Сопряженные операторы в евклидовом пространстве

Поскольку евклидово пространство является частным случаем линейного пространства, то все изложенные в главе 8 утверждения справедливы и для линейных операторов, действующих в евклидовом пространстве.

Однако операция скалярного произведения позволяет выделять в евклидовых пространствах специфические классы линейных операторов, обладающих рядом полезных свойств.

Определение 10.6.1	Линейный оператор $\hat{A}^{+}$, заданный в евклидовом пространстве E, называется *сопряженным* линейному оператору $\hat{A}$, если $\forall x, y \in E$ имеет место равенство $(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^{+}y)$.

Пример 10.6.1

В евклидовом пространстве, образованном бесконечно дифференцируемыми функциями, равными нулю вне некоторого конечного интервала, со скалярным произведением

$$(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(\tau)\,d\tau\,,$$

для линейного оператора дифференцирования $\hat{A} = \dfrac{d}{d\tau}$ сопряженным ему будет оператор $\hat{A} = -\dfrac{d}{d\tau}$.

Действительно, согласно правилу интегрирования несобственных интегралов по частям это следует из определения 10.6.1 и равенств

$$(\hat{A}x, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(\tau)}{d\tau} y(\tau)\,d\tau =$$

$$= x(\tau)y(\tau)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\left(-\frac{dy(\tau)}{d\tau}\right)\,d\tau = (x, \hat{A}^{+}y)\,,$$

поскольку проинтегрированная часть равна нулю $\forall x(\tau), y(\tau) \in E$.

Рассмотрим теперь конечномерное евклидово пространство E^n с базисом $\{\, g_1,\, g_2,\, \ldots,\, g_n \,\}$ и выясним связь матриц линейных операторов $\hat{A}^+$ и $\hat{A}$ в этом базисе, предположив, что сопряженный оператор существует.

Пусть в данном базисе матрицы операторов $\hat{A}^+$ и $\hat{A}$ имеют соответственно вид $\left\|\hat{A}^+\right\|_g$ и $\left\|\hat{A}\right\|_g$, а координатные представления элементов x и y суть $\|x\|_g = \|\, \xi_1\, \xi_2\, \ldots \xi_k \,\|^{\mathrm{T}}$. и $\|y\|_g = \|\, \eta_1\, \eta_2\, \ldots \eta_k \,\|^{\mathrm{T}}$, тогда равенство $(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+ y)$ можно записать как

$$\left(\left\|\hat{A}\right\|_g \|x\|_g\right)^{\mathrm{T}} \|\Gamma\|_g \|\|y\|_g = \|x\|_g^{\mathrm{T}} \|\Gamma\|_g \left\|\hat{A}^+\right\|_g \|y\|_g \,, \qquad (10.6.1)$$

где $\|\Gamma\|_g$ — матрица Грама выбранного в E^n базиса.

В силу соотношения $(\|A\|\|B\|)^{\mathrm{T}} = \|B\|^{\mathrm{T}}\|A\|^{\mathrm{T}}$ и свойства дистрибутивности умножения матриц равенство (10.6.1) преобразуется к виду

$$\|x\|_g^{\mathrm{T}} \left(\left\|\hat{A}\right\|_g^{\mathrm{T}} \|\Gamma\|_g - \|\Gamma\|_g \left\|\hat{A}^+\right\|_g\right) \|y\|_g = 0 \,.$$

Поскольку это равенство справедливо при любых x и y, то, приняв во внимание невырожденность матрицы Грама и проведя рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве леммы 5.1.2, заключаем, что матрица, стоящая в круглых скобках, нулевая. Тогда из соотношения $\left\|\hat{A}\right\|_g^{\mathrm{T}} \|\Gamma\|_g - \|\Gamma\|_g \left\|\hat{A}^+\right\|_g = \|O\|$ следует

$$\left\|\hat{A}^+\right\|_g = \|\Gamma\|_g^{-1} \left\|\hat{A}\right\|_g^{\mathrm{T}} \|\Gamma\|_g \,, \qquad (10.6.2)$$

которое, в частности, для ортонормированного базиса $\{\, e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n \,\}$ имеет вид $\left\|\hat{A}^+\right\|_e = \left\|\hat{A}\,\right\|_e^{\mathrm{T}}$.

Лемма 10.6.1 **Если $(x, \hat{A}y) = 0 \quad \forall x, y \in E$, то оператор $\hat{A}$ нулевой.**

Доказательство.

