Последовательности и их пределы

Числовые последовательности

Будем говорить, что задана *числовая последовательность*, если указано правило, согласно которому *каждому* натуральному числу (номеру) n поставлено в соответствие *единственное* число x_n, называемое значением n-го члена последовательности.

Числовую последовательность принято обозначать как $\{x_n\}$.

Согласно этому определению числовая последовательность может быть представлена как *функция натурального ряда чисел,* то есть как функция, областью определения которой является множество всех натуральных чисел.

Заметим, что аргумент формулы, задающей последовательность, может не являться номером члена последовательности. Например, для последовательности $\{x_k\} = \dfrac{1}{k-1} \ \forall k \geq 2$ номером является не k, а $n = k - 1$.

Числовую последовательность можно задавать различными способами.

1) *Перечислением значений ее членов.* Например, последовательность $\{x_n\}$, у которой все члены с четными номерами равны единице, а все члены с нечетными -1, может быть записана в виде $\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots\}$

2) *Функциональным правилом,* которое для каждого члена последовательности позволяет однозначно определить его значение по его номеру. Например, для рассмотренной в 1) последовательности, таким правилом могут быть формулы

$$x_n = (-1)^n \qquad \text{или} \qquad x_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \ , \quad n = 1, 2, \ldots$$

3) *Рекуррентным правилом,* по которому значение каждого члена последовательности может быть однозначно определено по значению одного или нескольких предыдущих членов. Например, для рассмотренной в 1) последовательности, таким правилом могут служить соотношения

$$x_{n+1} = (-1) \cdot x_n \ , \qquad x_1 = -1 \ , \qquad n = 1, 2, \ldots$$

   Другим примером рекуррентно заданных последовательностей являются арифметическая и геометрическая прогрессии.

В качестве упражнения предложите различные способы описания числовой последовательности, у которой члены с нечетными номерами равны единице, а с четными — равны нулю.

Наконец, заметим, что иногда члены числовой последовательности выражаются через члены другой. Примерами здесь служат

1) $\{S_n\}$ — последовательность *частичных сумм* последовательности $\{a_k\}$, для которой $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$.
2) $\{b_n\}$ — *подпоследовательность* последовательности $\{a_k\}$, где $b_n = \{a_{k_n}\}$, а $\{k_n\}$ последовательность натуральных чисел, для которой $k_n < k_{n+1} \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

Классификация числовых последовательностей

Числовые последовательности принято различать по множеству значений их членов. Например,

– последовательность, все члены которой имеют значение одного знака называется *знакопостоянной*.
– последовательность, все члены которой имеют значение, не превосходящего по модулю некоторого фиксированного числа, называется *ограниченной*.

Заметим, что определение ограниченной последовательности удобно давать, используя логические символы. Например, последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если

$$\exists C \geq 0 : \forall n : |x_n| \leq C \,,$$

то есть, найдется неотрицательное число C такое, что для любого номера n будет выполнено неравенство $|x_n| \leq C$. Если последнее неравенство имеет вид $x_n \leq C$ (или $x_n \geq C$), то говорят об *ограниченной сверху* (или, соответственно, *ограниченной снизу*) числовой последовательности.

Сформулируем теперь определение *неограниченной* числовой последовательности, имея в виду, что *отрицание* некоторого определения должно строиться с соблюдением правил формальной логики.

Например, формулировка «не существует число C такое, что ...» не является ошибочной, но для определения она не подходит, ибо нельзя убедиться в том, что это число *не существует* (полный перебор физически не возможен!).

Конструктивным вариантом определения неограниченной последовательности может служить, скажем, следующее: последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной*, если

$$\forall C \geq 0 : \exists N_C : |x_{N_C}| > C \, ,$$

то есть, для каждого неотрицательного числа C найдется номер N_C такой, что будет выполнено неравенство $|x_{N_C}| > C$.

Числовые последовательности также можно различать по характеру изменения значений их членов при изменении номера. Например,

— последовательность, в которой изменение номера на 1 меняет знак ее члена на противоположный, называется *знакопеременной,*

— последовательность, для которой при любом n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$ называется *монотонно возрастающей,* а в случае выполнения неравенства $x_{n+1} < x_n$ — *монотонно убывающей.*

Поясним данные определения следующими примерами.

