# Евклидово пространство

## Определение и основные свойства

В произвольном линейном пространстве отсутствуют понятия *длины, расстояния, величины угла* и других *метрических характеристик*. Однако их использование становится возможным, если в линейном пространстве дополнительно ввести специальную, определяемую ниже, операцию.

**Определение 10.1.1** Пусть в вещественном линейном пространстве $\Lambda$ каждой упорядоченной паре элементов $x$ и $y$ поставлено в соответствие вещественное число $(x, y)$, называемое *скалярным произведением*, так, что выполнены аксиомы:

$$
\begin{array}{ll}
1^\circ. & (x, y) = (y, x), \\
2^\circ. & (x, y + z) = (x, y) + (x, z) \quad \forall z \in \Lambda, \\
3^\circ. & (\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\
4^\circ. & (x, x) \geq 0 \quad \forall x, \\
 & \text{причем} \qquad (x, x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = o,
\end{array}
$$

тогда говорят, что задано *евклидово пространство* $E$.

Замечание 10.1.1. Аксиомы 1°–4° в совокупности означают, что скалярное произведение есть *билинейный* (следует из 2° и 3°) и *симметричный* (следует из 1°) функционал, который, кроме того, порождает *положительно определенный квадратичный* (следует из 4°) функционал.

Любой билинейный функционал, обладающий данными свойствами, может использоваться в качестве скалярного произведения.

Пример 10.1.1

1°. Трехмерное геометрическое пространство со скалярным произведением, введенным по правилам § 2.2, является евклидовым.

2°. Пространство $n$-мерных столбцов

$$x = \| \, \xi_1 \, \xi_2 \, \ldots \xi_n \, \|^{\mathrm{T}} \qquad \text{и} \qquad y = \| \, \eta_1 \, \eta_2 \, \ldots \eta_n \, \|^{\mathrm{T}}$$

со скалярным произведением, определяемым по формуле $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$, есть евклидово пространство.

3°. Евклидовым будет пространство непрерывных на $\tau \in [\alpha, \beta]$ функций $x(\tau)$ и $y(\tau)$ со скалярным произведением $(x, y) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(\tau) y(\tau) \, d\tau$.

Задача 10.1.1 *Можно ли в трехмерном пространстве скалярное произведение определить как произведение длин векторов на куб косинуса угла между ними?*

Решение. Нет, нельзя, так как не будет выполняться аксиома 3° в определении 10.1.1.

| Определение 10.1.2 | В евклидовом пространстве $E$ назовем<br>1) *нормой* (или *длиной*) элемента $x \in E$ число $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ ;<br>2) *расстоянием* между элементами $x$ и $y$ число $\|x - y\|$. |
|---|---|

Замечание 10.1.2 Использование для обозначения нормы элемента одинарных вертикальных ограничителей вида $| \ldots |$ не приводит к каким-либо конфликтам с введенными ранее обозначениями, поскольку для линейного пространства вещественных чисел норма числа, очевидно, совпадает с его абсолютной величиной, для комплексного числа норма совпадает с его модулем, а для линейного пространства геометрических векторов — с длиной вектора.

Теорема 10.1.1 (Неравенство Коши - Буняковского) **Для любых $x, y \in E$ имеет место неравенство**

$$\left|(x, y)\right| \leq |\,x\,|\,|\,y\,|\,.$$

Доказательство.

Для $\forall x, y \in E$ и любого числа $\tau \in \mathbb{R}$ элемент $x - \tau y \in E$ . Согласно четырем аксиомам из определения 10.1.1 и определению 10.1.2 имеем

$$0 \leq (x - \tau y, x - \tau y) = (x, x) - (x, y)\tau - (y, x)\tau + (y, y)\tau^2 =$$

$$= (x, x) - 2(x, y)\tau + (y, y)\tau^2 = |\,x\,|^2 - 2(x, y)\tau + |\,y\,|^2\tau^2.$$

Полученный квадратный трехчлен неотрицателен $\forall\tau$ тогда и только тогда, когда его дискриминант неположителен, то есть

$$(x, y)^2 - |\,x\,|^2|\,y\,|^2 \leq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \left|(x, y)\right| \leq |\,x\,|\,|\,y\,|\,.$$

Теорема доказана.