Пусть справедливо равенство $(x, \hat{A}y) = 0 \quad \forall x, y \in E$. Тогда оно будет верным и для $x = \hat{A}y$.

Но из равенства $(\hat{A}y, \hat{A}y) = 0 \quad \forall y \in E$ согласно определению 10.1.1 следует, что $\hat{A}y = o$.

Наконец, в силу произвольности элемента y и определения 8.2.2 приходим к заключению, что $\hat{A} = \hat{O}$.

Лемма доказана.

Теорема 10.6.1 **Каждый линейный оператор в евклидовом пространстве E^n имеет единственный сопряженный оператор.**

Доказательство.

Существование в E^n оператора $\hat{A}^+$, сопряженного оператору $\hat{A}$, следует из возможности построения для любого линейного оператора с матрицей $\|\hat{A}\|$ линейного оператора с матрицей, определяемой формулой (10.6.2).

Покажем теперь единственность $\hat{A}^+$. Предположим, что $\hat{A}$ имеет два сопряженных оператора $\hat{A}^+$ и $\hat{A}^\times$. Это означает, что $\forall x, y \in E^n$ одновременно выполнены равенства

$$(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+ y) \qquad \text{и} \qquad (\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^\times y)\,.$$

Вычитая их почленно, получаем $\quad 0 = \left(x, \left(\hat{A}^+ - \hat{A}^\times\right) y\right)$, но тогда по лемме 10.6.1

$$\hat{A}^+ - \hat{A}^\times = \hat{O} \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{A}^+ = \hat{A}^\times\,.$$

Теорема доказана.

Теорема 10.6.2 **Для любых линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ в E имеет место равенство** $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{+} = \hat{B}^{+}\hat{A}^{+}$.

Доказательство.

Имеет место $\forall x, y \in E$:

$$(\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{+} x, y) = (x, \hat{A}\hat{B}y) = (\hat{A}^{+}x, \hat{B}y) = (\hat{B}^{+}\hat{A}^{+}x, y)\,.$$

Откуда следует $(\left(\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{+} - \hat{B}^{+}\hat{A}^{+}\right) x, y) = 0 \quad \forall x, y \in E\,,$ но тогда по лемме 10.6.1

$$\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{+} - \hat{B}^{+}\hat{A}^{+} = \hat{O} \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\hat{A}\hat{B}\right)^{+} = \hat{B}^{+}\hat{A}^{+}\,.$$

Теорема доказана.

Теорема 10.6.3 **Для линейного оператора $\hat{A}$ в E имеет место равенство** $(\hat{A}^{+})^{+} = \hat{A}$.

Доказательство.

Имеет место $\forall x, y \in E$:

$$((\hat{A}^{+})^{+}x, y) = (x, \hat{A}^{+}y) = (\hat{A}x, y)\,.$$

Откуда следует $(\left((\hat{A}^{+})^{+} - \hat{A}\right) x, y) = 0 \quad \forall x, y \in E\,,$ но тогда по лемме 10.6.1

$$(\hat{A}^{+})^{+} - \hat{A} = \hat{O} \qquad \Longrightarrow \qquad (\hat{A}^{+})^{+} = \hat{A}\,.$$

Теорема доказана.

Теорема 10.6.4 **Ортогональное дополнение в E^n области значений оператора $\hat{A}$ является ядром оператора $\hat{A}^+$.**

Доказательство.

1°. Покажем вначале, что ядро оператора $\hat{A}$, обозначаемое как $\ker \hat{A}$, содержится во множестве $\left(\mathrm{Im}\hat{A}\,\right)^\perp$ — ортогональном дополнении области значений оператора $\hat{A}$.
Действительно, любой элемент $y \in \ker \hat{A}^+$, то есть такой, что $\hat{A}^+ y = o$, ортогонален элементу $\quad b = \hat{A}x \quad \forall x \in E^n$, поскольку $\quad (b, y) = (\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+ y) = (x, o) = 0\,.$

2°. Теперь сравним размерности $\ker \hat{A}$ и $\left(\mathrm{Im}\hat{A}\,\right)^\perp$. С одной стороны, в силу невырожденности базисной матрицы Грама, формулы 10.6.2 и теоремы 8.4.3

$$\dim \ker \hat{A}^+ = n - \mathrm{rg}\left\|\hat{A}^+\right\| = n - \mathrm{rg}\left(\|S\|^{-1}\left\|\hat{A}\right\|^{\mathrm{T}}\|S\|\right) =$$

$$= n - \mathrm{rg}\left\|\hat{A}\right\|^{\mathrm{T}} = n - \mathrm{rg}\left\|\hat{A}\right\|\,.$$

Но, с другой стороны, по теореме 8.4.1 размерность области значений $\hat{A}$ равна $\mathrm{rg}\left\|\hat{A}\right\|$, и тогда по теореме 10.5.1 $\left(\mathrm{Im}\hat{A}\,\right)^\perp = n - \mathrm{rg}\left\|\hat{A}\right\|$.

