Предварительные замечания к введению в математический анализ

В современных математических текстах допускаются некоторые стандартные обозначения, нечасто встречающиеся в пособиях, используемых при изучении математики в средней школе. Рассмотрим некоторые из них.

Символы общности, существования и логической связи

Наиболее распространенные специальные символы (их иногда называют *кванторами*) приведены в следующей таблице:

СИМВОЛ	ЗНАЧЕНИЕ
$\forall$	для всех, для любого
$\exists$	найдется, существует
$\exists!$	найдется и притом единственным образом
$:$	такое что
$\longrightarrow$	имеет место, верно, при котором

Например с их помощью определение ограниченной числовой последовательности:

> последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если найдется неотрицательное число C такое, что для любого номера n будет выполнено неравенство $|x_n| \le C$,

может быть записано так:

> последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если

$$\exists C : C \ge 0 \longrightarrow \forall n \quad |x_n| \le C\ .$$

Символы суммирования и умножения

Если необходимо записать выражение для суммы, в которой число слагаемых произвольно, и при этом известно как зависит величина каждого слагаемого от его номера, то можно использовать специальный символ суммирования $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, указав общий вид слагаемого и диапазон изменения индекса суммирования.

Можно считать, что этот символ заменяет слова “сумма слагаемых вида a_k по k в пределах от 1 до n ”.

Например, при помощи этого символа сумма

$$\sin 1 + \sin 2 + \sin 3 + \cdots + \sin(n-1) + \sin n$$

записывается как

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k,$$

а сумма

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n}$$

представляется в виде

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k}$$

.

Аналогично, формула бинома Ньютона с помощью символа суммирования может быть записана как

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Например, при $n = 4$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Подобный вид записи существует и для операции *умножения*. Например, равенство

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

можно записать в виде

$$\prod_{k=1}^{n} k = n!\,.$$

Для иллюстрации приведем следующие, используемые при решении многих задач, формулы

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\ ;$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ ;$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\ ;$$

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \cdots + \sin n\alpha = \sum_{k=1}^{n} \sin\alpha k = \frac{\sin\ \dfrac{(n+2)\alpha}{2} \cdot \sin\dfrac{n\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Отметим, что из этих соотношений следует любопытное равенство

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 .$$

Полезные неравенства

Для любых двух неотрицательных чисел a и b верно *неравенство Коши*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,,$$

которое иногда используется в следующей форме: для любых двух вещественных чисел x и y справедливо соотношение

$$x^2 + y^2 \geq 2|xy|\ .$$

Неравенство Коши верно и для большего числа неотрицательных чисел:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} a_n}\,.$$

Отметим, что с помощью символов суммирования и умножения последнее соотношение можно записать как

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}\,.$$

В большом числе прикладных задач необходимые оценки могут быть получены при помощи, вытекающего из формулы бинома Ньютона и верного $\forall x$ и $\forall a > -1$, *неравенства Бернулли*

$$(1+a)^x \geq 1 + xa\,.$$

Замечания о роли точности определений и формулировок

В процессе изучения математики следует обращать особое внимание на полноту и точность *определений, формулировок теорем* и *описания свойств.* Недопустима как избыточность (излишняя многословность) подобных лексем, так и потеря каких-либо их деталей.

Проиллюстрируем это следующими примерами.

1°. *Арифметический квадратный корень.*

Как это уже было отмечено, по определению арифметического квадратного корня считается, что $\sqrt{a^2} = |a|$. Может возникнуть вопрос: “Не проще ли положить, что $\sqrt{a^2} = a$?”
Что бы показать некорректность такого определения, рассмотрим следующую цепочку преобразований:

для *любой пары* чисел x и y будут верными равенства

$$\begin{gathered} x^2 - 2xy + y^2 = y^2 - 2yx + x^2, \\ \Downarrow \\ (x-y)^2 = (y-x)^2, \\ \Downarrow \\ \sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{(y-x)^2}. \end{gathered}$$

Если теперь применить определение вида $\sqrt{a^2} = a$, то мы получим

$$x - y = y - x \qquad \Rightarrow \qquad x = y,$$

что очевидно неверно. В то время как использование определения $\sqrt{a^2} = |a|$ дает

$$|x - y| = |y - x| \qquad \Rightarrow \qquad 0 = 0,$$

что верно для любой пары чисел x и y.