Пример 1.1. 1) Числовая последовательность $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ является ограниченной, поскольку $\forall n: \quad 0 \le x_n < 1$. Кроме того, она будет монотонно возрастающей в силу неравенства

$$x_{n+1} - x_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \qquad \forall n.$$

2) Числовая последовательность $x_n = n^{(-1)^n}$, для которой

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = \frac{1}{3},\ x_4 = 4,\ x_5 = \frac{1}{5},\ x_6 = 6,\ \ldots,$$

ограничена снизу (числом ноль), не ограничена сверху и не является ни монотонно возрастающей, ни монотонно убывающей.

Предел числовой последовательности и его свойства

Как следует из определения числовой последовательности, для ее описания необходимо указать правило, которое позволяет находить значения членов последовательности по их номерам.

Помимо этого числовая последовательность может иметь количественную характеристику, связанную не с конкретными ее членами, а со всей последовательностью целиком.

Эта характеристика называется *пределом числовой последовательности* и определяется следующим образом.

Определение 1.1. Число A называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, если *для любого* положительного числа ε *существует* номер N_ε такой, что *для всех* членов последовательности с номерами $n \geq N_\varepsilon$ выполнено неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$.

Тот факт, что число A является пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, символически записывается в виде $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Иногда также используется обозначение $\{x_n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$.

Число A может как входить, так и не входить во множество значений последовательности.

Вообще говоря, не всякая числовая последовательность имеет предел.

Определение *отсутствия предела* у последовательности $\{x_n\}$ должно формулироваться в виде проверяемого условия, например как

Определение 1.2. Число A *не является пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, если *существует* положительное число ε_0 такое, что *для любого* номера N *найдется* член данной последовательности с номером $n_0 \geq N$, для которого будет выполнено неравенство $|x_{n_0} - A| \geq \varepsilon_0$.

Последовательности, имеющие своим пределом число 0 (то есть, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$), принято называть *бесконечно малыми.*

А последовательности, члены которых (начиная с определенного номера) принимают значения по модулю большие, чем любое наперед заданное число, значения называются *бесконечно большими* .

Определение 1.3. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ имеет своим пределом ∞, если

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ такое, что } \forall n \geq N_\varepsilon \longrightarrow \Big|x_n\Big| > \varepsilon\,.$$

Данный факт обозначается как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Аналогично можно определить пределы вида $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$. Например, равенство $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ означает, что

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ такое, что } \forall n \geq N_\varepsilon \longrightarrow x_n < -\varepsilon\,.$$

Иначе говоря, последовательности, имеющие своим пределом ∞, бесконечно большие. При этом следует отличать бесконечно большие последовательности от неограниченных последовательностей, не имеющих никакого предела.

Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она называется *сходящейся,* иначе — *расходящейся.*

Примером расходящейся может служить последовательность $x_n = (-1)^n$, то есть $\{-1,\ 1, -1,\ 1, -1,\ 1, \ldots\}$, а примером бесконечно большой — последовательность $x_n = n$.

Пример 1.2. Числовая последовательность $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$, для которой $x_n = \frac{1}{n}$, имеет предел, равный нулю. То есть, $A = 0$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Докажем это, использовав определение 1.1. Заметим во-первых, что данная числовая последовательность является монотонно убывающей, поскольку для любого номера n справедливо неравенство $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, то есть $x_n > x_{n+1}$. С другой стороны,

$$|\, x_n - A\,| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}.$$

Следовательно, для любого заданного положительного числа ε можно выбрать номер [1]

$$N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1, \tag{1.1}$$

для которого $\dfrac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$ и $|\,x_{N_\varepsilon} - 0\,| = \left|\dfrac{1}{N_\varepsilon} - 0\right| = \dfrac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$. Но тогда, в силу монотонного убывания рассматриваемой последовательности, *для всех* номеров $n \geq N$ также будет верным неравенство

$$|x_n - 0\,| = \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \forall n \geq N_\varepsilon .$$

Значит $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, то есть, число 0 является пределом числовой последовательности $x_n = \dfrac{1}{n}$.