Наконец, из равенства $\dim \ker \hat{A}^+ = \dim\left(\mathrm{Im}\hat{A}\,\right)^\perp$ и соотношения $\ker \hat{A}^+ \subseteq \left(\mathrm{Im}\hat{A}\,\right)^\perp$ следует совпадение множеств $\quad \ker \hat{A}^+$ и $\left(\mathrm{Im}\hat{A}\,\right)^\perp$.

Теорема доказана.

Самосопряженные операторы

Определение 10.7.1	Линейный оператор $\hat{R}$ в евклидовом пространстве E называется *самосопряженным*, если $\forall x, y \in E$ имеет место равенство $(\hat{R}x, y) = (x, \hat{R}y)$.

Пример 10.7.1

В евклидовом пространстве E операторы вида $\hat{A} + \hat{A}^{+}$, $\hat{A}\hat{A}^{+}$ и $\hat{A}^{+}\hat{A}$ будут самосопряженными для каждого линейного оператора $\hat{A}$.

Действительно, для оператора $\hat{A}^{+}\hat{A}$, например, имеем, что $\forall x, y \in E \quad (\hat{A}^{+}\hat{A}x, y) = (\hat{A}x, \hat{A}y) = (x, \hat{A}^{+}\hat{A}y)$, откуда и следует его самосопряженность.

Свойства самосопряженных операторов сформулируем в виде следующих утверждений.

Лемма 10.7.1

Линейный оператор $\hat{R}$ в E^n является самосопряженным тогда и только тогда, когда его матрица в каждом *ортонормированном* **базисе** *симметрическая***.**

Доказательство.

Из определения 10.7.1 и формулы

$$\left\|\hat{R}^{+}\right\|_{g} = \|\Gamma\|_{g}^{-1} \left\|\hat{R}\right\|_{g}^{\mathrm{T}} \|\Gamma\|_{g}$$

для некоторого ортонормированного базиса $\{\, e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n \,\}$ в силу самосопряженности $\hat{R}$ имеем $\left\|\hat{R}^{+}\right\|_{e} = \left\|\hat{R}\right\|_{e}^{\mathrm{T}}$.

Перейдем теперь к другому ортонормированному базису $\{\, e_1',\, e_2',\, \ldots,\, e_n' \,\}$. Матрица перехода $\|S\|$, как было показано в § 10.4, при такой замене ортогональная, то есть для нее $\|S\|^{\mathrm{T}} = \|S\|^{-1}$. Поэтому

$$\left\|\hat{R}^{+}\right\|_{e'}^{\mathrm{T}} = \left(\|S\|^{-1} \left\|\hat{R}^{+}\right\|_{e} \|S\|\right)^{\mathrm{T}} = \left(\|S\|^{\mathrm{T}} \left\|\hat{R}^{+}\right\|_{e} \|S\|\right)^{\mathrm{T}} =$$

$$= \|S\|^{\mathrm{T}} \left\|\hat{R}^{+}\right\|_{e}^{\mathrm{T}} \left(\|S\|^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \|S\|^{\mathrm{T}} \left\|\hat{R}^{+}\right\|_{e} \|S\| =$$

$$= \|S\|^{-1} \left\|\hat{R}^{+}\right\|_{e} \|S\| = \left\|\hat{R}^{+}\right\|_{e'} .$$

Верно и обратное: если $\left\|\hat{R}^{+}\right\|_{e} = \left\|\hat{R}\right\|_{e}^{\mathrm{T}}$, то $\forall x, y \in E^n$

$$(\hat{R}x, y) = \left\|\hat{R}x\right\|_{e}^{\mathrm{T}} \|y\|_e = \left(\left\|\hat{R}\right\|_{e} \|x\|_e\right)^{\mathrm{T}} \|y\|_e =$$

$$= \|x\|_e^{\mathrm{T}} \left\|\hat{R}\right\|_{e}^{\mathrm{T}} \|y\|_e = \|x\|_e^{\mathrm{T}} \left\|\hat{R}\right\|_{e} \|y\|_e =$$

$$= \|x\|_e^{\mathrm{T}} \left\|\hat{R}y\right\|_{e} = (x, \hat{R}y)\,,$$

то есть оператор $\hat{R}$ — самосопряженный.