Следствие 10.1.1 (неравенство треугольника) **Для любых $x, y \in E$ имеет место неравенство**

$$\left| x+y \right| \leq \left| x \right| + \left| y \right| .$$

Доказательство.

Из аксиом евклидова пространства и неравенства Коши – Буняковского имеем

$$\left| x+y \right|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leq$$

$$\leq \left| x \right|^2 + 2\left| x \right| \left| y \right| + \left| y \right|^2 = \left( \left| x \right| + \left| y \right| \right)^2 .$$

Откуда, в силу неотрицательности чисел $\left| x \right|$, $\left| y \right|$ и $\left| x \right| + \left| y \right|$, получаем неравенство треугольника.

Следствие доказано.

Отметим, что неравенства Коши – Буняковского и треугольника для евклидова пространства из примера 10.1.1 ($2^\circ$) имеют вид

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i\right| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\eta_k^2} \qquad \forall \xi_i,\eta_i \quad i=[1,n]\,,$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\big(\xi_i+\eta_i\big)^2} \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\eta_k^2} \qquad \forall \xi_i,\eta_i \quad i=[1,n]\,,$$

в то время как для евклидова пространства из примера 10.1.1 ($3^\circ$) соответственно:

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta}x(\tau)y(\tau)\,d\tau\right| \le \sqrt{\int\limits_{\alpha}^{\beta}x^2(\tau)\,d\tau}\sqrt{\int\limits_{\alpha}^{\beta}y^2(\tau)\,d\tau}\,,$$

$$\sqrt{\int\limits_{\alpha}^{\beta}\big(x(\tau)+y(\tau)\big)^2\,d\tau} \le \sqrt{\int\limits_{\alpha}^{\beta}x^2(\tau)\,d\tau}+\sqrt{\int\limits_{\alpha}^{\beta}y^2(\tau)\,d\tau}\,.$$

| | |
|---|---|
| Определение 10.1.3 | В евклидовом пространстве $E$ *величиной угла* между ненулевыми элементами $x$ и $y$ назовем число $\alpha \in [0, \pi]$, удовлетворяющее соотношению $$\cos\alpha = \frac{(x, y)}{\lvert x\rvert \lvert y\rvert}\,.$$ |

Из неравенства Коши – Буняковского (теорема 10.1.1) следует, что величина угла существует для любой пары ненулевых элементов в $E$.

| | |
|---|---|
| Определение 10.1.4 | В евклидовом пространстве $E$ элементы $x$ и $y$ называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$. |

Заметим, что нулевой элемент евклидова пространства ортогонален любому другому элементу.

# Ортонормированный базис. Ортогонализация базиса

| | |
|---|---|
| Определение 10.2.1 | В конечномерном евклидовом пространстве $E^n$ базис $\{ e_1, e_2, \dots, e_n \}$ называется *ортонормированным*, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = [1, n]$, где $\delta_{ij}$ — символ Кронекера. |

Теорема 10.2.1 (Грама - Шмидта)

**Во всяком евклидовом пространстве $E^n$ существует ортонормированный базис.**

Доказательство.

1°. Пусть в $E^n$ дан некоторый, вообще говоря, неортогональный базис $\{ g_1, g_2, \dots, g_n \}$. Построим вначале базис $\{ e'_1, e'_2, \dots, e'_n \}$ из попарно ортогональных (но не обязательно нормированных) элементов. Последовательное построение этих элементов будем называть процессом *ортогонализации базиса.*

Возьмем $e'_1 = g_1$. Элемент $e'_2$ будем искать в виде

$$e'_2 = g_2 + \alpha_{21} e'_1 ,$$

где $\alpha_{21}$ — некоторая константа. Подберем $\alpha_{21}$ так, чтобы $(e'_1, e'_2) = 0$, для этого достаточно, чтобы

$$(e'_1, e'_2) = (e'_1, g_2 + \alpha_{21} e'_1) = (e'_1, g_2) + \alpha_{21}(e'_1, e'_1) = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \alpha_{21} = -\frac{(e'_1, g_2)}{(e'_1, e'_1)} .$$

Заметим, что $e'_2 \neq o$. Действительно, из

$$o = e'_2 = g_2 + \alpha_{21} e'_1 = g_2 + \alpha_{21} g_1$$

следует линейная зависимость $g_1$ и $g_1$, что противоречит условию принадлежности этих элементов базису (см. лемму 7.2.2).

