Производная функции в точке

Значение функции и ее предел суть локальные числовые характеристики, позволяющие количественно описывать функцию как в некоторой точке, так и в малой ее окрестности. Однако этих характеристик оказывается недостаточно, когда требуется оценить не только сами значения функции, но и относительную скорость их изменения. Для такой оценки используется специальная количественная характеристика функции – *производная функции в точке.* Дадим ее определение.

Определение 3.1. *Производной функции в точке* называется число, равное пределу отношения величины приращения значения функции к величине приращения ее аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Символически это определение означает: для функции $y = f(x)$ ее производная в точке x_0, обозначаемая как $f'(x_0)$ или $y'_x(x_0)$, равна

$$f'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} \,. \tag{3.1}$$

Действительно, если значение аргумента было x_0 , а стало $x_0 + t$, то его приращение очевидно равно $(x_0 + t) - x_0 = t$. Аналогично, если значение функции было $f(x_0)$, а стало $f(x_0+t)$, то ее соответствующее приращение составляет $f(x_0 + t) - f(x_0)$.

Из данного определения следует, что функция $y = f(x)$ должна иметь значения в некоторой окрестности точки x_0 , а также быть *непрерывной* в точке x_0. Последнее условие необходимо (но не достаточно!) для существования производной функции в точке, поскольку лишь для непрерывной функции предел приращения значения функции равен нулю при стремлении к нулю приращения аргумента.

Однако, даже для непрерывной функции предел (3.1) является неопределенностью вида “$\frac{0}{0}$”, то есть заключение о существовании (или не существовании) производной в точке можно делать лишь после “раскрытия” этой неопределенности.

Поясним определение 3.1 следующими примерами.

Пример 3.1. Найти производную функции $y = x^3$ в точке $x_0 = 2$.

Вначале решим эту задачу для произвольной фиксированной точки x_0 . Пусть приращение аргумента в точке x_0 равно t, найдем соответствующее приращение значения данной функции, использовав формулу «куб суммы двух чисел»,

$$f(x_0 + t) - f(x_0) =$$

$$= (x_0 + t)^3 - x_0^3 = \left(x_0^3 + 3x_0^2 t + 3x_0 t^2 + t^3\right) - x_0^3 = 3x_0^2 t + 3x_0 t^2 + t^3 \ .$$

Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{3x_0^2 t + 3x_0 t^2 + t^3}{t} = \lim_{t \to 0} \left(3x_0^2 + 3x_0 t + t^2\right) = 3x_0^2 \ .$$

Подставив в полученное выражение $x_0 = 2$, найдем, что искомое значение $y'_x(2)$ – производной для функции $y = x^3$ в точке 2, равно 12.

Пример 3.2. Найти производную функции $y = \sqrt{x+1}$ в точке $x_0 = 3$.

Как и в предыдущем, примере вначале решим эту задачу для произвольной фиксированной точки x_0 . Пусть приращение аргумента в точке x_0 равно t. Найдем соответствующее приращение значения данной функции

$$f(x_0+t) - f(x_0) = \sqrt{x_0+t+1} - \sqrt{x_0+1}\,.$$

Тогда, после умножения на сопряженное выражение, получим

$$f'\,(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{x_0+t+1} - \sqrt{x_0+1}}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+t+1} + \sqrt{x_0+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0+1}}\,.$$

Подставив в полученное выражение $x_0 = 3$, найдем, что искомое значение $y'_x(3)$ – производной для функции $y = \sqrt{x+1}$ в точке 3, будет равно $\frac{1}{4}$.

Пример 3.3. Найти производную функции $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$.

Для данной функции, в силу $x_0 = 0$

$$f'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{|x_0 + t| - |x_0|}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t} = \lim_{t \to 0} \left[\begin{array}{rl} 1 \ , & \text{если } t > 0, \\ -1 \ , & \text{если } t < 0. \end{array} \right. \qquad (3.2)$$

Откуда можно сделать заключение, что у рассматриваемой функции нет производной в нуле, так как можно указать две различные числовые последовательности, например,

$$\left\{ t_n = \frac{1}{n} \right\} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{и} \qquad \left\{ \tau_n = -\frac{1}{n} \right\} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

такие, что $f'\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$ и $f'\left(-\dfrac{1}{n}\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} -1$, то есть предел (3.1) не существует.