2°. *Сколько корней может иметь квадратное уравнение?*

Рассмотрим три следующих утверждения А), В) и С):

А) Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ – квадратное.

В) Квадратное равнение не может иметь более двух корней.

С) Для любых, попарно неравных чисел α, β и γ уравнение

$$\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} + \frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} = 1$$

может быть приведено к виду А) и при этом оно имеет три различных корня $x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta,\ x_3 = \gamma$.

Очевидно, что утверждения А), В) и С) противоречивы в свой совокупности. Иначе говоря, одно из них ошибочное и, на первый взгляд, наибольшие сомнения вызывает утверждение С). Однако, оно на самом деле верное, а ошибка содержится в утверждении А). Дело в том, что квадратным называется уравнение $ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$. И именно для него верно утверждение В).

В нашем же случае, если привести уравнение С) к виду, указанному в утверждении А), коэффициент при x^2 окажется равным нулю.

Более того, это уравнение примет вид $1 = 1$, то есть является *тождеством* — верным равенством при любом значении x (в том числе и при $x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta,\ x_3 = \gamma$).

3°. *Можно ли произвольно группировать слагаемые в сумме?*

Казалось бы ассоциативность операции сложения для чисел позволяет дать положительный ответ на данный вопрос. Однако это верно лишь для сумм с *конечным* числом слагаемых. Если число слагаемых в сумме не ограничено, то возможно возникновение ситуации подобной следующей.

Согласимся "на веру" с утверждением, что сумма неограниченного числа нулей равна нулю, и рассмотрим сумму вида

$$A = 1+2-3+1+2-3+1+2-3+1+2-3+1+2-3+\dots$$

сгруппировав слагаемые сначала как

$$A = (1+2-3)+(1+2-3)+(1+2-3)+(1+2-3)+(1+2-3)+\dots$$

придем к заключению, что $A = 0$, поскольку каждая сумма в скобках дает ноль. Однако, при другом способе группировки

$$A = 1+(2-3+1)+(2-3+1)+(2-3+1)+(2-3+1)+(2-3+\dots$$

получаем $A = 1$. Что означает неприменимость сочетательного правила для сумм с *неограниченным* числом слагаемых.

Последний пример наглядно демонстрирует, что с "бесконечностью" нельзя оперировать как с обычным числом. Стоит также отметить, что методологически аналогичные проблемы могут возникнуть и в случае подмены понятий "отсутствие определенности" и "существование вероятности", которая нередко допускается при рассуждениях на интуитивном уровне.

Функциональные зависимости

На практике достаточно часто приходится иметь дело с так называемыми *переменными величинами*, то есть, числовыми характеристиками, могущими принимать различные значения. Такие количественные характеристики принято называть просто *переменными*.

Например, для описания конкретного человека можно использовать переменные: возраст, рост, вес, коэффициент интеллекта IQ и т.п. При этом нередко оказывается, что значения одной переменной могут быть связаны со значениями другой. Скажем, вес человека зависит от его роста, рост – от возраста, обменный курс валюты – от времени и т.д.

В некоторых, вообще говоря, довольно не частых, случаях зависимость одной переменной величины от другой оказывается *однозначной*, то есть для каждого допустимого значения второй переменной значение первой существует и единственно. Например, площадь круга однозначно зависит от его радиуса, возраст человека имеет единственное значение в каждый момент времени, масса однородного тела однозначно определяется его объемом.

Определение функции

Зависимости между переменными величинами, обладающие такими свойствами, принято называть *функциональными* или, просто, функциями. Они являются объектом изучения в математическом анализе — разделе курса высшей математики, и играют важную роль в большом числе теоретических и прикладных дисциплин.

Определение 1.1. Будем говорить, что задана *функция*, если указано **правило**, по которому **каждому** числу x, принадлежащему числовому множеству X, поставлено в соответствие **единственное** число y, принадлежащему числовому множеству Y.

Множество X принято называть *областью определения* функции, а множество Y - *областью ее значений.* Саму функцию принято обозначать

$$y = f(x) \quad x \in X,\ y \in Y.$$

Наконец, x - независимая переменная, называется *аргументом*, а y - зависимая переменная, *значением* .

