Предварительные замечания к введению в математический анализ

Функциональные зависимости

На практике достаточно часто приходится иметь дело с так называемыми *переменными величинами*, то есть, числовыми характеристиками, могущими принимать различные значения. Такие количественные характеристики принято называть просто *переменными.*

Например, для описания конкретного человека можно использовать переменные: возраст, рост, вес, коэффициент интеллекта IQ и т.п. При этом нередко оказывается, что значения одной переменной могут быть связаны со значениями другой. Скажем, вес человека зависит от его роста, рост – от возраста, обменный курс валюты – от времени и т.д.

В некоторых, вообще говоря, довольно не частых, случаях зависимость одной переменной величины от другой оказывается *однозначной*, то есть для каждого допустимого значения второй переменной значение первой существует и единственно. Например, площадь круга однозначно зависит от его радиуса, возраст человека имеет единственное значение в каждый момент времени, масса однородного тела однозначно определяется его объемом.

Определение функции

Зависимости между переменными величинами, обладающие такими свойствами, принято называть *функциональными* или, просто, функциями. Они являются объектом изучения в математическом анализе — разделе курса высшей математики, и играют важную роль в большом числе теоретических и прикладных дисциплин.

Определение 1.1. Будем говорить, что задана *функция*, если указано **правило**, по которому **каждому** числу x, принадлежащему числовому множеству X, поставлено в соответствие **единственное** число y, принадлежащему числовому множеству Y.

Множество X принято называть *областью определения* функции, а множество Y - *областью ее значений.* Саму функцию принято обозначать

$$y = f(x) \quad x \in X,\ y \in Y.$$

Наконец, x - независимая переменная, называется *аргументом*, а y - зависимая переменная, *значением* .

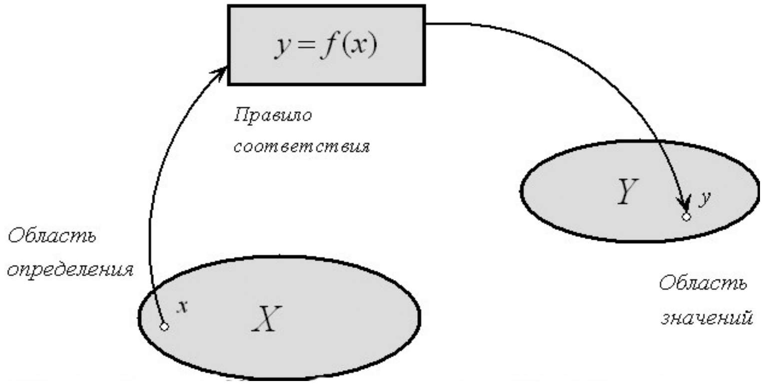

Рис. 1. Определение функциональной зависимости

Схематически функциональную зависимость можно представить как объект состоящий из трех компонентов: области определения, области значений и правила, по которому каждому числу из множества определения поставлено в соответствие единственное число из области значений (см. рис. 1).

Как область определения, так и область значения – это числовые множества. Правило соответствия может иметь различные формы представления: в виде таблицы, математической формулы, графика или являться решением некоторой задачи (скажем, какого-то уравнения). Наконец, это правило может быть просто описано словесно.

Следует иметь в виду, что функцию достаточно часто задают *только формулой*, связывающей значение с аргументом. В данном случае *предполагается*, что областью определения является множество чисел, для которых выполнимы все использованные в записи этой формулы операции. За область же значений принимается совокупность *всех чисел*, являющихся значениями хотя бы для одного из аргументов.

В соответствии с этим соглашением, можно сказать, что область определения X, например, функции $y = \sqrt{x-3}$, составляют все действительные числа не меньшие, чем 3, поскольку извлечь арифметический квадратный корень можно только из неотрицательного числа. Множество значений Y содержит все неотрицательные числа. Символически это можно записать в виде:

$$X : \{\forall x \geq 3\},\ Y : \{\forall y \geq 0\} \qquad \text{или же} \qquad X : \{[3, +\infty)\},\ Y : \{[0, +\infty)\}.$$

Заметим, что задача построения области определения и области значений не всегда оказывается столь тривиальной. Проиллюстрируем это следующими примерами.

Пример 1.1. Найти область определения и область значений для функций: а) $y = \sqrt{\dfrac{2x+3}{x-2}}$.

1) *Найдем область определения*:

решив неравенство $\dfrac{2x+3}{x-2} \geq 0$, получим $\left[\begin{array}{ccc} x & \leq & -\dfrac{3}{2}, \\ x & > & 2, \end{array} \right.$ то есть,

окончательно, $X : \left\{ \left(-\infty, -\dfrac{3}{2} \right] \bigcup \Big(2, +\infty \Big) \right\}$, поскольку извлечение квадратного корня возможно только из неотрицательного числа.