Заметим, что из существования производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 следует непрерывность этой функции в x_0. Действительно, пусть существует конечный предел

$$A = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t}\,.$$

Тогда

$$f(x_0+t) - f(x_0) = At + o(t)\,, \tag{3.3}$$

поскольку величина $\dfrac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} - A$ бесконечно малая. И переходя в равенстве (3.3) к пределу при $t \to 0$, получаем выполненное условие непрерывности $\lim\limits_{t\to 0} f(x_0+t) = f(x_0)$.

Обратное неверно: из непрерывности функции существование производной в точке может не следовать (см. пример 3.3).

Завершая обсуждение определения 3.1 отметим, что в математических текстах используются различные способы обозначения производной функции в точке. Помимо использованных выше, к наиболее часто встречающимся обозначениям относятся

$$y'_x(x)\big|_{x=x_0}\ ; \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}\ ; \quad f'(x)\big|_{x=x_0}\ .$$

Понятие производной функции в точке допускает его *геометрическую интерпретацию*, смысл которой лучше всего иллюстрирует задача построения касательной к графику функции в некоторой его точке.

Допустим, требуется провести касательную к графику функции $y = f(x)$ в точке A с координатами $\begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}$. Выберем на графике другую точку B , имеющую координатное представление $\begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Vmatrix}$. Поскольку обе эти точки лежат на графике, то справедливы равенства $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$.

Проведем через выбранные точки секущую AB , (см. рис. 1.) Нетрудно видеть, что уравнение прямой, проходящей через эти точки, имеет вид $y = k(x - x_0) + y_0$, где значение *углового коэффициента* $k = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg}\alpha$.

Начнем теперь, “скользя” по графику, приближать точку B к точке A . Тогда $x_1 \longrightarrow x_0$ и, значит, $t = x_1 - x_0 \longrightarrow 0$. В пределе секущая станет искомой касательной, значение углового коэффициента которой равно

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} = f'\left(x_0\right) \ ,$$

где $t = x - x_0$.

Таким образом, мы приходим к заключению, что *значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной в этой точке к графику функции.*

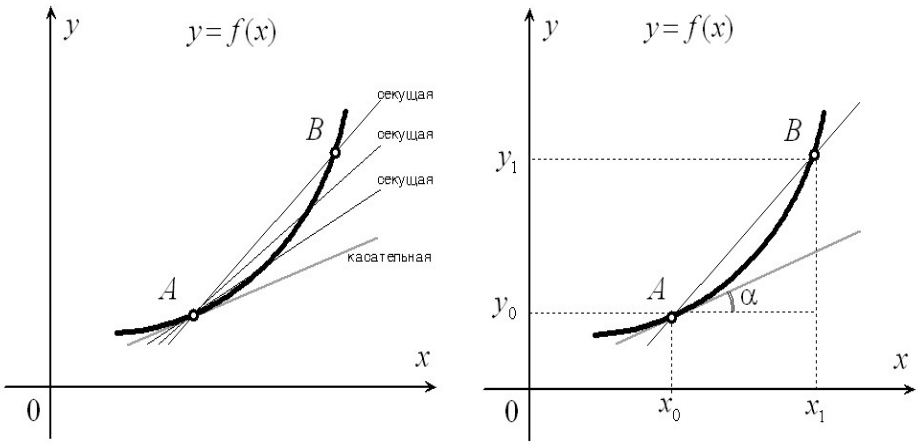

Рис. 1. Геометрический смысл производной функции в точке.

В заключение отметим, что из геометрически очевидной горизонтальности касательной к графику функции в ее экстремальных точках, из вышеприведенных рассуждений следует необходимость *равенства нулю значения производной функции в этих точках* (если, разумеется, эта производная существует).

Производная функция

Поиск значений производных функций в точках (непосредственно по определению 3.1) в большинстве случаев является сложной задачей, требующей для своего решения значительных затрат вычислительных усилий. На практике оказывается гораздо удобнее применять иной подход, основанный на следующих соображениях.

Используемый в определении 3.1 предельный переход осуществляется по вспомогательной переменной t, в то время как, значение x_0 – аргумента функции $f(x)$, для которой ищется производная в точке, является фиксированным числовым параметром. Если изменить x_0, то значение предела (3.1), вообще говоря, изменится. Однако для каждого конкретного x_0 оно *одно,* поскольку если предел существует, то он единственен.