[1] Здесь $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ обозначает целую часть дроби $\dfrac{1}{\varepsilon}$.

`Пример` 1.3. Числовая последовательность с $x_n = (-1)^{n+1}$, не имеет предела.

Докажем это, использовав определение 1.1. Предположим, что A есть предел данной последовательности.

Для сходимости необходимо, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} |\, x_n - A\,| & < \varepsilon, \\ |\, x_{n+1} - A\,| & < \varepsilon. \end{array} \right.$$

Возьмем в качестве n некоторое четное натуральное число и $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Тогда необходимое условие сходимости примет вид

$$\left\{ \begin{array}{lcl} |\,1 - A\,| & < & \dfrac{1}{2}, \\ |\,-1 - A\,| & < & \dfrac{1}{2}. \end{array} \right.$$

или

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\dfrac{1}{2} \ < & 1 - A & < \dfrac{1}{2}, \\ -\dfrac{1}{2} \ < & 1 + A & < \dfrac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Если сложить эти неравенства почленно, то мы получим неверное следствие вида $-1 < 2 < 1$. Значит такого числа A не существует и последовательность предела не имеет.

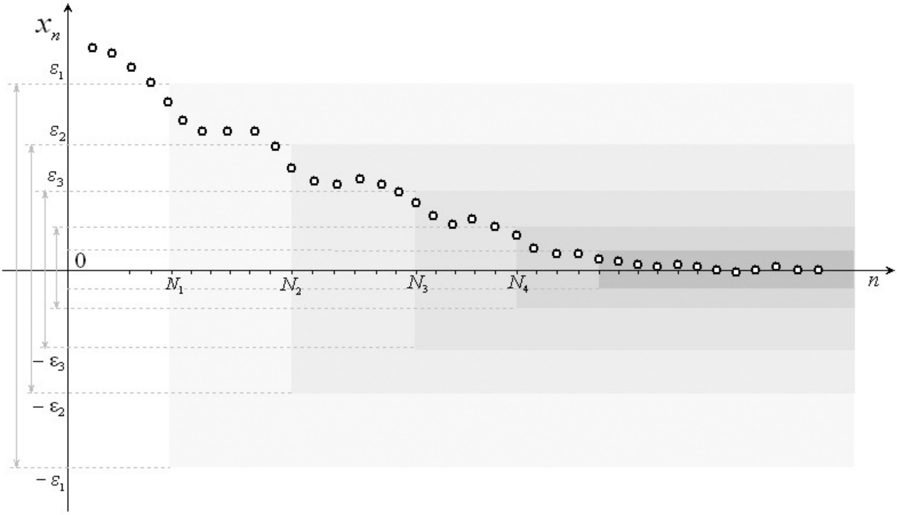

Рис. 1. Пример графика числовой последовательности с нулевым пределом.

Определение 1.1 можно интерпретировать как описание «игры», в которой один «игрок» задает *произвольное* (сколь угодное малое) положительное число ε, а его «противник» — второй игрок, по значению этого числа подбирает (или просто угадывает) номер N такой, что *для всех* членов последовательности с номерами $n \geq N$ их значения принадлежат интервалу $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ (см. рис. 1, иллюстрирующий случай с $A = 0$) или, что то же самое, удовлетворяют условию $A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$, которое равносильно неравенству $|x_n - A| < \varepsilon$.

Если «победителем» в этой игре оказывается второй игрок, то число A является пределом числовой последовательности $\{x_n\}$.

Стоит отметить, что правило выбора номера N (согласно определению 1.1) может быть различным при разных ε, на что указывает нижний индекс у искомого номера в формуле (1.1). Это обстоятельство облегчает «игру на победу второму игроку».

С другой стороны, с точки зрения формальной логики тот факт, что «второму игроку» не удается по предложенному ему ε найти значение N с требуемым свойством, еще не означает, что предела у данной последовательности нет (может, этот «игрок» просто плохой).