Лемма доказана.

Признак самосопряженности может быть сформулирован как

Следствие 10.7.1 **Если линейный оператор в E^n имеет** *симметрическую* **матрицу в некотором ортонормированном базисе, то он** *самосопряженный***.**

Лемма 10.7.2 **Все собственные значения самосопряженного оператора $\hat{R}$ в E^n** *вещественные* **числа.**

Доказательство.

Допустим противное: пусть характеристическое уравнение самосопряженного оператора $\hat{R}$ имеет комплексный корень $\lambda = \alpha + i\beta$, где $\beta \neq 0$.

По теореме 8.6.2 оператор $\hat{R}$ в этом случае имеет двумерное инвариантное подпространство. Было показано, что в этом случае существует пара линейно независимых элементов x и x таких, что

$$\begin{cases} \hat{R}x = \alpha x - \beta y \,, \\ \hat{R}y = \alpha y + \beta x \,. \end{cases}$$

Умножая эти равенства скалярно: первое — справа на y, второе — слева на x, получим

$$\begin{cases} (\hat{R}x, y) = \alpha(x, y) - \beta(y, y) \,, \\ (x, \hat{R}y) = \alpha(x, y) + \beta(y, y) \,. \end{cases}$$

Вычитая почленно второе равенство из первого и принимая во внимание самосопряженность $\hat{R}$, приходим к заключению, что $\beta = 0$. Однако это противоречит предположению о том, что собственное значение λ невещественное.

Лемма доказана.

Лемма 10.7.3 **Собственные векторы самосопряженного оператора действующего в E, отвечающие** *различным* **собственным значениям,** *ортогональны***.**

Доказательство.

Пусть для самосопряженного оператора $\hat{R}$ имеют место равенства

$$\hat{R}f_1 = \lambda_1 f_1\,, \qquad \hat{R}f_2 = \lambda_2 f_2\,,$$

где ненулевые элементы f_1 и f_2 — собственные векторы оператора $\hat{R}$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — соответствующие им собственные значения.

Умножив эти равенства соответственно: первое — скалярно справа на f_2, второе — скалярно слева на f_1, получим

$$\begin{cases} (\hat{R}f_1, f_2) = \lambda_1(f_1, f_2)\,, \\ (f_1, \hat{R}f_2) = \lambda_2(f_1, f_2)\,. \end{cases}$$

Вычитая эти равенства почленно и учитывая, что $\hat{R}$ — самосопряженный оператор, приходим к скалярному равенству $(\lambda_1 - \lambda_2)(f_1, f_2) = 0$, откуда, в силу $\lambda_1 \neq \lambda_2$, получаем, что $(f_1, f_2) = 0$.

Лемма доказана.

Лемма 10.7.4 **Пусть Ω — инвариантное подпространство самосопряженного оператора $\hat{R}$, действующего в E , и пусть $\Omega^{\perp}$ — ортогональное дополнение к Ω в E. Тогда $\Omega^{\perp}$ — также инвариантное подпространство оператора $\hat{R}$.**

Доказательство.

Ω инвариантно для оператора $\hat{R}$, то есть $\forall x \in \Omega$ также и $\hat{R}x \in \Omega$. Если $\Omega^{\perp}$ — ортогональное дополнение Ω, то $\forall x \in \Omega$ и $\forall y \in \Omega^{\perp}$ будет $(x, y) = 0$.

Поскольку Ω — инвариантное подпространство $\hat{R}$, то будет также иметь место $(\hat{R}x, y) = 0$. Но в силу самосопряженности $\hat{R}$ тогда верно и $(x, \hat{R}y) = 0$.

Последнее равенство означает, что $\forall y \in \Omega^{\perp}$ имеет место $\hat{R}y \in \Omega^{\perp}$, то есть подпространство $\Omega^{\perp}$ инвариантно для оператора $\hat{R}$.

Лемма доказана.

Теорема 10.7.1 **Для любого самосопряженного оператора $\hat{R}$ в E^n существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов $\hat{R}$.**

Доказательство.

Для самосопряженного оператора $\hat{R}$ в E^n по лемме 10.7.2 существует, по крайней мере, одно вещественное собственное значение λ_1.