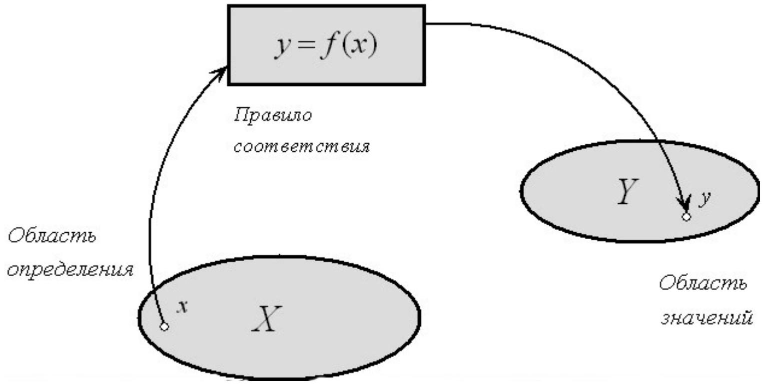

Рис. 1. Определение функциональной зависимости

Схематически функциональную зависимость можно представить как объект состоящий из трех компонентов: области определения, области значений и правила, по которому каждому числу из множества определения поставлено в соответствие единственное число из области значений (см. рис. 1).

Как область определения, так и область значения – это числовые множества. Правило соответствия может иметь различные формы представления: в виде таблицы, математической формулы, графика или являться решением некоторой задачи (скажем, какого-то уравнения). Наконец, это правило может быть просто описано словесно.

Следует иметь в виду, что функцию достаточно часто задают *только формулой*, связывающей значение с аргументом. В данном случае *предполагается*, что областью определения является множество чисел, для которых выполнимы все использованные в записи этой формулы операции. За область же значений принимается совокупность *всех чисел*, являющихся значениями хотя бы для одного из аргументов.

В соответствии с этим соглашением, можно сказать, что область определения X, например, функции $y = \sqrt{x-3}$, составляют все действительные числа не меньшие, чем 3, поскольку извлечь арифметический квадратный корень можно только из неотрицательного числа. Множество значений Y содержит все неотрицательные числа. Символически это можно записать в виде:

$$X : \{\forall x \geq 3\},\ Y : \{\forall y \geq 0\} \qquad \text{или же} \qquad X : \{[3, +\infty)\},\ Y : \{[0, +\infty)\}.$$

Заметим, что задача построения области определения и области значений не всегда оказывается столь тривиальной. Проиллюстрируем это следующими примерами.

Пример 1.1. Найти область определения и область значений для функций: а) $y = \sqrt{\dfrac{2x+3}{x-2}}$.

1) *Найдем область определения*:

решив неравенство $\dfrac{2x+3}{x-2} \geq 0$, получим $\left[\begin{array}{ccc} x & \leq & -\dfrac{3}{2}, \\ x & > & 2, \end{array}\right.$ то есть,

окончательно, $X : \left\{ \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right] \bigcup \Big(2, +\infty\Big) \right\}$, поскольку извлечение квадратного корня возможно только из неотрицательного числа.

Отметим также, что число 2 не принадлежит области определения, поскольку при таком значении x знаменатель подкоренного выражения обратится в 0 .

Область значений:

чтобы найти область значений, рассмотрим формулу $y = \sqrt{\dfrac{2x+3}{x-2}}$ как *уравнение с неизвестным* x *и параметром* y . Выясним, при каких значениях y существует x — вещественный корень этого уравнения.

Несложные выкладки приводят к $x = \dfrac{2y^2+3}{y^2-2}$, что означает существование вещественного x при любых $y \neq \pm\sqrt{2}$.

С другой стороны, значение функции в рассматриваемом примере является арифметическим квадратным корнем и, значит, неотрицательно. Объединив найденные ограничения на величину y , получим, что

$$Y : \left\{ [0, \sqrt{2}) \bigcup (\sqrt{2}, +\infty) \right\} .$$

б) $y = x + \dfrac{1}{x}$

Область определения:

очевидно $X : \{\forall x \neq 0\}$ или, что то же самое, $\{(-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)\}$.

Область значений:

описание области значений данной функции получим в два действия. Сначала рассмотрим случай $x > 0$. Для любых положительных x будет справедливо неравенство

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0\,, \text{ или} \left(x - 2\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) \geq 0\ , \text{откуда} \quad x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Для случая $x < 0$ оценку области значений можно получить, воспользовавшись равенством $(-x) + \dfrac{1}{(-x)} = -\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$, из которого в силу неравенства

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \forall x > 0 \qquad \text{имеем} \qquad x + \frac{1}{x} \leq -2 \quad \forall x < 0.$$

Окончательно получаем, что областью значений данной функции является множество $\quad Y : \{(-\infty, -2] \bigcup [2, +\infty)\}$.