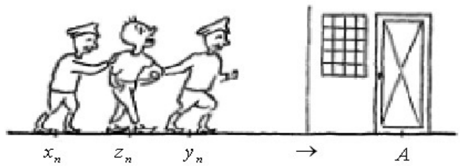

Рис. 2. Теорема “о двух милиционерах”.

Отметим основные, полезные для решения практических задач, свойства пределов числовых последовательностей. Пусть все, использованные в записях 1°–6°, последовательности сходящиеся и C – некоторая константа, тогда

1°. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2°. $\lim\limits_{n\to\infty}(C \cdot x_n) = C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

3°. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

4°. Если, кроме того,

$$y_n \neq 0 \ \forall n \ \text{ и } \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0, \text{ то } \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} .$$

5°. Если последовательность монотонно возрастает (убывает) и ограничена сверху (снизу), то она имеет предел.

6°. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$ и $\forall n \quad x_n \geq z_n \geq y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$.

Обратите внимание, что свойство 5°, являющееся *достаточным* условием существования предела, позволяет делать заключение о сходимости последовательности, *не находя значения ее предела.*

Например, числовая последовательность, значения которой равны периметру правильного вписанного в окружность радиусом R многоугольника, при неограниченном удвоении числа его сторон, имеет предел, поскольку геометрически очевидно, что она монотонно возрастающая (в силу правила «треугольника») и ограничена сверху, скажем, периметром, описанного около той же окружности, квадрата. Значение предела этой последовательности принимается (по определению!) за *длину окружности,* которое обозначается как $2\pi R$.

В заключение стоит также заметить, что студенческий фольклёр называет свойство 6° теоремой «о двух милиционерах» (рис. 2).

Определение 1.1. неудобно тем, что для его для практического использования необходимо знать A.

Данное затруднение позволяет преодолевать следующее понятие:

Определение 1.4. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ *фундаментальна*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{такое, что}$$

$$\forall n \geq N_\varepsilon \text{ и } p \in \mathbb{N} \longrightarrow \Big| x_{n+p} - x_n \Big| < \varepsilon \, .$$

Оказывается справедливым важное утверждение (*Критерий Коши*):

Последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Для практики также оказывается полезным и отрицание фундаментальности:

Определение 1.5. Последовательность $\{x_n\}$ не является *фундаментальной*, если

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \; : \;\; \forall N \in \mathbb{N} \quad \text{такое, что}$$

$$\forall n_0 \geq N_\varepsilon \text{ и } p_0 \in \mathbb{N} \longrightarrow \Big| x_{n_0+p_0} - x_{n_0} \Big| < \varepsilon_0 \, .$$

Пример 1.4 Доказать сходимость последовательности $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Решение: Воспользуемся верной при $m > 1$ оценкой

$$\frac{1}{m^2} < \frac{1}{(m-1)m} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}.$$

Получим

$$\left| x_{n+p} - x_n \right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} <$$

$$< \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Повторяя дословно рассуждения примера 1.2, получаем, что для выполнения неравенства $\frac{1}{n} < \varepsilon \ \ \forall n > N_\varepsilon$, достаточно, чтобы

$$N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1.$$

Это доказывает фундаментальность, а, значит, и сходимость последовательности $\{x_n\}$.

Замечание: позднее, в курсе гармонического анализа будет показано, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{\pi^2}{6}$.

Пример 1.5 Доказать, что последовательность, называемая в математике *гармоническим рядом*, вида $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ расходится.

Решение: Воспользуемся отрицанием критерия Коши. Имеем оценку

$$\left| x_{n+p} - x_n \right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p-1} + \frac{1}{n+p} >$$

$$> \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \ldots + \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}.$$

$\forall N \in \mathbb{N}$ мы можем взять $n_0 = N \geq N$ и $p_0 = N$, при которых $\frac{p_0}{2n_0} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0$.

Это доказывает нефундаментальность, а, значит, и расходимость последовательности $\{x_n\}$.

Пусть $\{y_k\}$, где $y_k = x_{n_k}$ есть некоторая сходящаяся подпоследовательность числовой последовательности $\{x_n\}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ называется *частичным пределом* последовательности $\{x_n\}$. В кванторах это определение можно записать так:

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{такое, что} \quad \forall k \geq N_\varepsilon \;\longrightarrow\; \Big| x_{n_k} - A \Big| < \varepsilon\,.$$

Для подпоследовательностей справедливы следующие утверждения.