Из системы уравнений (8.5.1) находим отвечающий λ_1 собственный вектор e_1. Без ограничения общности можно считать, что $|e_1| = 1$. Если $n = 1$, то доказательство завершено.

Рассмотрим E^1 — линейную оболочку элемента e_1, являющуюся одномерным инвариантным собственным подпространством $\hat{R}$. Пусть E^{n-1} — ортогональное дополнение к E^1. Тогда по лемме 10.7.4 E^{n-1} — также инвариантное подпространство оператора $\hat{R}$.

Инвариантность E^{n-1} относительно $\hat{R}$ позволяет рассматривать его как оператор, действующий только в E^{n-1}. При этом очевидно, что $\hat{R}$ — самосопряженный оператор, поскольку из условия $(\hat{R}x, y) = (x, \hat{R}y) \quad \forall x, y \in E^n$ следует, что $(\hat{R}x, y) = (x, \hat{R}y) \quad \forall x, y \in E^{n-1}$.

Применяя в E^{n-1} изложенные выше рассуждения, найдем λ_2 — новое собственное значение $\hat{R}$ и соответствующий ему собственный вектор e_2. Без ограничения общности можно считать, что $|e_2| = 1$. При этом λ_2 может случайно совпасть с λ_1, однако из построения ясно, что $(e_2, e_1) = 0$.

Если $n = 2$, то построение базиса завершено. Иначе рассмотрим E^2 — линейную оболочку $\{e_1, e_2\}$ и ее ортогональное дополнение E^{n-2}, найдем новое собственное значение λ_3 и соответствующий ему собственный вектор e_3 и т.д.

Аналогичные рассуждения проводим до исчерпания E^n.

Теорема доказана.

Следствие 10.7.2 **В базисе, построенном в теореме 10.7.1, самосопряженный оператор $\hat{R}$ имеет диагональную матрицу в E^n.**

Доказательство.

Вытекает из замечания о важности собственных векторов, приведенного в § 8.5.

Следствие доказано.

Следствие 10.7.3 **Размерность собственного инвариантного подпространства, отвечающего некоторому собственному значению самосопряженного оператора, равна кратности этого собственного значения.**

Доказательство.

Из доказательства теоремы 10.7.1 следует, что число построенных в нем линейно независимых элементов не зависит от совпадения или несовпадения значений собственных чисел оператора $\hat{R}$.

Следствие доказано.

Следствие 10.7.4 **Если линейный оператор $\hat{A}$ в E^n имеет n попарно ортогональных собственных векторов, то он самосопряженный.**

Доказательство.

Пронормируем собственные векторы оператора $\hat{A}$ и примем их за ортонормированный базис, в котором матрица этого линейного оператора $\|\hat{A}\|_e$ диагональная и, следовательно, симметрическая. Тогда в силу леммы 10.7.1 линейный оператор $\hat{A}$ самосопряженный.

Следствие доказано.

Следствие 10.7.5 **Если $\|R\|$ — симметрическая матрица, то существует $\|Q\|$ — ортогональная матрица, такая, что матрица**

$$\|D\| = \|Q\|^{\mathrm{T}}\|R\|\|Q\| = \|Q\|^{-1}\|R\|\|Q$$

диагональна.

Доказательство.

В ортонормированном базисе симметрическая матрица $\|R\|$ определяет самосопряженный оператор в E^n, поэтому в качестве искомой матрицы $\|Q\|$ можно выбрать матрицу перехода от данного ортонормированного базиса к ортонормированному базису, образованному собственными векторами этого оператора по схеме, использованной в доказательстве теоремы 10.7.1.

Следствие доказано.

Теорема 10.7.2 **Два самосопряженных оператора $\hat{A}$ и $\hat{B}$ имеют общую систему собственных векторов в E^n тогда и только тогда, когда $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$.**

Доказательство.

Докажем необходимость.

Пусть $\hat{A}a = \lambda a$ и $\hat{B}a = \mu a$, тогда

$$\hat{B}\hat{A}a = \hat{B}\lambda a = \lambda\hat{B}a = \lambda\mu a \qquad \hat{A}\hat{B}Aa = \hat{A}\mu a = \mu\hat{A}a = \mu\lambda a$$

и, вычитая почленно, получим, что $\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right) a = o$.

Поскольку элемент a — произвольный собственный вектор, то данное соотношение верно и для всей совокупности собственных векторов, а значит, и для любого элемента в E^n, так как из собственных векторов можно образовать базис. Поэтому $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \hat{O}$. Докажем достаточность.