в) $$y = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

Область определения:

находится из условия

$$x^2 + 3x + 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \neq -2 \\ x \neq -1, \end{array} \right.$$

поскольку знаменатель дроби не может принимать нулевых значений. Других ограничений на вычисление значений функции нет, поэтому область определения будет

$$X : \left\{ (-\infty, -2) \bigcup (-2, -1) \bigcup (-1, +\infty) \right\}.$$

Область значений:

область значений данной функции удобно находить, используя тот факт, что ее область определения образуется произвольными вещественными числами (за исключением -2 и -1.)

Рассмотрим формулу $y = \dfrac{2x^2+2x+1}{x^2+3x+2}$ как уравнение с неизвестной x и решим его, считая y некоторым фиксированным параметром.
Для этого преобразуем данное равенство к виду, стандартному для квадратных уравнений

$$(y-2)x^2 + (3y-2)x + (2y-1) = 0\ , \qquad (1.1)$$

корни которого определяются по хорошо известной формуле $x_{1,2} = \dfrac{-(3y-2) \pm \sqrt{D}}{2(y-2)}$ $y \neq 2\,,$ где дискриминант квадратного уравнения (1.1) есть $D = (3y-2)^2 - 4(y-2)(2y-1)\,.$
Условие существования вещественных значений x будет $D \geq 0$, или, в нашем случае,

$$(3y-2)^2 - 4(y-2)(2y-1) = y^2 + 8y - 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y \in \Big\{\, (-\infty, -2\sqrt{5}-4] \bigcup\, [2\sqrt{5}-4, +\infty) \Big\}\ .$$

Иначе говоря, x может принимать вещественные значения лишь либо при $y \leq -2\sqrt{5}-4 \approx -8.4$, либо при $y \geq 2\sqrt{5}-4 \approx 0.4$. Следовательно, область значений данной функции образуют числа y, удовлетворяющие либо первому, либо второму из полученных неравенств и не равные 2.

Наконец заметим, что, хотя приведенные рассуждения не применимы для $y = 2$, ибо в этом случае уравнение (1.1) не квадратное, а линейное – вида $4x + 3 = 0$, тем не менее число 2 принадлежит области значений, поскольку у этого линейного уравнения имеется вещественное решение $x = -\dfrac{3}{4}$, являющееся значением аргумента при котором значение функции равно 2. Следовательно,

$$Y : \left\{ \, (-\infty, -2\sqrt{5} - 4] \bigcup [2\sqrt{5} - 4, +\infty) \right\} \; .$$

Простейшая классификация функций

В заключение обсуждения понятия функциональной зависимости отметим, что функции принято классифицировать по наличию или отсутствую у нее свойства *периодичности* и свойства *четности.*

Определение 1.2. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует число $T \neq 0$ такое, что для любого $x \in X$ выполнено $x \pm T \in X$ и $f(x+T) = f(x)$. Число T в этом случае называется *периодом* функции $y = f(x)$.

Пример 1.2. К периодическим относятся следующие функции:

$$\begin{aligned} &y = \sin x &&\text{с периодом } T = 2\pi, \\ &y = \cos 3x &&\text{с периодом } T = \frac{2\pi}{3}, \\ &y = \operatorname{tg} x &&\text{с периодом } T = \pi. \end{aligned}$$

Определение 1.3. Пусть X — область определения функции $y = f(x)$, симметрична относительно точки $x = 0$, тогда эта функция называется:

четной, если $\forall x \in X$ выполнено $f(-x) = f(x)$,
нечетной, если $\forall x \in X\ f(-x) = -f(x)$.

Пример 1.3. Классификация функций по четности:

$y = x^2$ – четная,
$y = x^3$ – нечетная,
$y = \sin x$ – нечетная,
$y = \cos x$ – четная,
$y = 3^x$ – не является ни четной, ни нечетной.

Следует иметь в виду, что, хотя существуют функции не относящиеся ни к четным, ни к нечетным, в симметричной области определения каждую их них можно представить как сумму некоторой четной функции и некоторой нечетной. Для этого можно использовать, например, формулу

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Так для функции $y = 3^x$ разложение в сумму четной и нечетной будет иметь вид

$$y = \frac{3^x + 3^{-x}}{2} + \frac{3^x - 3^{-x}}{2}.$$

Предел функции

Помимо своего *значения*, для каждого допустимого аргумента функция может иметь и *другие* числовые характеристики. Одной из которых является число, называемое *пределом функции в точке.* Рассмотрим это понятие подробнее.

