Формула Тейлора

Рассмотрим теперь методы исследования функции в малой окрестности некоторой точки, основанные на использовании ее производных в этой точке.

Пусть точка x_0 для функции $y(x)$ – внутренняя точка области определения, то есть существует окрестность x_0 целиком содержащаяся в области определения этой функции. И пусть в этой точке функция $y(x)$ имеет *непрерывные производные до* n*-ого порядка включительно.*

В ситуации, когда полное аналитическое описание (то есть, в виде формулы) функции $y(x)$ слишком сложно или же неизвестно вовсе, а нас интересует ее поведение лишь в относительно небольшой окрестности точки x_0, представляется целесообразным использование приближенного описания этой функции в виде линейной комбинации степенных функций порядка не большего, чем n.

$$y(x) \approx \sum_{k=0}^{n} A_k (x - x_0)^k \ ,$$

где $A_k \forall k \in [0, n]$ — некоторые константы.

Более точно: будем предполагать, что в некоторой окрестности точки x_0 справедливо равенство

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k (x - x_0)^k + r(x, x_0) \ , \tag{5.1}$$

где $r(x, x_0)$ — функция погрешности аппроксимации, значением которой хотелось бы пренебречь при малых величинах $|x - x_0|$.

Понятно, что формула (5.1) может быть написана с любыми коэффициентами в ее аппроксимирующей части, однако можно ожидать, что качество аппроксимации (т.е. величина значений остаточного слагаемого $r(x, x_0)$) будет зависеть от выбора значений коэффициентов A_k .

Поскольку степенная аппроксимация остается «простой» при любых значениях параметров A_k, то имеет смысл выбирать их значения так, чтобы погрешность, возникающая при игнорировании (отбрасывании) остатка $r(x, x_0)$, была минимальной.

Для достижения этой цели поступим следующим образом.

Потребуем прежде всего, чтобы значение остаточной функции было равно нулю при $x = x_0$. Если записать соотношение (5.1) в виде

$$r(x, x_0) = y(x) - \sum_{k=0}^{n} A_k (x - x_0)^k \ , \tag{5.2}$$

то при $x = x_0$ оно превратится в равенство $y(x_0) = A_0 + r(x_0, x_0)$, из которого следует, что для выполнения условия $r(x_0, x_0) = 0$ нужно взять $A_0 = y(x_0)$.

Далее потребуем, чтобы первая производная остаточного члена также равнялась бы нулю при $x = x_0$.

Если функции равны, то очевидно равны и их производные функции, потому будет верным равенство, получаемое из (5.2) почленным дифференцированием

$$r'(x, x_0) = y'(x) - \sum_{k=1}^{n} k A_k (x - x_0)^{k-1} \ , \tag{5.3}$$

Откуда при $x = x_0$ получаем, что $r'(x_0, x_0) = 0$ обеспечивается при $A_1 = f'(x_0)$.

Рассуждая аналогично, получим, что производная остаточного члена порядка k обратится в 0 при $x = x_0$, если $f^{(k)}(x_0) = k!\,A_k$. Откуда

$$A_k = \frac{1}{k!} y^{(k)}(x_0)\,. \tag{5.4}$$

В итоге мы приходим к заключению, что «наилучшая» аппроксимация исходной функции $y = f(x)$, носящая название имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r(x, x_0)\,.$$

Пусть $y(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные до порядка $n-1$ включительно и пусть существует $y^{(n)}(x_0)$, тогда оказывается справедливой *теорема*:

> **Если в степенной аппроксимации ее коэффициенты выбраны по формулам (5.4), то** $r(x, x_0) = o(x-x_0)^n$.