Пусть самосопряженные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ коммутируют и пусть, кроме того, $\hat{A}a = \lambda a$.

Рассмотрим здесь лишь случай, когда все собственные значения оператора $\hat{A}$ различны.

Покажем, что элемент евклидова пространства $b = \hat{B}a$ является собственным вектором оператора $\hat{A}$. Действительно, в силу $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ имеем

$$\hat{A}b = \hat{A}\hat{B}a = \hat{B}\hat{A}a = \hat{B}\lambda a = \lambda\hat{B}a = \lambda b\,.$$

С другой стороны, если все собственные значения кратности единица, то λ — это собственное значение, которое отвечает a и b одновременно. Поэтому $b = \kappa a$, и из $b = \hat{B}a$ следует $\hat{B}a = \kappa a$. Значит, a — собственный вектор оператора $\hat{B}$.

Теорема доказана.

Ортогональные операторы

Определение 10.8.1	Линейный оператор $\hat{Q}$, действующий в евклидовом пространстве E, называется *ортогональным* (или *изометрическим*), если $\forall x, y \in E$ имеет место равенство $(\hat{Q}x, \hat{Q}y) = (x, y)$.

Из определения 10.8.1 следует, что ортогональный оператор сохраняет нормы и величины углов между элементами.

Действительно,

$$\left|\hat{Q}x\right| = \sqrt{(\hat{Q}x, \hat{Q}x)} = \sqrt{(x, x)} = |x| \, ,$$

$$\cos\psi = \frac{(\hat{Q}x, \hat{Q}y)}{\left|\hat{Q}x\right| \left|\hat{Q}y\right|} = \frac{(x, y)}{|x| \, |y|} = \cos\varphi \, ,$$

где ψ — величина угла между элементами $\hat{Q}x$ и $\hat{Q}y$, а φ — величина угла между ненулевыми элементами x и y.

Теорема 10.8.1 **Если ортогональный оператор $\hat{Q}$ имеет сопряженный оператор $\hat{Q}^{+}$, то он имеет и обратный оператор $\hat{Q}^{-1}$, причем $\hat{Q}^{-1} = \hat{Q}^{+}$.**

Доказательство.

По определению 10.8.1

$$(\hat{Q}x, \hat{Q}y) = (x, y) \qquad \forall x, y \in E\,.$$

Откуда следует, что $(\hat{Q}^{+}\hat{Q}x, y) = (x, y)$ или, что то же самое, $(\left(\hat{Q}^{+}\hat{Q} - \hat{E}\right) x, y) = 0$. Это, в силу леммы 10.6.1, дает $\hat{Q}^{+}\hat{Q} = \hat{E}$.

Из последнего равенства вытекает, что $\hat{Q}^{+}\hat{Q}\hat{Q}^{+} = \hat{E}\hat{Q}^{+}$, а в силу того, что единичный оператор коммутирует с любым другим, получаем $\hat{Q}^{+}\hat{Q}\hat{Q}^{+} = \hat{Q}^{+}\hat{E}$ или $\hat{Q}\hat{Q}^{+} = \hat{E}$.

Наконец, по определению 8.2.8 в силу $\hat{Q}^{+}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{Q}^{+} = \hat{E}$ приходим к $\hat{Q}^{-1} = \hat{Q}^{+}$.

Теорема доказана.

Следствие 10.8.1 **Операторы $\hat{Q}^{-1}$ и $\hat{Q}^{+}$ также ортогональные.**

Теорема 10.8.2 **Матрица ортогонального оператора в E^n ортогональная в каждом ортонормированном базисе.**

Доказательство.

Пусть оператор $\hat{Q}$ ортогональный. Тогда по теореме 10.8.1 $\hat{Q}^{-1} = \hat{Q}^{+}$ и в силу § 8.3 (4°) в любом ортонормированном базисе справедливы равенства

$$\left\|\hat{Q}\right\|_e^{-1} = \left\|\hat{Q}^{-1}\right\|_e = \left\|\hat{Q}^{+}\right\|_e = \left\|\hat{Q}\right\|_e^{\mathrm{T}} .$$

Но тогда $\left\|\hat{Q}\right\|_e^{-1} = \left\|\hat{Q}\right\|_e^{\mathrm{T}}$, что и означает, согласно определению 5.1.4, ортогональность матрицы $\left\|\hat{Q}\right\|_e$.

Теорема доказана.