Рассматривая значения функции $f(x)$ в малой окрестности точки $x = x_0$, в большом числе случаев можно заметить, что эти значения приближаются к некоторому числу A, при любом способе приближения x к x_0. При этом величина A может отличаться от значения $f(x_0)$ и даже существовать в тех случаях, когда точка x_0 не принадлежит области определения функции $f(x)$.

> Примером может служить функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, которая не имеет никакого значения в точке $x = 0$, но определена в любой ее окрестности и значение которой тем меньше отличается от $A = 1$, чем меньше абсолютная величина x.

Если такое число A существует, то его называют *пределом функции* $f(x)$ *при* x *стремящимся к* x_0, и данный факт символически обозначают как $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Пока мы не будем давать строгого определения предела функции, только заметим, что понятие предела функции имеет смысл не только, когда x_0 является некоторым конечным числом, но и символически изображает ∞ , $+\infty$ или $-\infty$.

Подчеркнем еще раз: предел функции при x стремящемся к x_0 (так же как и $f(x_0)$ – ее значение) является *локальной* числовой характеристикой функции, то есть относящейся к точке x_0.

При этом для одной и той же точки значение функции и её предел независимы друг от друга: они могут существовать одновременно и быть равными или не равными друг другу, и также могут не существовать, как вместе, так и по отдельности.

Поясним это следующим примером.

Пример 1.4. Рассмотрим функцию, называемую *сигнатурой числа,* обозначаемую как $y = \operatorname{sgn} x$ и определяемую формулой

$$\operatorname{sgn} x = \left[\begin{array}{rl} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{array} \right.$$

График этой функции показан на рис. 2.

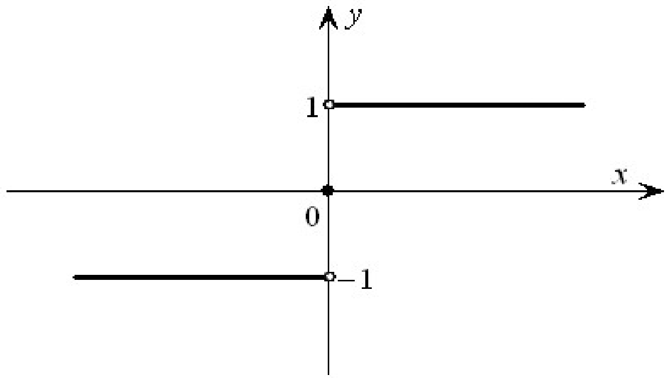

Рис. 2. График функции $y = \operatorname{sgn} x$

Эта функция при $x = 0$ имеет нулевое значение, однако предел $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ не существует. Действительно, если неограниченно приближаться к точке 0 справа, то значение этой функции будет оставаться равным $+1$, в то время как при приближении к нулевой точке слева это значение будет равно -1.

Проверьте самостоятельно, что у функции $y = |\operatorname{sgn} x|$ в точке 0 существуют как предел, равный 1, так и значение, равное нулю.

Наконец укажем, что в случае, когда в точке x_0 как предел, так и значение функции существуют и *равны друг другу*, то функция называется *непрерывной* в этой точке.

Производная

Производная функции в точке

Значение функции и ее предел суть локальные числовые характеристики, позволяющие количественно описывать функцию как в некоторой точке, так и в малой ее окрестности. Однако этих характеристик оказывается недостаточно, когда в окрестности точки x_0 требуется оценить не только само значение или предел функции, но и определить как быстро они меняются.

Например, функции $y = 2x$ и $y = 5x$ имеют в точке $x_0 = 0$ нулевое значение, но скорости их изменения в окрестности нуля существенно различны.

Для оценки скорости изменения значения функции используется специальная числовая характеристика функции — *производная функции в точке.*

Определение 1.4. *Производной функции в точке* называется число, равное пределу отношения величины приращения значения функции к величине приращения ее аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Символически это определение означает: для функции $y = f(x)$ ее производная в точке x_0, обозначаемая как $f'(x_0)$ или $y'_x(x_0)$, равна

$$f'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}. \tag{1.2}$$

Действительно, если величина аргумента была x_0, а стала $x_0 + t$, то ее приращение очевидно равно $(x_0 + t) - x_0 = t$. Аналогично, если значение функции было $f(x_0)$, а стало $f(x_0+t)$, то ее соответствующее приращение составляет $f(x_0 + t) - f(x_0)$.