Поэтому определение 3.1 можно рассматривать как правило, по которому каждому значению x_0, принадлежащему некоторому подмножеству области определения функции $y = f(x)$, ставится в соответствие единственное число $f'(x_0)$, то есть можно сказать, что таким образом задана некоторая новая *функция,* значение которой в точке x_0 равно $f'(x_0)$.

Эту функцию принято называть *производной функцией* от $y = f(x)$ и обозначать как $f'(x)$, операцию же поиска $f'(x)$ называют *дифференцированием.* В случае, когда для $f(x)$ существует $f'(x)$, говорят также, что функция $f(x)$ *дифференцируемая.* С другой стороны, функцию $y = F(x)$ такую, что $F'(x) = f(x)$, называют *первообразной* для $y = f(x)$. Операция ее нахождения называется *интегрированием.*

Например, воспользовавшись решением примера 3.1, можно утверждать, что функция производная от $y = x^3$ есть $y = 3x^2$, поскольку использованный нами метод раскрытия неопределенности годится для *любого* x_0. Теперь для нахождения значения производной функции $y = x^3$ в любой точке x_0 достаточно подставить вместо x значение x_0 в формулу $3x^2$.

Производные функции принято также обозначать как y'_x ; $\dfrac{dy}{dx}$; $y'(x)$. В тех случаях, когда функция зависит более чем от одной переменной, идентификатор переменной, по которой берется производная, указывается явно в виде нижнего индекса. Например, для функции $f(x, p)$ – зависящей от x и p, запись $f'_x(x, p)$ означает производную по переменной x, в то время как p считается фиксированным параметром. Такую производную иногда называют *частной производной* и обозначают как $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Стоит также отметить, что в русскоязычных математических текстах понятия “производная функции в точке” и “производная функция” часто обозначаются одним и тем же словом – “производная”, полагая, что из контекста понятно, о чем идет речь. В английском языке, например, этой проблемы не существует, поскольку производная функции в точке это – derivation, а производная функция – derivative.

Очевидно, что использовать производные функции для нахождения значений производной функции в точке гораздо удобнее, чем пользоваться для этой цели определением 3.1. Но тогда возникает вопрос: как находить производные функции?

Ответ следующий – надо использовать:

1) *таблицу производных* для некоторого небольшого набора элементарных функций, полученных непосредственно при помощи определения 3.1,

и

2) *правила дифференцирования*, которые позволяют выражать производные одних функций через производные других. Обоснование их справедливости, основанное на использовании определения 3.1 и свойств пределов функций, можно найти в полном курсе математического анализа.

Таблица 3.1

$f(x)$	$f'(x)$
x^a	ax^{a-1}
e^x	e^x
$a^x, \quad a > 0, a \neq 1$	$a^x \ln a$
$\ln \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a \lvert x \rvert, \quad a > 0, a \neq 1$	$\dfrac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

Первая из этих таблиц, имеет номер 3.1.

Очевидно, что этой таблицы недостаточно, чтобы получать производные *любых* функций, задаваемых формулами, поэтому следует использовать также таблицу 3.2, выражающую *производные одних функций, через производные других,*

Таблица 3.2

1°	$(\ f(x) + g(x)\ )' = f'(x) + g'(x)$
2°	$(\ C \cdot f(x)\ )' = C \cdot f'(x)$, где C – const
3°	$(\ f(x) \cdot g(x)\ )' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4°	$(\ f(g(x))\ )'_x = f'_g(g) \cdot g'_x(x)$

Проиллюстрируем использование таблиц 3.1 и 3.2 на следующих примерах.

Пример 3.4. Пусть требуется найти производные функции от

$$y = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + 1}{x}\,, \quad y = \frac{\sin x}{x} \quad \text{и} \quad y = e^{\arccos x}.$$

Решение.