В этом случае равенство

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o(x-x_0)^n \tag{5.5}$$

называется *разложением функции* $y(x)$ *в окрестности точки* x_0 *по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.*

Если же $y(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные до порядка $n+1$ включительно, то для любого x из этой окрестности в ней существует ξ такое, что

$$r(x, x_0) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Тогда принято говорить об *остаточном члене формулы Тейлора в форме Лагранжа.*

Равенство (5.5) в случае, когда $x_0 = 0$ принято называть *формулой Маклорена.*

Наконец, заметим, что $x - x_0 = dx$ и (5.5) записывается в виде

$$y(x) = y(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} d^k y + o(x-x_0)^n.$$

Приведем формулы Маклорена для некоторых основных элементарных функций.

$$
\begin{array}{llcl}
1) & e^x & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + o(x^n) = \\
 & & = & 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + o(x^2)\,, \\[2ex]
2) & \operatorname{sh} x & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = \\
 & & = & x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^6)\,, \\[2ex]
3) & \operatorname{ch} x & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = \\
 & & = & 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^5)\,, \\[2ex]
4) & \sin x & = & \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = \\
 & & = & x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^6)\,, \\[2ex]
5) & \cos x & = & \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = \\
 & & = & 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^5)\,, \\[2ex]
6) & (1+x)^a & = & 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} C_a^k x^k + o(x^n) = \\
 & & = & 1 + ax + \dfrac{a(a-1)}{2!} x^2 + o(x^2)\,, \\[2ex]
7) & \dfrac{1}{1+x} & = & \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = \\
 & & = & 1 - x + x^2 + o(x^2)\,, \\[2ex]
8) & \dfrac{1}{1-x} & = & \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = \\
 & & = & 1 + x + x^2 + o(x^2)\,,
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
9)\quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}x^k+o(x^n) = \\
&= 1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
10)\quad \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+o(x^n) = \\
&= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
11)\quad \operatorname{arctg} x &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2n+2}) = \\
&= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^6)\,.
\end{aligned}
$$

Также могут оказаться полезными и разложения

$$
12)\qquad \operatorname{tg} x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)\,,
$$

$$
13)\qquad \arcsin x = x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+o(x^6)\,.
$$

Пример 5.01. Разложить по формуле Тейлора $y(x) = \dfrac{x^2+5}{x^2+x-12}$ в окрестности $x_0 = -1$ до $o((x+1)^n)$.

Решение. 1) Чтобы использовать табличные формулы Маклорена, сделаем замену переменной $t = x+1$, тогда $x = t-1$ и

$$f(t) = \frac{(t-1)^2+5}{(t-1)^2+(t-1)-12} = \frac{t^2-2t+6}{t^2-t-12} = \frac{t^2-2t+6}{(t-4)(t+3)}.$$

2) Разложим $f(t)$ на простейшие дроби

$$f(t) = A + \frac{B}{t-4} + \frac{C}{t+3}.$$

Из условия $A(t-4)(t+3)+B(t+3)+C(t-4) = t^2-2t+6$ находим, что $A=1,\ B=2,\ C=-3$, то есть

$$f(t) = 1 + \frac{2}{t-4} - \frac{3}{t+3}.$$

3) Преобразуем запись $f(t)$ к виду, удобному для использования табличных разложений

$$f(t) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{t}{4}} - \frac{1}{1+\frac{t}{3}}$$

и используем формулы 7) и 8), получим

$$f(t) = 1 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{4^k} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k t^k}{3^k} + o(t^n) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} - 1\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2\cdot 4^k} + \frac{(-1)^{k+1}}{3^k}\right)t^k + o(t^n)\,.$$

4) Наконец, возвращаемся к исходной независимой переменной x :

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{3^k} - \frac{1}{2\cdot 4^k}\right)(x+1)^k + o((x+1)^n)\,.$$

Пример 5.02. Разложить по формуле Тейлора $y(x) = e^{2x^2-12x}$ в окрестности $x_0 = 3$ до $o((x-3)^{2n+1})$.

Решение. 1) Чтобы использовать разложения по формуле Маклорена, введем новую переменную $t = x - 3$, и выразим $y(x)$ через t подстановкой $x = t + 3$, получим

$$f(t) = e^{2(t+3)^2-12(t+3)} = e^{2t^2-18}.$$

Применяя формулу 1) , приходим к

$$f(t) = e^{-18}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2t^2)^k}{k!}+o((t^2)^n) = e^{-18}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k t^{2k}}{k!}+o(t^{2n+1})$$

2) Возвращаясь к исходной переменной x, получаем искомое разложение по формуле Тейлора

$$y(x) = e^{-18}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}(x-3)^{2k} + o((x-3)^{2n+1})\,.$$

Пример 5.03. Получить разложение по формуле Маклорена для функции $y(x) = \cos 2x \sin x$ до $o(x^{2n+2})$.