Из данного определения следует, что функция $y = f(x)$ должна иметь значения в некоторой окрестности точки x_0, а также быть *непрерывной* в точке x_0. Последнее условие необходимое (но не достаточное!) для существования производной функции в точке, поскольку лишь для непрерывной функции предел приращения значения функции равен нулю при стремлении к нулю приращения аргумента.

Однако, даже для непрерывной функции предел (1.2) является неопределенностью вида “$\frac{0}{0}$”, то есть заключение о существовании (или не существовании) производной функции в точке можно делать лишь после “раскрытия” этой неопределенности.

Поясним определение 1.4 следующими примерами.

Пример 1.5. Найти производную функции $y = x^3$ в точке $x_0 = 2$.

Вначале решим эту задачу для произвольной фиксированной точки x_0. Пусть приращение аргумента в точке x_0 равно t, найдем соответствующее приращение значения данной функции

$$f(x_0 + t) - f(x_0) =$$

$$= (x_0 + t)^3 - x_0^3 = \left(x_0^3 + 3x_0^2 t + 3x_0 t^2 + t^3\right) - x_0^3 = 3x_0^2 t + 3x_0 t^2 + t^3 \ .$$

Тогда

$$f'\left(x_0\right) = \lim_{t \to 0} \frac{3x_0^2 t + 3x_0 t^2 + t^3}{t} = \lim_{t \to 0} \left(3x_0^2 + 3x_0 t + t^2\right) = 3x_0^2 \ .$$

Подставив в полученное выражение $x_0 = 2$, найдем, что искомое значение $y'_x(2)$ – производной для функции $y = x^3$ в точке 2, равно 12.

Пример 1.6. Найти производную функции $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$.

Для данной функции, в силу $x_0 = 0$

$$f'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{|x_0 + t| - |x_0|}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t} = \lim_{t \to 0} \left[\begin{array}{rl} 1\ , & \text{если } t > 0, \\ -1\ , & \text{если } t < 0. \end{array} \right. \tag{1.3}$$

Откуда можно сделать заключение, что у рассматриваемой функции нет производной в нуле, поскольку предел (1.3) не существует.

Завершая обсуждение определения 1.4 отметим, что в математических текстах используются различные способы обозначения производной функции в точке. Помимо использованных выше, к наиболее часто встречающимся обозначениям относятся

$$y'_x(x)\Big|_{x=x_0} ; \qquad \frac{dy}{dx}\Bigg|_{x=x_0} ; \qquad f'(x)\Big|_{x=x_0} .$$

Понятие производной функции в точке допускает *геометрическую интерпретацию*, смысл которой лучше всего иллюстрирует задача построения касательной к графику функции в некоторой его точке. Решая эту задачу, мы приходим к заключению, что *значение производной функции в точке равно тангенсу угла, образованного касательной в этой точке к графику функции с осью абсцисс* (Ox) .

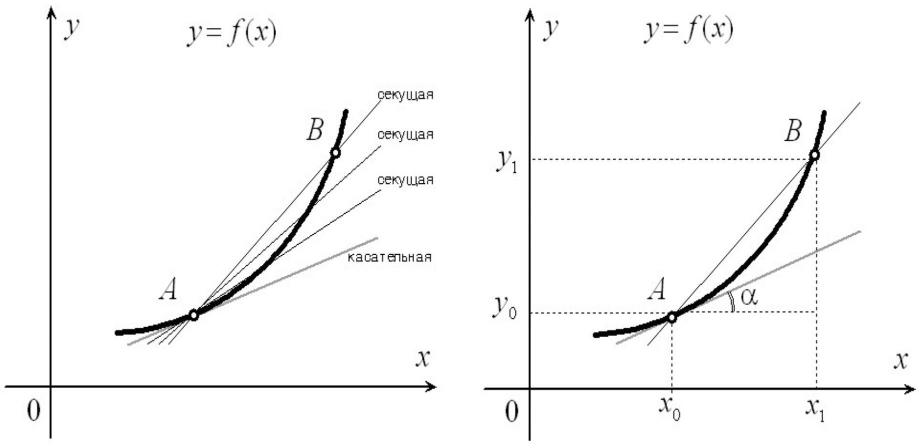

Рис. 3. Геометрический смысл производной функции в точке.