1) Если для последовательности $\{x_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то ее любая подпоследовательность имеет своим пределом A.

2) (Теорема *Больцано-Вейерштрасса.*) Если последовательностm $\{x_n\}$ ограничена, то из нее всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Из утверждения 1) следует, что если последовательность имеет хотя бы два *различных* частичных предела, то она расходится.

Проиллюстрируем этот факт исследованием на сходимость последовательности с общим членом $x_n = \sin n$.

Рассмотрим последовательность отрезков на вещественной оси вида $\left\{ \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \right] \right\} \quad k \in \mathbb{N}$. Длина каждого из них больше чем 1, и потому этот отрезок содержит хотя бы одно натуральное число. Кроме того, данные отрезки не имеют общих точек.

Возьмем из каждого таких отрезков по одному натуральному числу n_k и построим с их помощью подпоследовательность x_{n_k}. При этом очевидно, что $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x_{n_k} \leq 1$.

Поскольку эта последовательность ограничена, то у нее есть частичный предел A, для которого $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq A \leq 1$.

Рассмотрим теперь другую последовательность отрезков вида $\left\{ \left[\frac{5\pi}{4} + 2\pi m,\ \frac{7\pi}{4} + 2\pi m \right] \right\} \quad m \in \mathbb{N}$. Рассуждая аналогично, получаем подпоследовательность x_{n_m}, у которой есть частичный предел B и при этом $-1 \leq B \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Таким образом мы установили, что последовательность x_n имеет по крайней мере два различных частичных предела, и потому она расходится.

Используя свойства пределов последовательностей, можно получить некоторые, полезные для решения задач, соотношения.

Пример 1.6 Доказать, что при $a > 1$

$$\begin{array}{lcl} 1)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} & = & 1, \\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} & = & 1, \\ 3)\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} & = & 0, \\ 4)\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} & = & 0. \end{array}$$

Решение. 1) Рассмотрим последовательность $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$. Все ее члены положительны и для них верно $a = (1 + x_n)^n \geq n x_n$. Последнее неравенство является *неравенством Бернулли*, которое вытекает из формулы бинома Ньютона.
Поэтому

$$0 < x_n \leq \frac{a}{n} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} (1 + x_n) = 1.$$

2) Все члены последовательности $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$ неотрицательны, в силу этого будет верно $n = (1 + x_n)^n \geq \dfrac{n(n-1)}{2} x_n^2$, что вытекает опять-таки из формулы бинома Ньютона. Действительно, имеем

$$n = (1 + x_n)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x_n^k \geq C_n^2 x_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x_n^2 ,$$

если в биномиальной сумме, состоящей из положительных слагаемых, оставить только член с $k = 2$.

А поскольку при $n \geq 2$ будет верно $n - 1 \geq \dfrac{n}{2}$, то имеем $4n \geq n^2 x_n^2$. Откуда

$$0 \leq x_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + x_n) = 1.$$

3) В силу $a > 1$ все члены последовательности

$$x_n = a^n = (1 + a - 1)^n$$

положительны и для них как и в 2) верно при $n \geq 2$

$$x_n \geq \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 \geq \frac{n^2}{4}(a-1)^2.$$

Поэтому имеем $4n \geq n^2(a-1)^2$ и тогда

$$0 \leq \frac{n}{a^n} \leq \frac{4}{\sqrt{n}}(a-1)^2 \qquad \longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 0\,.$$

4) Докажите это равенство самостоятельно, использовав предел 3) и утверждение, что $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ неравенство $\dfrac{\ln n}{n} < \varepsilon$ равносильно неравенству $n < (e^{\varepsilon})^n$.

В завершение обсуждения понятия подпоследовательности отметим, что у ограниченной последовательности может быть бесконечно много частичных пределов.