2°. Допустим теперь, что нам удалось ортогонализовать $k-1$ элемент, и в качестве $e'_k$ выберем элемент вида

$$e'_k = g_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{kj} e'_j\,. \tag{10.2.1}$$

Потребуем, чтобы $(e'_k, e'_i) = 0 \quad \forall i = [1, k-1],$ но тогда в силу $(e'_j, e'_i) = \delta_{ji}$ имеем

$$0 = (\, g_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{kj} e'_j,\; e'_i\,) = (g_k, e'_i) + \alpha_{ki}(e'_i, e'_i) \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \alpha_{ki} = -\frac{(g_k, e'_i)}{(e'_i, e'_i)} \quad \forall i = [1, k-1]\,.$$

Покажем теперь, что в этом случае $e'_k \neq o$.
Допустим противное: $e'_k = o$. Поскольку все построенные ранее элементы $e'_i \quad \forall i = [1, k-1]$ суть некоторые линейные комбинации элементов $g_i \quad \forall i = [1, k-1]$ , то в силу (10.2.1) мы приходим к линейной зависимости набора элементов $g_i \quad \forall i = [1, k]$ , что противоречит условию теоремы. Следовательно, $e'_k \neq o$.

3°. Процесс ортогонализации продолжается до исчерпания множества элементов $g_i \quad \forall i = [1, n]$ . Затем достаточно пронормировать элементы $e'_i \; \forall i = [1, n]$ , чтобы получить искомый ортонормированный базис

$$\{\, e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n \,\},\ \text{где}\ \ e_i = \frac{e'_i}{|e'_i|} \quad \forall i = [1, n]\ \ .$$

Теорема доказана.

Замечания: 1°. Методом Грама – Шмидта можно выполнять ортогонализацию наборов элементов, являющихся счетными множествами.

2°. Процесс ортогонализации Грама – Шмидта может быть применен к любой, в том числе и к линейно зависимой, системе элементов евклидова пространства. Если ортогонализуемая система линейно зависима, то на некотором шаге мы получим нулевой элемент, после отбрасывания которого можно продолжить процесс ортогонализации.

## Координатное представление скалярного произведения

Полезным инструментом исследования свойств некоторого набора элементов $\{ f_1, f_2, \ldots, f_k \}$ в евклидовом пространстве $E$ является матрица Грама.

| | |
|---|---|
| Определение 10.3.1 | В евклидовом пространстве $E$ *матрицей Грама* системы элементов $\{ f_1, f_2, \ldots, f_k \}$ называется квадратная, порядка $k$ матрица вида $$\|\Gamma\|_f = \begin{Vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \ldots & (f_1, f_k) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \ldots & (f_2, f_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (f_k, f_1) & (f_k, f_2) & \ldots & (f_k, f_k) \end{Vmatrix} .$$ |

Матрица Грама симметрическая в силу коммутативности скалярного произведения.