Отметим также, что число 2 не принадлежит области определения, поскольку при таком значении x знаменатель подкоренного выражения обратится в 0 .

Область значений:

чтобы найти область значений, рассмотрим формулу $y = \sqrt{\dfrac{2x+3}{x-2}}$ как *уравнение с неизвестным* x *и параметром* y . Выясним, при каких значениях y существует x — вещественный корень этого уравнения.

Несложные выкладки приводят к $x = \dfrac{2y^2+3}{y^2-2}$, что означает существование вещественного x при любых $y \neq \pm\sqrt{2}$.

С другой стороны, значение функции в рассматриваемом примере является арифметическим квадратным корнем и, значит, неотрицательно. Объединив найденные ограничения на величину y , получим, что

$$Y : \left\{ [0, \sqrt{2}) \bigcup (\sqrt{2}, +\infty) \right\} .$$

б) $\quad y = x + \dfrac{1}{x}$

Область определения:

очевидно $X : \{\forall x \neq 0\}$ или, что то же самое, $\{(-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)\}$.

Область значений:

описание области значений данной функции получим в два действия. Сначала рассмотрим случай $x > 0$. Для любых положительных x будет справедливо неравенство

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0\,, \text{ или } \left(x - 2\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) \geq 0\,, \text{откуда} \quad x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Для случая $x < 0$ оценку области значений можно получить, воспользовавшись равенством $(-x) + \dfrac{1}{(-x)} = -\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$, из которого в силу неравенства

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \forall x > 0 \qquad \text{имеем} \qquad x + \frac{1}{x} \leq -2 \quad \forall x < 0.$$

Окончательно получаем, что областью значений данной функции является множество $\quad Y : \{(-\infty, -2] \bigcup [2, +\infty)\}$.

в) $$y = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

Область определения:

находится из условия

$$x^2 + 3x + 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \neq -2 \\ x \neq -1, \end{array} \right.$$

поскольку знаменатель дроби не может принимать нулевых значений. Других ограничений на вычисление значений функции нет, поэтому область определения будет

$$X : \Big\{ (-\infty, -2) \bigcup (-2, -1) \bigcup (-1, +\infty) \Big\} .$$

Область значений:

область значений данной функции удобно находить, используя тот факт, что ее область определения образуется произвольными вещественными числами (за исключением -2 и -1.)

Рассмотрим формулу $y = \dfrac{2x^2+2x+1}{x^2+3x+2}$ как уравнение с неизвестной x и решим его, считая y некоторым фиксированным параметром.

Для этого преобразуем данное равенство к виду, стандартному для квадратных уравнений

$$(y-2)x^2 + (3y-2)x + (2y-1) = 0\ , \tag{1.1}$$

корни которого определяются по хорошо известной формуле $x_{1,2} = \dfrac{-(3y-2) \pm \sqrt{D}}{2(y-2)}$ $y \neq 2\,,$ где дискриминант квадратного уравнения (1.1) есть $D = (3y-2)^2 - 4(y-2)(2y-1)\,.$

Условие существования вещественных значений x будет $D \geq 0$, или, в нашем случае,

$$(3y-2)^2 - 4(y-2)(2y-1) = y^2 + 8y - 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y \in \left\{\ (-\infty, -2\sqrt{5}-4] \bigcup [2\sqrt{5}-4, +\infty)\right\}\ .$$

Иначе говоря, x может принимать вещественные значения лишь либо при $y \leq -2\sqrt{5}-4 \approx -8.4$, либо при $y \geq 2\sqrt{5}-4 \approx 0.4$. Следовательно, область значений данной функции образуют числа y, удовлетворяющие либо первому, либо второму из полученных неравенств и не равные 2.

Наконец заметим, что, хотя приведенные рассуждения не применимы для $y = 2$, ибо в этом случае уравнение (1.1) не квадратное, а линейное – вида $4x + 3 = 0$, тем не менее число 2 принадлежит области значений, поскольку у этого линейного уравнения имеется вещественное решение $x = -\dfrac{3}{4}$, являющееся значением аргумента при котором значение функции равно 2. Следовательно,

$$Y : \left\{ \, (-\infty, -2\sqrt{5} - 4] \bigcup \, [2\sqrt{5} - 4, +\infty) \right\} \; .$$

Простейшая классификация функций

В заключение обсуждения понятия функциональной зависимости отметим, что функции принято классифицировать по наличию или отсутствую у нее свойства *периодичности* и свойства *четности*.