1) Сравнение правил 1° и 3° таблицы 3.2 убеждает, что легче дифференцировать сумму функций, чем произведение, поэтому вначале выполним почленное деление, то есть будем искать производную функции

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + 1}{x}\right)' = \left(x^{-\dfrac{1}{3}} + x^{-\dfrac{1}{2}} + x^{-1}\right)' =$$

а, используя первые формулы таблиц 3.1 и 3.2, получаем

$$= -\frac{1}{3} \cdot x^{-\dfrac{4}{3}} - \frac{1}{2} \cdot x^{-\dfrac{3}{2}} - x^{-2} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\,.$$

2) В таблице 3.2 нет формулы для дифференцирования дроби (хотя во многих учебниках Вы ее можете встретить), поэтому сначала преобразуем данную функцию в произведение, и лишь потом применим правило 3° таблицы 3.2

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \big((\sin x)\cdot(x^{-1})\big)' \ = \ (\sin x)'\cdot(x^{-1}) + (\sin x)\cdot(x^{-1})' \ =$$

$$= \ (\cos x)\cdot x^{-1} + (\sin x)\cdot(-x^{-2}) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,.$$

3) Вначале напомним, что

$$g(x) = \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x\ ,$$

и потому, согласно первому правилу таблицы 3.2 и предпоследней строке таблицы 3.1,

$$g'_x(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Тогда,

$$y'_x = \left(e^{\arccos x}\right)'_x = \left(e^{g(x)}\right)'_x = \left(e^g\right)'_g \cdot g'_x(x) =$$

$$= e^g \cdot g'_x(x) = e^g \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Производные функций, заданных специальным образом

Производная от обратной функции

Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 и пусть эта функция имеет *ненулевую* производную в точке x_0, тогда *обратная к* $y = f(x)$ *функция* $x = f^{-1}(y)$ имеет в точке $y_0 = f(x_0)$ производную, значение которой

$$\left.\frac{df^{-1}}{dy}\right|_{y=y_0} = \frac{1}{\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0}}$$

`Пример.` Рассмотрим две взимно обратные функции $y = \sin x$ и $x = \arcsin y$ в малой (гарантирующую строгую монотонность) окрестности точки $\left\{ x_0 = \dfrac{\pi}{4},\ y_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right\}$.

В этой точке мы имеем

$$\begin{array}{llll} y(x) = \sin x & y'_x = \cos x & x_0 = \dfrac{\pi}{4} & y'_x(x_0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x(y) = \arcsin y & x'_y = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} & y_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} & x'_y(y_0) = \sqrt{2}\,. \end{array}$$

Производная функции, заданной параметрически

Пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ определены в некоторой окрестности точки $x_0 = x(t_0)$ и параметрически (локально!) задают в ней функцию $y = f(x)$.

Если, кроме того, $x = x(t)$ и $y = y(t)$ имеют производные в точке t_0 и $x'_t(t_0) \neq 0$, то тогда $y'_x(x_0) = \dfrac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$.

Пример. Пусть $\begin{cases} x = R\cos t\,, \\ y = R\sin t\,. \end{cases}$

В этом случае $x_0 = R\cos t_0 \quad \forall t_0 \neq k\pi,$ где $k \in (Z)$ и

$$y'_x(x_0) = -\frac{R\cos t_0}{R\sin t_0} = -\operatorname{ctg} t_0\,.$$

Производная функции, заданной неявно

Пусть дифференцируемая на интервале (a,b) функция $y = f(x)$ задана неявно условием $F(x, y(x)) = 0$. Тогда $y'_x(x)$ находится из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'_x(x) = 0\,.$$

Пример. Пусть $y = f(x)$ определена неявно условием

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \qquad x \in (0, 9)\,.$$

Найти $y'_x(4)$, если $y(4) = 1$.

Решение. Поскольку

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\, y'_x(4) = 0\,,$$

то

$$y'_x(4) = -\sqrt{\frac{y}{x}}\,\Bigg|_{\substack{x\,=\,4 \\ y\,=\,1}} = -\frac{1}{2}.$$

Производные высших порядков

Предположим, что у функции $y = f(x)$ имеется производная функция, которая также является диффнеренцируемой. Тогда производная функция от производной называется *производной второго порядка* для функции $y = f(x)$ и обозначается как

$$y''_{x=x_0} \ ; \quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0} \ ; \quad y''(x)\big|_{x=x_0} \ ,$$

а поиск значения этой числовой характеристики сводится к вычислению предела вида

$$f''(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f'(x_0+t) - f'(x_0)}{t} \, . \tag{3.4}$$

Поскольку вторые производные функции в точке (как пределы функции) определены однозначно, то можно задать новую функцию, значениями которой являются числа, получаемые по формуле (3.4). Эту функцию (производную от производной) называют *второй производной функцией от функции* $y = f(x)$. Для ее нахождения следует использовать те же правила, что и для первой производной функции.