Например, известно, что множество рациональных чисел на отрезке $[0, 1]$ счетно, а потому из них можно сформировать числовую последовательность. С другой стороны, на этом отрезке имеется несчетное множество вещественных чисел, в любой окрестности каждого из которых есть бесконечно много рациональных чисел.

То есть, каждое вещественное число на данном отрезке есть частичный предел построенной последовательности рациональных чисел.

Нахождение пределов числовых последовательностей

Поиск значения предела числовых последовательностей, основанный лишь на его определении может оказаться весьма сложной вычислительной процедурой.

На практике оказывается гораздо удобнее использовать *свойства пределов* последовательностей в сочетании с некоторым небольшим набором, найденных заранее, пределов.

В рамках настоящего курса окажется достаточным сочетание набора свойств 1°—6° предыдущего параграфа и трех следующих пределов:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \; ; \qquad \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \sin\frac{1}{n} \right) = 1 \qquad \text{и} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \; .$$

Справедливость первого равенства была показана в примере 1.1.

Рассмотрим второе равенство, часто называемое *первым замечательным пределом.*

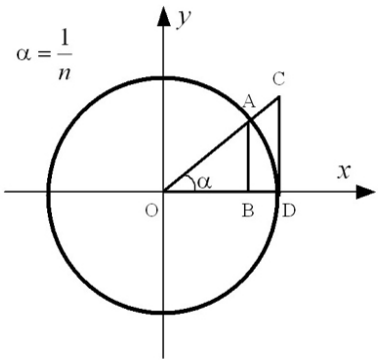

Рис. 3. К доказательству равенства $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\sin\dfrac{1}{n}\right)=1.$

На тригонометрическом круге единичного радиуса отложим угол, величина которого (в радианной мере) равна $\alpha = \dfrac{1}{n}$ (рис. 3.3), и построим прямоугольные треугольники OAB и OCD.

Заметим при этом, что круговой сектор OAD, с одной стороны, содержит в себе треугольник OAB, а с другой – сам содержится в треугольнике OCD. Это означает, что для *площадей* этих трех фигур справедливы неравенства

$$S_{\triangle \mathrm{OAB}} \le S_{\cup \mathrm{OAD}} \le S_{\triangle \mathrm{OCD}} \ .$$

Поскольку $S_{\triangle \mathrm{OAB}} = \dfrac{1}{2} \cdot |\mathrm{OB}| \cdot |\mathrm{AB}|$, $\quad S_{\triangle \mathrm{OCD}} = \dfrac{1}{2} \cdot |\mathrm{OD}| \cdot |\mathrm{CD}|$, а площадь кругового сектора $S_{\cup \mathrm{OAD}} = \dfrac{1}{2} \cdot |\mathrm{OD}| \cdot \alpha$, то с учетом $|\mathrm{OD}| = 1$ приходим к неравенствам

$$\frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \quad \le \quad \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \alpha \quad \le \quad \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg}\alpha \ .$$

или

$$\frac{1}{2} \cdot \sin\frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n} \quad \le \quad \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} \quad \le \quad \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{n}$$

Далее преобразуя, получаем

$$\frac{1}{\sin\dfrac{1}{n}\cdot\cos\dfrac{1}{n}} \quad\geq\quad n \quad\geq\quad \frac{\cos\dfrac{1}{n}}{\sin\dfrac{1}{n}}.$$

Откуда, окончательно, следует, что

$$\frac{1}{\cos\dfrac{1}{n}} \quad\geq\quad n\cdot\sin\frac{1}{n} \quad\geq\quad \cos\frac{1}{n}.$$

Теперь можно воспользоваться свойствами пределов числовых последовательностей. Будем считать, что

$$x_n = \frac{1}{\cos\dfrac{1}{n}}\,; \quad z_n = n\cdot\sin\frac{1}{n}\,; \quad y_n = \cos\frac{1}{n}\,.$$

Тогда, в силу очевидного равенства $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{n} = 1$ и теоремы «о двух милиционерах» — свойства 6°, получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin\dfrac{1}{n} = 1$.

К необходимости вычисления последнего из указанных выше пределов $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ приводит задача «о добром банке и жадном вкладчике», имеющая следующую формулировку.