Признак ортогональности линейного оператора в E^n дает

Теорема 10.8.3 **Для того чтобы линейный оператор в E^n был ортогональным, достаточно, чтобы его матрица была ортогональной в** *некотором* **ортонормированном базисе.**

Доказательство.

1°. Пусть у линейного оператора $\hat{Q}$ его матрица ортогональная в некотором ортонормированном базисе $\{ e_1, e_2, \ldots, e_n \}$, то есть $\left\|\hat{Q}\right\|_e^{-1} = \left\|\hat{Q}\right\|_e^{\mathrm{T}}$. Тогда

$$(\hat{Q}x, \hat{Q}y) = \left\|\hat{Q}x\right\|_e^{\mathrm{T}} \left\|\hat{Q}y\right\|_e = \left(\left\|\hat{Q}\right\|_e \|x\|_e\right)^{\mathrm{T}} \left\|\hat{Q}\right\|_e \|y\|_e =$$

$$= \|x\|_e^{\mathrm{T}} \left\|\hat{Q}\right\|_e^{\mathrm{T}} \left\|\hat{Q}\right\|_e \|y\|_e = \|x\|_e^{\mathrm{T}} \left\|\hat{Q}\right\|_e^{-1} \left\|\hat{Q}\right\|_e \|y\|_e =$$

$$= \|x\|_e^{\mathrm{T}} \|E\| \, \|y\|_e = \|x\|_e^{\mathrm{T}} \|y\|_e = (x, y) \qquad \forall x, y \in E\,.$$

Значит, условие ортогональности $\hat{Q}$ выполнено в данном ортонормированном базисе.

2°. Перейдем теперь к $\{ e'_1, e'_2, \ldots, e'_n \}$ — некоторому другому ортонормированному базису и убедимся, что условие ортогональности при этом переходе не нарушится.

Действительно, в силу ортогональности матрицы перехода $\|S\|$, связывающей два ортонормированных базиса, имеем

$$\|\hat{Q}\|_{e'}^{-1} = \Big(\|S\|^{-1}\|\hat{Q}\|_e\|S\|\Big)^{-1} = \|S\|^{-1}\|\hat{Q}\|_e^{-1}\left(\|S\|^{-1}\right)^{-1} =$$

$$= \|S\|^{-1}\|\hat{Q}\|_e^{-1}\|S\| = \|S\|^{\mathrm{T}}\|\hat{Q}\|_e^{\mathrm{T}}\|S\| = \|S\|^{\mathrm{T}}\|\hat{Q}\|_e^{\mathrm{T}}\left(\|S\|^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} =$$

$$= \Big(\|S\|^{\mathrm{T}}\|\hat{Q}\|_e\|S\|\Big)^{\mathrm{T}} = \Big(\|S\|^{-1}\|\hat{Q}\|_e\|S\|\Big)^{\mathrm{T}} = \|\hat{Q}\|_{e'}^{\mathrm{T}}\,.$$

Теорема доказана.

В ряде приложений оказывается полезной

Теорема 10.8.4 (О полярном разложении) **Любой линейный оператор $\hat{A}$ в E^n с $\det\|\hat{A}\| \neq 0$ может быть единственным образом представлен в виде $\hat{A} = \hat{Q}\hat{R}$, где оператор $\hat{Q}$ — ортогональный, а оператор $\hat{R}$ — самосопряженный и имеющий положительные собственные значения.**

Доказательство.

1°. Покажем вначале, что самосопряженный оператор $\hat{A}^+\hat{A}$ (см. пример 10.7.1) имеет только положительные собственные значения. Действительно, пусть $\hat{A}^+\hat{A}f = \lambda f$, тогда, с одной стороны,

$$(\hat{A}^+\hat{A}f, f) = (\hat{A}f, \hat{A}f) > 0$$

при $f \neq o$, а с другой:

$$(\hat{A}^+\hat{A}f, f) = (\hat{A}f, \hat{A}f) = \lambda(f, f) > 0\,.$$

Но тогда $\lambda > 0$ в силу аксиоматики евклидова пространства, поскольку из предположения, что $\hat{A}f = o$ при $f \neq o$, следует

$$\hat{A}f = 0f \qquad \Longrightarrow \qquad \det\|\hat{A}\| = 0\,,$$

но это противоречит условию теоремы.