Пусть в $E^n$ дан базис $\{\, g_1,\, g_2,\, \ldots,\, g_n \,\}$. Скалярное произведение элементов $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i g_i$ и $y = \sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j g_j$ , в силу определения 10.1.1, представимо в виде

$$(x, y) = (\, \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i,\, \sum_{j=1}^{n} \eta_j g_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \eta_j \gamma_{ij} \xi_i \eta_j \ ,$$

где $\gamma_{ij}$ — компоненты матрицы $\left\|\Gamma\right\|_g$, называемой *базисной матрицей Грама.*

Заметим, что эта матрица является матрицей симметричного билинейного функционала, задающего скалярное произведение. Тогда (принимая во внимание определение 9.1.2) координатное представление скалярного произведения может быть записано так:

$$(x, y) = \left\|x\right\|_g^{\mathrm{T}} \left\|\Gamma\right\|_g \left\|y\right\|_g =$$

$$= \left\|\, \xi_1\, \xi_2\, \ldots \xi_n \,\right\| \left\| \begin{array}{cccc} (q_1, g_1) & (g_1, g_2) & \ldots & (g_1, g_n) \\ (g_2, g_1) & (g_2, g_2) & \ldots & (g_2, g_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (g_n, g_1) & (g_n, g_2) & \ldots & (g_n, g_n) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \ldots \\ \eta_n \end{array} \right\| ,$$

где $\left\|x\right\|_g$ и $\left\|y\right\|_g$ — координатные представления (столбцы) элементов $x$ и $y$ в базисе $\{\, g_1,\, g_2,\, \ldots,\, g_n \,\}$. Очевидно, что эта формула согласуется с определениями в § 2.3 и § 9.2.

Заметим, наконец, что $\left\|\Gamma\right\|_e = \left\|E\right\|$ в ортонормированном базисе $\{\, e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n \,\}$, и потому формула для скалярного произведения принимает в этом случае упрощенный вид:

$$(x, y) = \left\|x\right\|_g^{\mathrm{T}} \left\|y\right\|_g = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i \ .$$

Теорема 10.3.1 **Для базисной матрицы Грама $\|\Gamma\|_g$ в любом базисе $\det\|\Gamma\|_g > 0$ .**

Доказательство.

Из определения 10.1.1 следует, что скалярное произведение есть билинейный, симметричный функционал, поэтому при переходе от базиса $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n \}$ к базису $\{ g'_1, g'_2, \ldots, g'_n \}$ (с матрицей перехода $\|S\|$) по теореме 9.1.1 для матрицы Грама имеют место равенства

$$\|\Gamma\|_{g'} = \|S\|^{\mathrm{T}}\|\Gamma\|_g\|S\|, \qquad \det\|\Gamma\|_{g'} = \det\|\Gamma\|_g \det^2\|S\|,$$

где $\det\|S\| \neq 0$.
Откуда следует, что значение $\operatorname{sgn}\det\|\Gamma\|_g$ инвариантно, то есть не изменяется при замене базиса. А, приняв во внимание, что в ортонормированном базисе $\det\|\Gamma\|_e = 1$, приходим к заключению, что в любом базисе $\det\|\Gamma\|_g > 0$ .

Теорема доказана.

Следствие 10.3.1 **Система элементов** $\{ f_1, f_2, \ldots, f_k \}$ **в** $E$ *линейно независима* **тогда и только тогда, когда определитель матрицы Грама этой системы положителен.**

Доказательство.

Покажем, что, если элементы $\{ f_1, f_2, \ldots, f_k \}$ линейно зависимы, то определитель их матрицы Грама равен нулю. Действительно, пусть существуют не равные нулю одновременно числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k,$ такие что $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i f_i = o$.

Умножив последовательно $\forall j = [1, k]$ это равенство скалярно слева на $f_j$, получим

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (f_j, f_i) = o \qquad \forall j = [1, k]$$

или, в матричном виде,

$$\left\| \begin{matrix} (q_1, g_1) & (g_1, g_2) & \ldots & (g_1, g_k) \\ (g_2, g_1) & (g_2, g_2) & \ldots & (g_2, g_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (g_k, g_1) & (g_k, g_2) & \ldots & (g_k, g_k) \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ \lambda_k \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{matrix} \right\| .$$

То есть нетривиальная линейная комбинация столбцов матрицы Грама, имеющая коэффициентами числа $\lambda_i$, будет равна нулевому столбцу, и тогда будет равен нулю определитель матрицы Грама (см. лемму 6.5.2 и теорему 6.5.2).