Некий «добрый» банк предлагает своим вкладчикам 100% годовых по срочным вкладам, с равномерным во времени начислением процентов по вкладу. [2] У одного из его клиентов к началу года имеется денежная сумма размером в один рубль, которую он хочет положить в банк до начала следующего года. Очевидный расчет показывает, что вкладчик получит в конце года сумму в рублях: свой вклад 1 руб плюс 100%, то есть еще 1 руб. Итак,

$$S_1 = 1 + 1 = 2\ .$$

Однако вкладчика этот итог кажется недостаточным и он рассуждает так: «если я положу свой рубль на первое полугодие, то 30 июня у меня будет $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)$ руб, которые я положу на оставшиеся полгода.» Тогда за год вкладчик будет иметь

$$S_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{4}.$$

[2] В жизни, конечно, никакой банк так никогда не делал и не делает.

Хотя эффект данной операции очевиден, «жадному» вкладчику и этого мало. Следующие его рассуждения таковы: « если я положу свой рубль на первые четыре месяца, то к 1 мая у меня будет на руках $\left(1+\dfrac{1}{3}\right)$ руб, которые я положу на следующие четыре месяца и получу 1 сентября

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)=\left(1+\frac{1}{3}\right)^2.$$

Эту сумму я вкладываю на оставшиеся четыре месяца и получаю в итоге

$$S_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)^2=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=2\frac{10}{27},$$

что больше, чем S_2. »

Нетрудно видеть, что, если весь год разделить на n равных периодов, то полученная сумма составит

$$S_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}+\frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Исследуем теперь свойства получившейся числовой последовательности $S_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Во-первых, покажем, что $\forall n : S_{n+1} > S_n$. Действительно,

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left[\frac{\dfrac{n+2}{n+1}}{\dfrac{n+1}{n}}\right]^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left[\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = \left[\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

и, согласно неравенству Бернулли,

$$= \left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) > \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Таким образом, $\dfrac{S_{n+1}}{S_n} > 1$ и последовательность S_n – *монотонно возрастающая*, то есть «шустрость» вкладчика оправдана.

Теперь убедимся, что, сколь угодно большой суммы вкладчик получить тем не менее не сможет. Выполним следующую оценку воспользовавшись формулой бинома Ньютона.

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1^n + n \cdot 1^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot 1^{n-2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot 1^{n-3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots \leq$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + + \frac{1}{2^3} + \ldots \leq$$

и, по формуле суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем

$$\leq 1 + \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2}} = 3.$$

Это означает, что последовательность $\{S_n\}$ *ограничена сверху* и как бы вкладчик не суетился, даже трех рублей ему получить не удастся.

Согласно свойству 5°, числовая последовательность монотонно возрастающая и ограниченная сверху имеет предел. Значит, $\{S_n\}$ сходится. Пределом числовой последовательности $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ является иррациональное (подобно π или $\sqrt{2}$) число, обозначаемое как e и равное приближенно $e \approx 2.718281828459045\cdots$. Иначе говоря,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Это равенство принято называть *вторым замечательным пределом.*

Заметим, что непосредственное применение свойства 3° при вычислении, например, первого замечательного предела невозможно, поскольку из двух последовательностей $x_n = n$ и $y_n = \sin\dfrac{1}{n}$ сходится только вторая. Ее предел равен 0, в то время как первая неограничено возрастает. Подобный случай принято называть неопределенностью вида «$0\cdot\infty$» и для нахождения предела потребовалось специальное исследование.

Аналогичные проблемы возникают для неопределенностей типа «$\dfrac{0}{0}$» , «$\dfrac{\infty}{\infty}$» , «$\infty-\infty$» , «1^∞» .

Второй замечательный предел является примером неопределенности последнего типа.

Преобразования формульной записи общего члена числовой последовательности в тех случаях, когда непосредственное использование свойств числовых последовательностей 1°—6° невозможно, принято называть методом «раскрытия неопределенностей.»

Рассмотрим следующие задачи.

Пример 1.6. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+2)^2}{5n^2+3}$.