Определение 1.2. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует число $T \neq 0$ такое, что для любого $x \in X$ выполнено $x \pm T \in X$ и $f(x+T) = f(x)$. Число T в этом случае называется *периодом* функции $y = f(x)$.

Пример 1.2. К периодическим относятся следующие функции:

$$\begin{aligned} &y = \sin x && \text{с периодом } T = 2\pi, \\ &y = \cos 3x && \text{с периодом } T = \frac{2\pi}{3}, \\ &y = \operatorname{tg} x && \text{с периодом } T = \pi. \end{aligned}$$

Определение 1.3. Пусть X — область определения функции $y = f(x)$, симметрична относительно точки $x = 0$, тогда эта функция называется:

четной, если $\forall x \in X$ выполнено $f(-x) = f(x)$,
нечетной, если $\forall x \in X \ f(-x) = -f(x)$.

Пример 1.3. Классификация функций по четности:

$$\begin{array}{ll} y = x^2 & – \text{четная}, \\ y = x^3 & – \text{нечетная}, \\ y = \sin x & – \text{нечетная}, \\ y = \cos x & – \text{четная}, \\ y = 3^x & – \text{не является ни четной, ни нечетной}. \end{array}$$

Следует иметь в виду, что, хотя существуют функции не относящиеся ни к четным, ни к нечетным, в симметричной области определения каждую их них можно представить как сумму некоторой четной функции и некоторой нечетной. Для этого можно использовать, например, формулу

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Так для функции $y = 3^x$ разложение в сумму четной и нечетной будет иметь вид

$$y = \frac{3^x + 3^{-x}}{2} + \frac{3^x - 3^{-x}}{2}.$$

Обратная функция

Согласно определению функциональной зависимостьи для каждого значения аргумента имеется единственное значение функции. Обратное, вообще говоря, неверное. Каждому значению функции может соответствовать большее, чем одно значение аргумента.

Однако, возможен случай *взаимно однозначного* соответствия значений аргумента и функции. Примером такого случая могут служить функции $y = x^3$ и $y = 2^x$.

Интересно, что для таких функций $y = f(x)$ существует функциональная зависимость, в которой роль аргумента играет y, а значением служит x. Другими словами, обратная функция из y делает x. Такую функцию принято называть *обратной к функции* $y = f(x)$ и обозначать как $y = f^{-1}(x)$.

Для взаимно однозначной функции $y = x^3$ обратной является функция $y = \sqrt[3]{x}$, а для $y = 2^x$ это есть функция $y = \log_2 x$.

Определение 0.1.4. Пусть

Предел функции

Помимо своего *значения*, для каждого допустимого аргумента функция может иметь и *другие* числовые характеристики. Одной из которых является число, называемое *пределом функции в точке*. Рассмотрим это понятие подробнее.

Рассматривая значения функции $f(x)$ в малой окрестности точки $x = x_0$, в большом числе случаев можно заметить, что эти значения приближаются к некоторому числу A, при любом способе приближения x к x_0. При этом величина A может отличаться от значения $f(x_0)$ и даже существовать в тех случаях, когда точка x_0 не принадлежит области определения функции $f(x)$.

> Примером может служить функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, которая не имеет никакого значения в точке $x = 0$, но определена в любой ее окрестности и значение которой тем меньше отличается от $A = 1$, чем меньше абсолютная величина x.

Если такое число A существует, то его называют *предeлом функции $f(x)$ при x стремящимся к x_0*, и данный факт символически обозначают как $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Пока мы не будем давать строгого определения предела функции, только заметим, что понятие предела функции имеет смысл не только, когда x_0 является некоторым конечным числом, но и символически изображает ∞ , $+\infty$ или $-\infty$.

Подчеркнем еще раз: предел функции при x стремящемся к x_0 (так же как и $f(x_0)$ – ее значение) является *локальной* числовой характеристикой функции, то есть относящейся к точке x_0.

При этом для одной и той же точки значение функции и её предел независимы друг от друга: они могут существовать одновременно и быть равными или не равными друг другу, и также могут не существовать, как вместе, так и по отдельности.

Поясним это следующим примером.

Пример 1.4. Рассмотрим функцию, называемую *сигнатурой числа,* обозначаемую как $y = \operatorname{sgn} x$ и определяемую формулой

$$\operatorname{sgn} x = \left[\begin{array}{rl} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{array} \right.$$

График этой функции показан на рис. 2.

