n = \max\limits_{x \in \Omega} \Phi(x)$, где $\Omega = \left\{ x \;\middle|\; \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i'^2 = 1 \right\}$.**

Доказательство.

Если в рассматриваемом базисе $\Phi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i'^2$, то в силу соотношений $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ \ldots \leq \lambda_n$ будут иметь место неравенства

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \xi_i'^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i'^2 \qquad \text{и} \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i'^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \xi_i'^2 .$$

Но поскольку $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i'^2 = 1$, то будут также справедливы и оценки

$$\lambda_1 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i'^2 \qquad \text{и} \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i'^2 \leq \lambda_n .$$

То есть при $x = \| \, 1 \; 0 \; \ldots \; 0 \, \|^{\mathrm{T}}$ достигается максимум, а при $x = \| \, 0 \; 0 \; \ldots \; 1 \, \|^{\mathrm{T}}$ — минимум значений функционала.

Теорема доказана.

Полилинейные функционалы

По аналогии с билинейными функционалами, зависящими от пары элементов линейного пространства, можно определить нелинейные функционалы (называемые *полилинейными*), обладающие аналогичными свойствами, но зависящие от большего числа аргументов.

Определение 9.6.1	Пусть в линейном пространстве Λ каждому упорядоченному набору из k элементов $\{\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n\}$ поставлено в соответствие число $\Phi\Big(\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n\,\Big)$ так, что $\forall j = [1, k]$ $$\Phi\Big(\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, \alpha x'_j + \beta x''_j,\, \ldots,\, x_n\,\Big) = = \alpha\Phi\Big(\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x'_j,\, \ldots,\, x_n\,\Big) + +\beta\Phi\Big(\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x''_j,\, \ldots,\, x_n\,\Big)$$ $$\forall x'_j, x''_j \in \Lambda \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,$$ тогда говорят, что в Λ задан *полилинейный* функционал, а именно *k-линейный* функционал.

Пример 9.6.1:

1°. Произведение k, определенных в Λ, линейных функционалов $F_1(x)$, $F_2(x)$, …, $F_k(x)$, то есть

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_k) = F_1(x_1)\, F_2(x_2)\, \dots F_k(x_k),$$

является k-линейным функционалом в Λ.

2°. Смешанное произведение трех векторов в трехмерном геометрическом пространстве является *трилинейным* функционалом.

3°. Определитель n-го порядка есть полилинейный функционал от n элементов в Λ^n в случае, когда координатные представления этих элементов являются столбцами данного определителя.

4°. Стоит также отметить, что к полилинейным функционалам относятся специальные математические объекты, называемые *тензорами.* Эти объекты позволяют единообразно описывать и использовать в Λ^n, введенные в нашем курсе независимо друг от друга, понятия элементов, операторов и функционалов. Тензоры, их определение, свойства и операции с ними, подробно рассматриваются в Приложении 4.