Например, если $y = \ln|x|$, то, согласно таблице 3.1, $y' = \dfrac{1}{x}$, а, в свою очередь, производная функция от $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$ по той же таблице 3.1 равна $(-1)x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$. То есть, $(\ln|x|)'' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Рассуждая аналогично, можно дать определение производной порядка n. Эту производную будем обозначать

$$y^n_{x=x_0}\ ; \quad \left.\frac{d^n y}{dx^n}\right|_{x=x_0}\ ; \quad y^n(x)|_{x=x_0}\ .$$

При вычислении производных высших порядков часто оказываются полезными следующие формулы:

$$1)\quad (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \qquad \text{в частности } \ (e^x)^{(n)} = e^x\ ,$$

$$2)\quad (\sin\alpha x)^{(n)} = \alpha^n \sin\left(\alpha x + \frac{\pi n}{2}\right),$$

$$3)\quad (\cos\alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos\left(\alpha x + \frac{\pi n}{2}\right),$$

$$4)\quad \Big((ax+b)^p\Big)^{(n)} = a^n p(p-1)\dots(p-n+1)(ax+b)^{p-n}$$

$$\text{в частности } \ \left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}} \qquad ,$$

$$5)\quad (\log_a|x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$$

$$\text{в частности } \ (\ln|x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},$$

Наконец, приведем формулу, носящей название *формулы Лейбница*, для n-ой производной от произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$, каждая из которых имеет производные до порядка n включительно.

$$6)\quad (u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

Рассмотрим примеры использования этих формул

Задача 3.1. Найти $f^{(n)}(x)$ для $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2-2x-3}$.

Решение. Имеем $f(x) = \dfrac{x+5}{(x+1)(x-3)}$. Разложим эту функцию на простейшие дроби $f(x) = \dfrac{A}{(x+1)} + \dfrac{B}{(x-3)}$. Тогда

$$A(x-3) + B(x+1) = x+5 \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{r} A+B=1, \\ -3A+B=5. \end{array} \right.$$

Откуда $A = -1$ и $B = 2$. Для функции

$$f(x) = -\frac{1}{(x+1)} + \frac{2}{(x-3)},$$

используя линейность операции дифференцирования и частный случай формулы 4) , получаем

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left(\frac{2}{(x-3)^{(n+1)}} - \frac{1}{(x+1)^{(n+1)}} \right) .$$

Задача 3.2. Найти $f^{(n)}(x)$ для $f(x) = (x+1)^2 \sin 3x$.

Решение. Применим формулу 6) (т.е. формулу Лейбница). В данной задаче положим $u(x) = \sin 3x$ и $v(x) = (x+1)^2$. Тогда

$$f^{(n)}(x) = C_n^{(0)} u^{(n)}(x) v^{(0)}(x) +$$
$$+ C_n^{(1)} u^{(n-1)}(x) v^{(1)}(x) + C_n^{(2)} u^{(n-2)}(x) v^{(2)}(x),$$

поскольку $v^{(k)}(x) = 0$ для $k \geq 3$.

По формуле 2) имеем

$$\begin{aligned} (\sin 3x)^{(n)} &= 3^n \sin\left(3x + \frac{\pi n}{2}\right), \\ (\sin 3x)^{(n-1)} &= 3^{n-1} \sin\left(3x + \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{2}\right), \\ (\sin 3x)^{(n-2)} &= 3^{n-2} \sin\left(3x + \frac{\pi n}{2} - \pi\right), \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{array}{lll} v^{(0)}(x) = (x+1)^2, & v^{(1)}(x) = 2(x+1), & v^{(2)}(x) = 2, \\ C_n^0 = 1, & C_n^1 = n, & C_n^0 = \dfrac{n(n-1)}{2}, \end{array}$$

что при использовании тригонометрических формул приведения окончательно дает

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= 3^n (x+1)^2 \sin\left(3x + \frac{\pi n}{2}\right) - \\ &- 3^{n-1} 2n(x+1) \cos\left(3x + \frac{\pi n}{2}\right) - \\ &- 3^{n-2} n(n-1) \sin\left(3x + \frac{\pi n}{2}\right), \end{aligned}$$