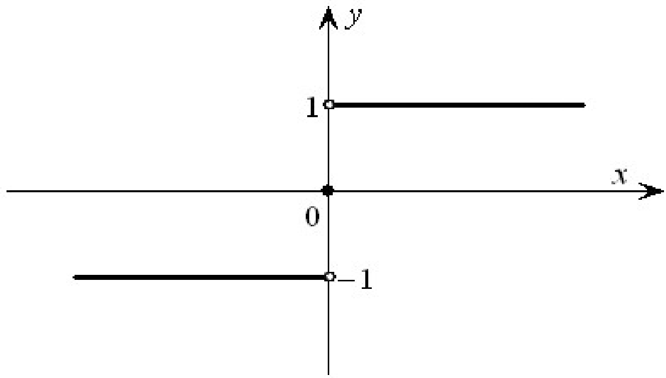

Рис. 2. График функции $y = \operatorname{sgn} x$

Эта функция при $x = 0$ имеет нулевое значение, однако предел $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ не существует. Действительно, если неограниченно приближаться к точке 0 справа, то значение этой функции будет оставаться равным $+1$, в то время как при приближении к нулевой точке слева это значение будет равно -1.

Проверьте самостоятельно, что у функции $y = |\operatorname{sgn} x|$ в точке 0 существуют как предел, равный 1, так и значение, равное нулю.

Наконец укажем, что в случае, когда в точке x_0 как предел, так и значение функции существуют и *равны друг другу*, то функция называется *непрерывной* в этой точке.

Производная

Производная функции в точке

Значение функции и ее предел суть локальные числовые характеристики, позволяющие количественно описывать функцию как в некоторой точке, так и в малой ее окрестности. Однако этих характеристик оказывается недостаточно, когда в окрестности точки x_0 требуется оценить не только само значение или предел функции, но и определить как быстро они меняются.

Например, функции $y = 2x$ и $y = 5x$ имеют в точке $x_0 = 0$ нулевое значение, но скорости их изменения в окрестности нуля существенно различны.

Для оценки скорости изменения значения функции используется специальная числовая характеристика функции — *производная функции в точке.*

Определение 1.4. *Производной функции в точке* называется число, равное пределу отношения величины приращения значения функции к величине приращения ее аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Символически это определение означает: для функции $y = f(x)$ ее производная в точке x_0, обозначаемая как $f'(x_0)$ или $y'_x(x_0)$, равна

$$f'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}. \tag{1.2}$$

Действительно, если величина аргумента была x_0, а стала $x_0 + t$, то ее приращение очевидно равно $(x_0 + t) - x_0 = t$. Аналогично, если значение функции было $f(x_0)$, а стало $f(x_0+t)$, то ее соответствующее приращение составляет $f(x_0 + t) - f(x_0)$.

Из данного определения следует, что функция $y = f(x)$ должна иметь значения в некоторой окрестности точки x_0, а также быть *непрерывной* в точке x_0. Последнее условие необходимое (но не достаточное!) для существования производной функции в точке, поскольку лишь для непрерывной функции предел приращения значения функции равен нулю при стремлении к нулю приращения аргумента.

Однако, даже для непрерывной функции предел (1.2) является неопределенностью вида “$\frac{0}{0}$”, то есть заключение о существовании (или не существовании) производной функции в точке можно делать лишь после “раскрытия” этой неопределенности.

Поясним определение 1.4 следующими примерами.

Пример 1.5. Найти производную функции $y = x^3$ в точке $x_0 = 2$.

Вначале решим эту задачу для произвольной фиксированной точки x_0. Пусть приращение аргумента в точке x_0 равно t, найдем соответствующее приращение значения данной функции

$$f(x_0 + t) - f(x_0) =$$

$$= (x_0 + t)^3 - x_0^3 = \left(x_0^3 + 3x_0^2 t + 3x_0 t^2 + t^3\right) - x_0^3 = 3x_0^2 t + 3x_0 t^2 + t^3 \ .$$

Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{3x_0^2 t + 3x_0 t^2 + t^3}{t} = \lim_{t\to 0} \left(3x_0^2 + 3x_0 t + t^2\right) = 3x_0^2 \ .$$

Подставив в полученное выражение $x_0 = 2$, найдем, что искомое значение $y'_x(2)$ – производной для функции $y = x^3$ в точке 2, равно 12.

Пример 1.6. Найти производную функции $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$.

Для данной функции, в силу $x_0 = 0$

$$f'(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{|x_0 + t| - |x_0|}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t} = \lim_{t\to 0} \left[\begin{array}{rl} 1\ , & \text{если } t > 0, \\ -1\ , & \text{если } t < 0. \end{array} \right. \tag{1.3}$$

Откуда можно сделать заключение, что у рассматриваемой функции нет производной в нуле, поскольку предел (1.3) не существует.