Формула значения члена последовательности является дробью, однако использование свойства 4° невозможно, поскольку

$$\lim_{n\to\infty}(3n+2)^2=+\infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\left(5n^2+3\right)=+\infty\ .$$

То есть, мы имеем случай неопределенности вида "$\dfrac{\infty}{\infty}$" . Для ее «раскрытия» (до перехода к пределу!) преобразуем числитель по формуле «квадрат суммы двух чисел», а затем разделим как числитель, так и знаменатель на n^2 и в итоге получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)^2}{5n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+12n+4}{5n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{9+\dfrac{12}{n}+\dfrac{4}{n^2}}{5+\dfrac{3}{n^2}}.$$

Теперь, в силу $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, очевидно, что пределы числителя и знаменателя существуют, и можно воспользоваться свойствами 4°, 2° и 1° .

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9+\dfrac{12}{n}+\dfrac{4}{n^2}}{5+\dfrac{3}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(9+\dfrac{12}{n}+\dfrac{4}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\dfrac{3}{n^2}\right)}=\frac{9+12\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+4\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{5+3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}=\frac{9}{5}.$$

Пример 1.7. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n}-2n\right)$.

Формула общего члена последовательности $a_n = \sqrt{4n^2+3n}-2n$ представляет собой разность двух выражений, однако использовать свойство 1° мы не можем, поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{4n^2+3n}=+\infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}2n=+\infty$$

и мы имеем дело с неопределенностью вида «$\infty-\infty$». Для ее «раскрытия»', не переходя пока еще к пределу, умножим и одновременно разделим эту разность на сумму $\sqrt{4n^2+3}+2n$, с последующим использованием формулы $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n}-2n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+3n}-2n)(\sqrt{4n^2+3n}+2n)}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n^2+3n)-4n^2}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}.$$

Полученный предел есть неопределенность вида «$\dfrac{\infty}{\infty}$», «раскрыть»' которую можно делением числителя и знаменателя на n.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}=3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\dfrac{3}{n}}+2}=\frac{3}{4}\,,$$

поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{4+\dfrac{3}{n}}=2$.

Действительно, с одной стороны, $\sqrt{4+\dfrac{3}{n}}\geq 2$, но, с другой

$$\sqrt{4+\frac{3}{n}}=\sqrt{4+2\cdot 2\cdot\frac{3}{4n}+\frac{9}{16n^2}-\frac{9}{16n^2}}=$$

$$=\sqrt{\left(2+\frac{3}{4n}\right)^2-\frac{9}{16n^2}}\leq\sqrt{\left(2+\frac{3}{4n}\right)^2}=2+\frac{3}{4n}.$$

То есть,

$$2\leq\sqrt{4+\frac{3}{n}}\leq 2+\frac{3}{4n}\,,$$

и на основании теоремы "о двух милиционерах", приходим к заключению о том, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{4+\dfrac{3}{n}}=2$.

Пример 1.8. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{3n}$.

Здесь мы имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n+1}=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}3n=\infty$, то есть неопределенность вида «1^{∞}». Чтобы «раскрыть» ее, преобразуем выражение под знаком предела следующим образом.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{3n}=\lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k-1}\right]^{3}=$$

где $\quad k=n+1 \quad$ и $\quad n=k-1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty}k=\infty$

$$=\left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{3}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-3}=e^{3}\cdot 1=e^{3}.$$

Пример 1.9. Найти предел последовательности, заданной в следующей рекуррентной форме

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}\,.$$

Решение. Все члены данной последовательности очевидно неотрицательны.

Заметим, что, если $x_n < 3$, то и $x_{n+1} < 3$. Но, поскольку $x_1 = 1 < 3$, то и все члены последовательности не превосходят 3. То есть, последовательность ограничена сверху.

С другой стороны, имеем оценку

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n + 6} - x_n = \frac{x_n + 6 - x_n^2}{\sqrt{x_n + 6} + x_n} > 0 \text{ при } x_n < 3.$$

Значит, данная последовательность монотонно возрастает. И по свойству 5° она сходится.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Тогда из

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = A$$

и условия задачи имеем $A^2 = A + 6$. Откуда следует, что $A = 3$.