2°. Пусть $\{\, e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n \,\}$ — ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора $\hat{A}^+\hat{A}$. Рассмотрим множество элементов $\hat{A}e_i \quad \forall i = [1, n]$, для которых имеем

$$(\hat{A}e_i, \hat{A}e_j) = (\hat{A}^+\hat{A}e_i, e_j) = (\lambda_i e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij} \quad \forall i, j = [1, n]\,.$$

Но это означает, что $\left\{ e'_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \hat{A}e_i \quad \forall i = [1, n] \right\}$ — также базис и притом ортонормированный.

3°. Если за искомый оператор $\hat{Q}$ мы принимаем ортогональный оператор, переводящий ортонормированный базис $\{\, e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n \,\}$ в ортонормированный базис $\{\, e'_1,\, e'_2,\, \ldots,\, e'_n \,\}$, то в качестве $\hat{R}$ можно будет взять оператор $\hat{Q}^{-1}\hat{A}$.

Действительно, во-первых, имеет место очевидное равенство $\hat{A} = \hat{Q}\hat{R}$. Во-вторых, из соотношений

$$\hat{R}e_i = \hat{Q}^{-1}\hat{A}e_i = \hat{Q}^{-1}\sqrt{\lambda_i}e'_i = \sqrt{\lambda_i}e_i$$

(поскольку $e'_i = \hat{Q}e_i \quad \forall i = [1, n]$) следует, что базисные элементы e_i суть собственные векторы оператора $\hat{R}$, отвечающие положительным собственным значениям $\sqrt{\lambda_i}$. Но тогда матрица $\|\hat{R}\|_e$ в базисе $\{\, e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n \,\}$ диагональная и потому симметрическая. Значит, в силу леммы 10.7.1, оператор $\hat{R}$ самосопряженный.

4°. Покажем, наконец, единственность построенного разложения.

Во введенных обозначениях справедливо равенство $\hat{A}^+\hat{A} = \hat{R}^2$, поскольку из $\hat{A} = \hat{Q}\hat{R}$ и $\hat{A}^+ = \hat{R}^+\hat{Q}^+$ следует, что

$$\hat{A}^+\hat{A} = \hat{R}^+\hat{Q}^+\hat{Q}\hat{R} = \hat{R}^+\hat{Q}^{-1}\hat{Q}\hat{R} = \hat{R}^+\hat{R}\,,$$

то в силу самосопряженности $\hat{R} \qquad \hat{R}^+\hat{R} = \hat{R}^2\,.$

Предположим, что существуют два различных самосопряженных оператора $\hat{R}_1$ и $\hat{R}_2$ с положительными собственными значениями, такие, что

$$\hat{A}^+\hat{A} = \hat{R}_1^2 \quad \text{и} \quad \hat{A}^+\hat{A} = \hat{R}_2^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{R}_1^2 - \hat{R}_2^2 = \hat{O}.$$

Заметим, что $\hat{R}_1$ и $\hat{R}_2$ по построению (см. 2°) имеют общую систему собственных векторов, а потому они в силу теоремы 10.7.2 коммутируют. Но тогда, согласно определениям § 8.2, справедливы равенства

$$\hat{O} = \hat{R}_1^2 - \hat{R}_2^2 = \hat{R}_1^2 - \hat{R}_1\hat{R}_2 + \hat{R}_2\hat{R}_1 - \hat{R}_2^2 = \left(\hat{R}_1 - \hat{R}_2\right)\left(\hat{R}_1 + \hat{R}_2\right) .$$

Из невырожденности и линейности $\hat{R}_1$ и $\hat{R}_2$, в силу теоремы 8.6.8, оператор $\hat{R}_1 + \hat{R}_2$ также невырожденный и поэтому из равенства $\hat{R}_1^2 - \hat{R}_2^2$ следует $\hat{R}_1 - \hat{R}_2 = \hat{O}$.

Таким образом, $\hat{R}$ — самосопряженный оператор, определяемый по $\hat{A}$ однозначно. При этом $\hat{Q} = \hat{A}\hat{R}^{-1}$ и, значит, также определяется однозначно по $\hat{A}$.

Теорема доказана.

Замечание 10.8.1. 1°. Теорема о полярном разложении является обобщением теоремы 5.5.2 о возможности представления аффинного преобразования плоскости в виде произведения двух операторов, первый из которых ортогональный, а второй – сжатие по двум взаимно перпендикулярным направлениям, матрица которого диагональная.

2°. В случае вырожденного оператора $\hat{A}$ разложение, аналогичное указанному в теореме 10.8.2, с неотрицательными собственными значениями самосопряженного оператора существует, но не единственно.