Завершая обсуждение определения 1.4 отметим, что в математических текстах используются различные способы обозначения производной функции в точке. Помимо использованных выше, к наиболее часто встречающимся обозначениям относятся

$$y'_x(x)\Big|_{x=x_0} ; \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} ; \qquad f'(x)\Big|_{x=x_0} .$$

Понятие производной функции в точке допускает *геометрическую интерпретацию*, смысл которой лучше всего иллюстрирует задача построения касательной к графику функции в некоторой его точке. Решая эту задачу, мы приходим к заключению, что *значение производной функции в точке равно тангенсу угла, образованного касательной в этой точке к графику функции с осью абсцисс* (Ox) .

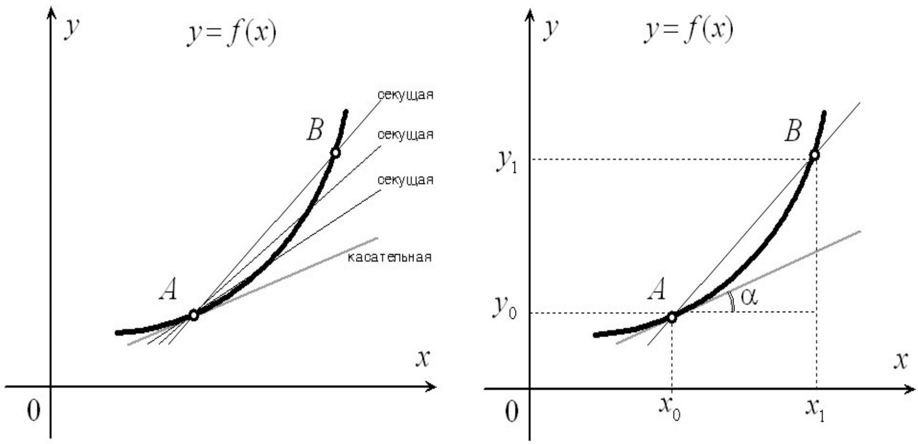

Рис. 3. Геометрический смысл производной функции в точке.

В заключение отметим, что из вышеприведенных рассуждений следует необходимость *равенства нулю значения производной функции в этих точках или ее не существования.* Примером могут служить функции $y = x^2$ и $y = |x|$, имеющие в точке $x_0 = 0$ минимум.

С другой стороны, это условие не является достаточным. Пример — функция $y = x^3$, у которой в точке $x_0 = 0$ производная равна нулю, однако экстремума у нее здесь нет.

Производная функция

Поиск значений производных функций в точках (непосредственно по определению 1.4) в большинстве случаев является сложной задачей, требующей для своего решения значительных затрат вычислительных усилий. На практике оказывается гораздо удобнее применять иной подход, основанный на следующих соображениях.

Используемый в определении 1.4 предельный переход осуществляется по вспомогательной переменной t, в то время как, значение x_0 — аргумента функции $f(x)$, для которой ищется производная в точке, является фиксированным числовым параметром.

Если изменить x_0, то значение предела (5.1.1), вообще говоря, изменится. Однако для каждого конкретного x_0 оно *одно,* поскольку если предел существует, то он единственен.

Поэтому определение 1.4 можно рассматривать как правило, по которому каждому значению x_0, принадлежащему области определения функции $y = f(x)$, ставится в соответствие единственное число $f'(x_0)$, то есть можно сказать, что таким образом задана некоторая *новая функция,* значение которой в точке x_0 равно $f'(x_0)$.

Эту функцию принято называть *производной функцией от* $y = f(x)$ и обозначать как $f'(x)$, операцию же поиска $f'(x)$ называют *дифференцированием.* В случае, когда для $f(x)$ существует $f'(x)$, говорят также, что функция $f(x)$ *дифференцируемая.*

С другой стороны, функцию $y = F(x)$ такую, что $F'(x) = f(x)$, называют *первообразной для* $y = f(x)$. Операция ее нахождения называется *интегрированием.*

Например, воспользовавшись решением задачи 1.5, можно утверждать, что функция, производная от $y = x^3$, есть $y = 3x^2$, поскольку использованный нами метод решения этой задачи годится для *любого* x_0.

Производные функции принято также обозначать как

$$y'_x \; ; \qquad \frac{dy}{dx} \; ; \qquad y'(x) \; .$$

В тех случаях, когда функция зависит более чем от одной переменной, идентификатор переменной, по которой берется производная, указывается явно в виде нижнего индекса.