С другой стороны, если элементы $\{ f_1, f_2, \ldots, f_k \}$ линейно независимы, то они образуют базис в своей линейной оболочке, и здесь справедливо утверждение теоремы 10.3.1.

Следствие доказано.

Теперь можно доказать необходимость в теореме 9.3.4.

Теорема 9.3.4 (критерий Сильвестра) **Для положительной определенности квадратичного функционала в $\Lambda^n$ необходимо и достаточно, чтобы у его матрицы были** *положительными* **все главные миноры вида**

$$\det\begin{Vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1k} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{k1} & \varphi_{k2} & \cdots & \varphi_{kk} \end{Vmatrix} \qquad \forall k = [1, n]\,.$$

Доказательство необходимости.

1°. В § 10.1 было отмечено, что введение скалярного произведения в линейном пространстве равносильно заданию некоторого симметричного билинейного функционала, порождающего положительно определенный квадратичный функционал.

Обратно, по положительно определенному квадратичному функционалу однозначно восстанавливается породивший его симметричный билинейный функционал, который можно принять за скалярное произведение.

2°. Покажем, что у положительно определенного квадратичного функционала все главные миноры (указанного в условии теоремы вида) его матрицы положительны.

Действительно, если ввести в $\Lambda^n$ скалярное произведение при помощи порождающего его билинейного функционала, то матрица этого квадратичного функционала в базисе $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n \}$ есть матрица Грама этого базиса.

Рассмотрим последовательно линейные оболочки систем элементов вида

$$\{ g_1, g_2, \ldots, g_k \} \qquad \forall k = [1, n] .$$

Все эти системы линейно независимые (как подмножества базиса) и по теореме 10.3.1 соответствующие им матрицы Грама имеют положительные определители, то есть

$$\det \left\| \begin{array}{cccc} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1k} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \ldots & \beta_{kk} \end{array} \right\| =$$

$$= \det \left\| \begin{array}{cccc} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \ldots & (f_1, f_k) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \ldots & (f_2, f_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (f_k, f_1) & (f_k, f_2) & \ldots & (f_k, f_k) \end{array} \right\| > 0 \quad \forall k = [1, n] .$$

Теорема доказана.

Теорема 10.3.2 **Координатный столбец элемента $x$ евклидова пространства $E^n$ в любом базисе $\{ g_1, g_2, \dots, g_n \}$ может быть представлен в виде**

$$\|x\|_g = \|\Gamma\|_g^{-1} \|b\|_g \, ,$$

**где $\|\Gamma\|_g$ — базисная матрица Грама, а**

$$\|b\|_g = \left\| \begin{matrix} (x, g_1) \\ (x, g_2) \\ \dots \\ (x, g_n) \end{matrix} \right\| .$$

Доказательство.

Умножим последовательно обе части равенства $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i g_i$ скалярно на $g_k \quad \forall k = [1, n]$. В результате получим систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} (g_i, g_k) \xi_i = (x, g_k) \qquad \forall k = [1, n] \, ,$$

основная матрица которой есть базисная матрица Грама. Поскольку в силу теоремы 10.3.1 эта матрица невырожденная, приходим к доказываемой формуле

$$\|x\|_g = \|\Gamma\|_g^{-1} \|b\|_g \, .$$

Теорема доказана.

Следствие 10.3.2 **В ортонормированном базисе $\{ e_1, e_2, \dots, e_n \}$ евклидова пространства $E^n$ для любого элемента $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ имеют место равенства**

$$\xi_k = (x, e_k) \qquad \forall k = [1, n].$$

# Ортогональные матрицы в евклидовом пространстве

Согласно определению 5.1.4 квадратная матрица $\|Q\|$, удовлетворяющая соотношению $\|Q\|^{-1} = \|Q\|^{\mathrm{T}}$, называется *ортогональной.*

Для любой ортогональной матрицы справедливы равенства

$$\|Q\|\|Q\|^{\mathrm{T}} = \|Q\|^{\mathrm{T}}\|Q\| = \|E\| \qquad \text{и} \qquad \det\|Q\| = \pm 1\,.$$

Кроме того, в евклидовом пространстве будут справедливы следующие теоремы.