В заключение отметим, что из вышеприведенных рассуждений следует необходимость *равенства нулю значения производной функции в этих точках или ее не существования.* Примером могут служить функции $y = x^2$ и $y = |x|$, имеющие в точке $x_0 = 0$ минимум.

С другой стороны, это условие не является достаточным. Пример — функция $y = x^3$, у которой в точке $x_0 = 0$ производная равна нулю, однако экстремума у нее здесь нет.

Производная функция

Поиск значений производных функций в точках (непосредственно по определению 1.4) в большинстве случаев является сложной задачей, требующей для своего решения значительных затрат вычислительных усилий. На практике оказывается удобнее применять иной подход, основанный на следующих соображениях.

Используемый в определении 1.4 предельный переход осуществляется по вспомогательной переменной t, в то время как, значение x_0 — аргумента функции $f(x)$, для которого ищется производная в точке, является *фиксированным числовым параметром.*

Если изменить x_0, то значение предела (1.4), вообще говоря, изменится. Однако для каждого конкретного x_0 оно *одно,* поскольку *если предел существует, то он единственен.*

Поэтому определение 1.4 можно рассматривать как правило, по которому значению x_0 ставится в соответствие единственное число $f'(x_0)$, и можно сказать, что таким образом задана некоторая *новая функция,* значение которой в точке x_0 равно $f'(x_0)$.

Эта функция называется *производной функцией от* $y = f(x)$ и обозначается как $f'(x)$, операцию поиска $f'(x)$ называют *дифференцированием.* В случае, когда для $f(x)$ существует $f'(x)$, говорят также, что функция $f(x)$ *дифференцируемая.*

Функцию $y = F(x)$ такую, что $F'(x) = f(x)$, называют *первообразной для* $y = f(x)$. Операция, *обратная* к дифференцированию, то есть, операция нахождения первообразной для $y = f(x)$ называется *интегрированием.*

Например, воспользовавшись решением задачи 1.5, можно утверждать, что функция, производная от $y = x^3$, есть $y = 3x^2$, поскольку использованный метод решения этой задачи годится для *любого* x_0.

Производные функции принято обозначать одним из следующих символов
$$y'_x\ ; \qquad \frac{dy}{dx}\,; \qquad y'(x)\ .$$

В тех случаях, когда функция зависит более чем от одной переменной, идентификатор переменной, по которой берется производная, указывается явно в виде нижнего индекса.

Например, для функции $f(x,p)$ — зависящей от x и p, запись $f'_x(x,p)$ означает производную по переменной x, в предположении, что p — фиксированный параметр. Такие производные для функций, зависящих от многих переменных, принято называть *частными производными* и использовать для них специальное обозначение $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Стоит также отметить, что в русскоязычных математических текстах такие принципиально различные математические объекты, как:

«производная функции в точке», которая есть *число* и

«производная функция», являющаяся функцией,

часто именуются одним и тем же словом — “производная”, полагая, что из контекста понятно, о чем идет речь.

В английском языке, например, этой проблемы не существует, поскольку производная функции в точке — это *derivation*, а производная функция — *derivative*.

Очевидно, что использование производных функций для нахождения значений производной функции в точке гораздо удобнее, чем определение 1.4. Но тогда возникает вопрос: как находить производные функции?

Ответ на этот вопрос следующий:

надо воспользоваться информацией, содержащейся в следующих двух таблицах:

1) в таблице *производных функций*, содержащей формулы производных для некоторого небольшого набора элементарных функций, полученных непосредственно при помощи определения 1.4 и
2) в таблице *правил дифференцирования*, которые позволяют выражать производные от одних функций через производные от других. Обоснование справедливости этих правил, основанное на использовании определения 1.4 и свойств пределов функций, обычно приводится в полном курсе математического анализа.

Первая из этих таблиц, называемая обычно «Табличные производные» может иметь, например, такой вид

$f(x)$	$f'(x)$
x^a	ax^{a-1}
e^x	e^x
$a^x, \quad a>0, a\neq 1$	$a^x \ln a$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\log_a \lvert x\rvert, \quad a>0, a\neq 1$	$\frac{1}{x\ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Таблица 2.1

Вторую таблицу, называемую «Правила дифференцирования», удобно записать в следующем виде

1°	$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
2°	$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$, где C – const
3°	$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4°	$(f(g(x)))'_x = f'_g(g(x)) \cdot g'_x(x)$

Таблица 2.2

В таблицах 2.1 и 2.2 по умолчанию предполагается, что все производные, использованные для записи этих формул, существуют.