Например, для функции $f(x,p)$ — зависящей от x и p, запись $f'_x(x,p)$ означает производную по переменной x, в предположении, что p — фиксированный параметр.

Стоит также отметить, что в русскоязычных математических текстах понятия “производная функции в точке” и “производная функция” часто обозначаются одним и тем же словом – “производная”, полагая, что из контекста понятно, о чем идет речь.

В английском языке, например, этой проблемы не существует, поскольку производная функции в точке это — *derivation*, а производная функция — *derivative.*

Очевидно, что использовать производные функции для нахождения значений производной функции в точке гораздо удобнее, чем пользоваться для этой цели определением 1.4. Но тогда возникает вопрос: как находить производные функции?

Ответ следующий – надо использовать:

1) таблицу производных для некоторого небольшого набора элементарных функций, полученных непосредственно при помощи определения 5.1.1, и
2) правила дифференцирования, которые позволяют выражать производные одних функций через производные других. Обоснование их справедливости, основанное на использовании определения 5.1.1 и свойств пределов функций, можно найти в полном курсе математического анализа.

$f(x)$	$f'(x)$
x^a	ax^{a-1}
e^x	e^x
$a^x, \quad a>0, a\neq 1$	$a^x \ln a$
$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a \lvert x\rvert, \quad a>0, a\neq 1$	$\dfrac{1}{x\ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

(Таблица 5.2.1)

Первая из этих таблиц имеет вид (5.2.1), но поскольку очевидно, что этой таблицы недостаточно, чтобы получать производные *любых* функций, задаваемых формулами, то следует использовать также и таблицу, описывающую *правила выражения производных одних функций, через производные других,*

1°	$(\ f(x)+g(x)\ )' = f'(x)+g'(x)$
2°	$(\ C\cdot f(x)\ )' = C\cdot f'(x)$, где C – const
3°	$(\ f(x)\cdot g(x)\ )' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
4°	$(\ f(g(x))\ )'_x = f'_g(g)\cdot g'_x(x)$

(Таблица 5.2.2)

Проиллюстрируем использование таблиц 5.2.1 и 5.2.2 на следующих примерах.

`Пример` 5.2.1. Пусть требуется найти производные функции от

$$y=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}+1}{x}\ ,\quad y=\frac{\sin x}{x}\quad \text{и}\quad y=e^{\arccos x}.$$

Решение.

1) Сравнение правил 1° и 3° таблицы 5.2.2 убеждает, что легче дифференцировать сумму функций, чем произведение, поэтому вначале выполним почленное деление, то есть будем искать производную функции

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}+1}{x}\right)'=\left(x^{-\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{2}}+x^{-1}\right)'\ =$$

а, используя первые формулы таблиц 5.2.1 и 5.2.2, получаем

$$=-\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{4}{3}}-\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}-x^{-2}=-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}\ .$$

2) В таблице 5.2.2 нет формулы для дифференцирования дроби (хотя во многих учебниках Вы ее можете встретить), поэтому сначала преобразуем данную функцию в произведение, и лишь потом применим правило 3° таблицы 5.2.2

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\left((\sin x)\cdot(x^{-1})\right)'\ =\ (\sin x)'\cdot(x^{-1})+(\sin x)\cdot(x^{-1})'\ =$$

$$= \ (\cos x) \cdot x^{-1} + (\sin x) \cdot (-x^{-2}) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \ .$$

3) Вначале заметим, что (см. §1.1 п.7°)

$$g(x) = \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \ ,$$

и потому, согласно первому правилу таблицы 5.2.2 и предпоследней строке таблицы 5.2.1,

$$g'_x(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ .$$

Тогда,

$$y'_x = \left(e^{\arccos x}\right)'_x = \left(e^{g(x)}\right)'_x = \left(e^g\right)'_g \cdot g'_x(x) =$$

$$= e^g \cdot g'_x(x) = e^g \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} \ .$$

В заключение данного параграфа отметим, что в процессе исследования свойств функции иногда оказывается необходимым использование характеристики, показывающей *скорость изменения величины производной функции* в окрестности точки x_0. Эта характеристика называется *производной второго порядка* или, просто, *второй производной.* Ее принято обозначать как

$$y''_{x=x_0} \ ; \qquad \left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x=x_0} \ ; \qquad y''(x)|_{x=x_0} \ ,$$

а поиск значения этой числовой характеристики сводится к вычислению предела вида

$$f''(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f'(x_0+t) - f'(x_0)}{t} \ . \qquad (5.2.1)$$

Поскольку вторые производные функции в точке (как пределы функции) определены однозначно, то можно задать новую функцию, значениями которой являются числа, получаемые по формуле (5.2.1). Эту функцию (производную от производной) называют *второй производной функцией от функции* $y = f(x)$. Для ее нахождения следует использовать те же правила, что и для первой производной функции. Например, если $y = \ln|x|$, то, согласно таблице 5.2.1, $y' = \frac{1}{x}$, а, в свою очередь, производная функция от $\frac{1}{x} = x^{-1}$ по той же таблице 5.2.1 равна $(-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$. То есть, $(\ln|x|)'' = -\frac{1}{x^2}$.