Теорема 10.4.1 **Ортогональные матрицы (и только они!) могут служить в $E^n$ матрицами перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному.**

Доказательство.

Рассмотрим два различных ортонормированных базиса $\{\, e_1, e_2, \ldots, e_n \,\}$ и $\{\, e'_1, e'_2, \ldots, e'_n \,\}$ в $E^n$ с матрицей перехода $\|S\|$ от первого базиса ко второму.

Поскольку в этих базисах матрица Грама единичная, то из соотношения $\|\Gamma\|_{e'} = \|S\|^{\mathrm{T}}\|\Gamma\|_e\|S\|$ следует равенство $\|E\| = \|S\|^{\mathrm{T}}\|E\|\|S\|$, или $\|E\| = \|S\|^{\mathrm{T}}\|S\|$.

Поскольку матрица перехода $\|S\|$ невырожденная, то окончательно имеем $\|S\|^{-1} = \|S\|^{\mathrm{T}}$.

Теорема доказана.

В координатной форме равенство $\|S\|^{\mathrm{T}}\|S\| = \|E\|$ принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ki}\sigma_{ij} = \delta_{kj} \qquad \forall k, j = [1, n]\,,$$

частный случай которого для $n = 3$ был получен в § 2.9.

Теорема 10.4.2 **Собственные значения линейного оператора, имеющего в $E^n$ ортогональную матрицу, равны по модулю единице.**

Доказательство.

Из равенства $\|\hat{A}\|_g \|f\|_g = \lambda \|f\|$ по правилу транспонирования произведений матриц следует, что $\|f\|_g^{\mathrm{T}} \|\hat{A}\|_g^{\mathrm{T}} = \lambda \|f\|_g^{\mathrm{T}}$.

Перемножив эти равенства почленно, получим

$$\|f\|_g^{\mathrm{T}} \|\hat{A}\|_g^{\mathrm{T}} \|\hat{A}\|_g \|f\|_g = \lambda^2 \|f\|_g^{\mathrm{T}} \|f\|_g \,.$$

В силу ортогональности $\|\hat{A}\|_g$ имеем $\|\hat{A}\|_g^{\mathrm{T}} \|\hat{A}\|_g = \|E\|$, а потому $\|f\|_g^{\mathrm{T}} \|f\|_g = \lambda^2 \|f\|_g^{\mathrm{T}} \|f\|_g$ и, наконец, $\lambda^2 = 1$, поскольку собственные векторы ненулевые.

Теорема доказана.

Ортогональные матрицы также играют важную роль в вычислительных методах алгебры, что, например, иллюстрирует

Теорема 10.4.3 **Если матрица $\|A\|$ невырожденная, то ее разложение вида $\|A\| = \|Q\| \|R\|$, где $\|Q\|$ — ортогональная матрица, а $\|R\|$ — верхняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами, единственно.**

# Ортогональные дополнения и ортогональные проекции в евклидовом пространстве

Пусть задано множество $\Omega \subseteq E$. Рассмотрим множество $\Omega^{\perp} \subseteq E$, состоящее из *всевозможных* элементов $x \in \Omega^{\perp}$, ортогональных *всем* элементам из $\Omega$.

| | |
|---|---|
| Определение 10.5.1 | В евклидовом пространстве $E$ множество $\Omega^{\perp}$ элементов $x$, таких, что $(x, y) = 0 \quad \forall y \in \Omega$, называется *ортогональным дополнением* множества $\Omega$. |

Теорема 10.5.1 **$\Omega^{\perp}$ — ортогональное дополнение $k$-мерного подпространства $\Omega \subset E^n$ является подпространством размерности $n - k$.**

Доказательство.