Использование таблиц 2.1 и .2.2 проиллюстрируем следующими примерами.

Пример 2.1. Пусть требуется найти производные функции для

$$1)\ y = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + 1}{x}\,, \qquad 2)\ y = \frac{\sin x}{x} \qquad \text{и} \qquad 3)\ y = e^{\arccos x}.$$

Решение.

1) Сравнение правил 1° и 3° таблицы 2.2 показыает, что сумму функций дифференцировать проще, чем произведение, поэтому вначале выполним почленное деление, то есть будем искать производную от функции

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + 1}{x}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1}\right)' =$$

и, используя первые формулы таблиц 2.1 и 2.2, получаем

$$= -\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} - x^{-2} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\,.$$

2) В таблице 2.2 нет формулы для дифференцирования дроби (хотя во многих учебниках ее можно встретить), поэтому сначала преобразуем данную функцию в произведение, и лишь потом применим правило 3° таблицы 2.2

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \big((\sin x)\cdot(x^{-1})\big)' \ = \ (\sin x)'\cdot(x^{-1}) + (\sin x)\cdot(x^{-1})' \ =$$

$$= \ (\cos x)\cdot x^{-1} + (\sin x)\cdot(-x^{-2}) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,.$$

3) Вначале вспомним, что $g(x) = \arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$, откуда, согласно первому правилу таблицы 2.2 и предпоследней строке таблицы 2.1,

$$g'_x(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Тогда,

$$y'_x = (e^{\arccos x})'_x = \left(e^{g(x)}\right)'_x = (e^g)'_g \cdot g'_x(x) =$$

$$= e^g\cdot g'_x(x) = e^g\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

В заключение данного раздела кратко рассмотрим еще два математических объекта, связанные с понятием производной функцией.

Во-первых, в процессе исследования свойств функции иногда оказывается необходимо рассмотреть характеристику, оценивающую скорость изменения величины *производной функции в окрестности точки* x_0.

Эта характеристика называется *производной второго порядка* или, просто, *второй производной.* Ее принято обозначать как

$$y''_{x=x_0} \qquad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}; \qquad y''(x)\big|_{x=x_0},$$

а поиск значения этой числовой характеристики сводится к вычислению предела вида

$$f''(x_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f'(x_0+t)-f'(x_0)}{t}\,. \tag{2.1}$$

Поскольку вторые производные функции в точке (как пределы функции) определены однозначно, то можно задать еще одну функцию, значениями которой являются числа, задаваемые формулой (2.1).

Для нахождения второй производной следует использовать те же правила, что и при вычислении первой.

Например, для функции $y = \ln|x|$, согласно таблице 2.1, $y' = \dfrac{1}{x}$, и, в свою очередь, вторая производная от функции $y = \ln|x|$ равна $y'' = (-1)x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$.

То есть, $(\ln|x|)'' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Другой математический объект, связанный с производной функцией, который часто используется в приложениях носит название *первого дифференциала* или, просто, *дифференциала.*

Дифференциалом функции $y = f(x)$, имеющей производную в точке x_0, называется функция df, зависящая от двух переменных x_0 и dx, вида

$$df(x_0, dx) = f'(x_0) \cdot dx.$$

Обратите внимание, что здесь как dx , так и df являются не произведениями, а обозначениями (символами) переменных величин.

По определению дифференциала его значение прямо пропорционально зависит от dx, в то время как его зависимость от x_0 может быть и нелинейной.

Основное свойство дифференциала описывает формула

$$f(x_0 + dx) - f(x_0) = df(x_0, dx) + r(x_0, dx), \tag{2.2}$$

в которой для остаточного члена $r(x_0, dx)$ справедливо равенство (являющееся утверждением теоремы!)

$$\lim_{dx \to 0} \frac{r(x_0, dx)}{df(x_0, dx)} = 0\,.$$

Это означает, что в качестве *оценки* разности $f(x_0 + dx) - f(x_0)$ для, дифференцируемой в точке x_0, функции $f(x)$ можно использовать величину $f'(x_0) \cdot dx$ и погрешность этой оценки будет тем меньше, чем меньше $|dx|$.