Геометрический смысл второй производной будет разъяснен в §5.4.

Производная функция

Поиск значений производных функций в точках (непосредственно по определению 1.4) в большинстве случаев является сложной задачей, требующей для своего решения значительных затрат вычислительных усилий. На практике оказывается удобнее применять иной подход, основанный на следующих соображениях.

Используемый в определении 1.4 предельный переход осуществляется по вспомогательной переменной t, в то время как, значение x_0 — аргумента функции $f(x)$, для которого ищется производная в точке, является *фиксированным числовым параметром.*

Если изменить x_0, то значение предела (1.4), вообще говоря, изменится. Однако для каждого конкретного x_0 оно *одно,* поскольку *если предел существует, то он единственен.*

Поэтому определение 1.4 можно рассматривать как правило, по которому значению x_0 ставится в соответствие единственное число $f'(x_0)$, и можно сказать, что таким образом задана некоторая *новая функция,* значение которой в точке x_0 равно $f'(x_0)$.

Эта функция называется *производной функцией от* $y = f(x)$ и обозначается как $f'(x)$, операцию поиска $f'(x)$ называют *дифференцированием.* В случае, когда для $f(x)$ существует $f'(x)$, говорят также, что функция $f(x)$ *дифференцируемая.*

Функцию $y = F(x)$ такую, что $F'(x) = f(x)$, называют *первообразной для* $y = f(x)$. Операция, *обратная* к дифференцированию, то есть, операция нахождения первообразной для $y = f(x)$ называется *интегрированием.*

Например, воспользовавшись решением задачи 1.5, можно утверждать, что функция, производная от $y = x^3$, есть $y = 3x^2$, поскольку использованный метод решения этой задачи годится для *любого* x_0.

Производные функции принято обозначать одним из следующих символов

$$y'_x\ ; \qquad \frac{dy}{dx}\ ; \qquad y'(x)\ .$$

В тех случаях, когда функция зависит более чем от одной переменной, идентификатор переменной, по которой берется производная, указывается явно в виде нижнего индекса.

Например, для функции $f(x,p)$ — зависящей от x и p, запись $f'_x(x,p)$ означает производную по переменной x, в предположении, что p — фиксированный параметр. Такие производные для функций, зависящих от многих переменных, принято называть *частными производными* и использовать для них специальное обозначение $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Стоит также отметить, что в русскоязычных математических текстах такие принципиально различные математические объекты, как:

«производная функции в точке», которая есть *число* и

«производная функция», являющаяся функцией,

часто именуются одним и тем же словом — “производная”, полагая, что из контекста понятно, о чем идет речь.

В английском языке, например, этой проблемы не существует, поскольку производная функции в точке — это *derivation*, а производная функция — *derivative*.

Очевидно, что использование производных функций для нахождения значений производной функции в точке гораздо удобнее, чем определение 1.4. Но тогда возникает вопрос: как находить производные функции?

Ответ на этот вопрос следующий:

надо воспользоваться информацией, содержащейся в следующих двух таблицах:

1) в таблице *производных функций*, содержащей формулы производных для некоторого небольшого набора элементарных функций, полученных непосредственно при помощи определения 1.4 и
2) в таблице *правил дифференцирования*, которые позволяют выражать производные от одних функций через производные от других. Обоснование справедливости этих правил, основанное на использовании определения 1.4 и свойств пределов функций, обычно приводится в полном курсе математического анализа.

Первая из этих таблиц, называемая обычно «Табличные производные» может иметь, например, такой вид

$f(x)$	$f'(x)$
x^a	ax^{a-1}
e^x	e^x
$a^x, \quad a>0, a\neq 1$	$a^x \ln a$
$\ln\|x\|$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a \|x\|, \quad a>0, a\neq 1$	$\dfrac{1}{x\ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

Таблица 2.1

Вторую таблицу, называемую «Правила дифференцирования», удобно записать в следующем виде

1°	$(\ f(x)+g(x)\ )'=f'(x)+g'(x)$
2°	$(\ C\cdot f(x)\ )'=C\cdot f'(x)$, где C – const
3°	$(\ f(x)\cdot g(x)\ )'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
4°	$(\ f(\,g(x)\,)\ )'_x=f'_g(\,g(x)\,)\cdot g'_x(x)$

Таблица 2.2

В таблицах 2.1 и 2.2 по умолчанию предполагается, что все производные, использованные для записи этих формул, существуют.