Пусть в $E^n$ со стандартным скалярным произведением дан ортонормированный базис и пусть $\Omega^{\perp} \subset E^n$ — ортогональное дополнение к $\Omega \subset E^n$. Выберем некоторый базис $\{ g_1, g_2, \ldots, g_k \}$ в $\Omega$. Тогда из условия ортогональности произвольного элемента $x \in \Omega^{\perp}$ каждому элементу $\Omega$ следует, что

$$(g_j, x) = 0 \qquad \forall j = [1, k]$$

или же в координатной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11}\xi_1 + \varepsilon_{12}\xi_2 + \ldots + \varepsilon_{1k}\xi_k = 0, \\ \varepsilon_{21}\xi_1 + \varepsilon_{22}\xi_2 + \ldots + \varepsilon_{2k}\xi_k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_{k1}\xi_1 + \varepsilon_{k2}\xi_2 + \ldots + \varepsilon_{kk}\xi_k = 0, \end{array} \right.$$

где $\|g_j\|_e = \| \, \varepsilon_{1j} \, \varepsilon_{1j} \, \ldots \varepsilon_{1j} \, \|^{\mathrm{T}} \quad \forall j = [1, k]$ и соответственно $\|x\|_e = \| \, \xi_1 \, \xi_2 \, \ldots \xi_k \, \|^{\mathrm{T}}$.

Эта однородная система линейных уравнений (неизвестными в которой являются компоненты элемента $x$), определяющая ортогональное дополнение $\Omega^{\perp}$, имеет ранг $k$ в силу линейной независимости элементов $\{ g_1, g_2, \ldots, g_k \}$. Тогда по теореме 6.7.1 у нее есть $n - k$ линейно независимых решений, образующих базис подпространства $\Omega^{\perp}$.

Теорема доказана.

Теорема 10.5.2 **Если $\Omega^{\perp}$ — ортогональное дополнение подпространства $\Omega \subseteq E$, то $\Omega$ является в $E$ ортогональным дополнением к $\Omega^{\perp}$.**

Доказательство.

Для каждого элемента $x \in \Omega^{\perp}$ по определению 10.5.1 имеет место равенство $(y, x) = 0 \quad \forall y \in \Omega$ .

Но это означает, что $\forall y \in \Omega$ также будет справедливым $(x, y) = 0 \quad \forall y \in \Omega^{\perp}$ , то есть $\Omega$ является ортогональным дополнением к $\Omega^{\perp}$ в $E$.

Теорема доказана.

| Определение 10.5.2 | В евклидовом пространстве $E$ элемент $y$ называется ортогональной проекцией элемента $x$ на подпространство $E^*$, если<br>$1^\circ. \quad y \in E^*;$<br>$2^\circ. \quad (x - y, z) = 0 \quad \forall z \in E^*.$ |
|---|---|

Теорема 10.5.3 **Если $\Omega \subseteq E$ является $k$-мерным подпространством $E$, то элемент $y$ — ортогональная проекция $x$ на $\Omega$ — существует и единственен.**

Доказательство.

Если в $\Omega$ существует базис $\{ g_1, g_2, \ldots, g_k \}$, то элемент $y \in \Omega$ может быть представлен в виде $y = \sum\limits_{j=1}^{k} \xi_j g_j$ .

Условие $(x-y, z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$ равносильно ортогональности $x - y$ каждому из базисных элементов подпространства $\Omega$, то есть $(x - y, g_j) = 0 \quad \forall j = [1, k]$, и, следовательно, числа $\xi_j \quad \forall j = [1, k]$ могут быть найдены из системы линейных уравнений $(x - \sum\limits_{j=1}^{k} \xi_j g_j,\, g_i) = 0 \quad \forall i = [1, k]$ или

$$\sum_{j=1}^{k} (g_i, g_j)\, \xi_j = (g_i, x) \qquad \forall i = [1, k]\,.$$

Поскольку основная матрица этой системы, как базисная матрица Грама (см. следствие 10.3.1), невырожденная, то по теореме 6.4.1 (Крамера) решение данной системы существует и единственно.

Теорема доказана.

Отметим, что если базис $\{ e_1, e_2, \ldots, e_k \}$ в подпространстве $\Omega$ ортонормированный, то ортогональная проекция элемента $x$ на $\Omega$ есть элемент вида $y = \sum\limits_{j=1}^{k} (x, e_j) e_j$ .