Использование таблиц 2.1 и .2.2 проиллюстрируем следующими примерами.

Пример 2.1. Пусть требуется найти производные функции для

$$1)\ y = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + 1}{x}, \qquad 2)\ y = \frac{\sin x}{x} \qquad \text{и} \qquad 3)\ y = e^{\arccos x}.$$

Решение.

1) Сравнение правил 1° и 3° таблицы 2.2 показыает, что сумму функций дифференцировать проще, чем произведение, поэтому вначале выполним почленное деление, то есть будем искать производную от функции

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + 1}{x}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1}\right)' =$$

и, используя первые формулы таблиц 2.1 и 2.2, получаем

$$= -\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} - x^{-2} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\,.$$

2) В таблице 2.2 нет формулы для дифференцирования дроби (хотя во многих учебниках ее можно встретить), поэтому сначала преобразуем данную функцию в произведение, и лишь потом применим правило 3° таблицы 2.2

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \big((\sin x)\cdot(x^{-1})\big)' = (\sin x)'\cdot(x^{-1}) + (\sin x)\cdot(x^{-1})' =$$

$$= (\cos x)\cdot x^{-1} + (\sin x)\cdot(-x^{-2}) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} = \frac{ex\cos x - \sin x}{ex^2}\,.$$

3) Вначале вспомним, что $g(x) = \arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$, откуда, согласно первому правилу таблицы 2.2 и предпоследней строке таблицы 2.1,

$$g'_x(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Тогда,

$$y'_x = \left(e^{\arccos x}\right)'_x = \left(e^{g(x)}\right)'_x = \left(e^{g}\right)'_g \cdot g'_x(x) =$$

$$= e^g \cdot g'_x(x) = e^g \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

В заключение данного раздела кратко рассмотрим еще два математических объекта, связанные с понятием производной функцией.

Во-первых, в процессе исследования свойств функции иногда оказывается необходимо рассмотреть характеристику, оценивающую скорость изменения величины *производной функции в окрестности точки* x_0.

Эта характеристика называется *производной второго порядка* или, просто, *второй производной.* Ее принято обозначать как

$$y''_{x=x_0} \qquad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0} ; \qquad y''(x)\big|_{x=x_0} ,$$

а поиск значения этой числовой характеристики сводится к вычислению предела вида

$$f''(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f'(x_0+t) - f'(x_0)}{t} \, . \tag{2.1}$$

Поскольку вторые производные функции в точке (как пределы функции) определены однозначно, то можно задать еще одну функцию, значениями которой являются числа, задаваемые формулой (2.1).

Для нахождения второй производной следует использовать те же правила, что и при вычислении первой.

Например, для функции $y = \ln|x|$, согласно таблице 2.1, $y' = \dfrac{1}{x}$, и, в свою очередь, вторая производная от функции $y = \ln|x|$ равна $y'' = (-1)x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}\,.$

То есть, $(\ln|x|)'' = -\dfrac{1}{x^2}\,.$

Другой математический объект, связанный с производной функцией, который часто используется в приложениях носит название *первого дифференциала* или, просто, *дифференциала*.

Дифференциалом функции $y = f(x)$, имеющей производную в точке x_0, называется функция df, зависящая от двух переменных x_0 и dx, вида

$$df(x_0, dx) = f'(x_0) \cdot dx.$$

Обратите внимание, что здесь как dx , так и df являются не произведениями, а обозначениями (символами) переменных величин.

По определению дифференциала его значение прямо пропорционально зависит от dx, в то время как его зависимость от x_0 может быть и нелинейной.

Основное свойство дифференциала описывает формула

$$f(x_0 + dx) - f(x_0) = df(x_0, dx) + r(x_0, dx), \tag{2.2}$$

в которой для остаточного члена $r(x_0, dx)$ справедливо равенство (являющееся утверждением теоремы!)

$$\lim_{dx \to 0} \frac{r(x_0, dx)}{df(x_0, dx)} = 0\,.$$

Это означает, что в качестве *оценки* разности $f(x_0 + dx) - f(x_0)$ для, дифференцируемой в точке x_0, функции $f(x)$ можно использовать величину $f'(x_0) \cdot dx$ и погрешность этой оценки будет тем меньше, чем меньше $|dx|$.