Решение. 1) Применив тригонометрическую формулу

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2},$$

получим $y(x) = \dfrac{1}{2}\sin 3x - \dfrac{1}{2}\sin x$. Тогда согласно формуле 4)

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\frac{(3x)^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) + o(x^{2n+2})$$

И, окончательно,

$$y(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\left(3^{2k+1}-1\right)}{(2k+1)!}\,x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

Пример 5.04. Представить формулой Тейлора функцию

$$y(x) = \ln \sqrt[4]{\frac{x-2}{5-x}}$$

в окрестности точки $x_0 = 3$ до $o((x-3)^n)$.

Решение. 1) Чтобы применить разложения по формуле Маклорена, введем новую переменную $t = x - 3$, и выразим $y(x)$ через t подстановкой $x = t + 3$, получим

$$f(t) = \ln \sqrt[4]{\frac{1+t}{2-t}} = \frac{1}{4}(\ln(1+t) - \ln(2-t)) =$$

$$= \frac{1}{4}\ln(1+t) - \frac{1}{4}\ln\left(2\left(1-\frac{t}{2}\right)\right) .$$

Применяя дважды формулу 10) , находим, что

$$f(t) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}t^k - \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^k}t^k + o((t)^n) =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln 2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{4k} + \frac{1}{k2^{k+2}}\right)t^k + o((t)^n)$$

2) Возвращаясь к исходной переменной x, получаем искомое разложение по формуле Тейлора

$$y(x) = -\frac{1}{4}\ln 2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}2^k + 1}{4k2^k}(x-3)^k + o((x-3)^n) .$$

Пример 5.05. Разложить по формуле Маклорена $y(x) = (x-1)e^{\frac{x}{2}}$ до $o(x^n)$.

Решение. 1) Согласно формуле 1) имеем

$$y(x) = (x-1)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} x^k + o(x^n)\right) .$$

Это верно, но не есть ответ на вопрос задачи.

2) Раскрыв внешние скобки, получим

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k k!} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} x^k + o(x^n) .$$

Введем в первой сумме индекс суммирования $m = k+1$. Тогда $k = m-1$ и мы имеем

$$y(x) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^{m-1}(m-1)!} x^m - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} x^k + o(x^n) .$$

3) Значение суммы не зависит от того, какой буквой обозначен индекс суммирования. Заменим в первой сумме m на k и запишем $y(x)$ в виде

$$y(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}(k-1)!}\, x^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k k!}\, x^k + o(x^n) =$$

$$= -1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2^{k-1}(k-1)!} - \frac{1}{2^k k!} \right) x^k + o(x^n)\,.$$

Последнее выражение можно немного упростить, написав

$$y(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k (k-1)!} \left(2 - \frac{1}{k} \right) x^k + o(x^n)\,.$$

Окончательно получаем

$$y(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2^k k!}\, x^k + o(x^n)\,.$$

Пример 5.06. Разложить по формуле Маклорена $y(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$ до $o(x^n)$.

Решение. 1) Используя формулу 7) можно написать

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \sum_{k=0}^{n} \left(x+x^2\right)^k + o(x^{2n})\,.$$

Как и в предыдущей задаче, это верно, но не есть ответ, поскольку требуется формула вида

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k + o(x^n)\,.$$

2) Преобразуем вначале $y(x)$, умножив числитель и знаменатель на $1-x$.

$$y(x) = \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{1-x}{1-x^3}.$$

Тогда по формуле 8) будет верным равенство

$$y(x) = (1-x)\left(\sum_{k=0}^{n} x^{3k} + o(x^{3n})\right)\,.$$

3) Запишем последнюю формулу без символа суммирования

$$y(x) = (1-x)\Big(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots + x^{3n} + o(x^{3n})\Big)$$

или же, в порядке возрастания степеней x

$$y(x) = 1 - x + 0x^2 + x^3 - x^4 + 0x^5 + x^6 - x^7 + \ldots + x^{3n} + o(x^{3n})\,.$$

То есть, числовая последовательность $\{A_k\}$ имеет вид

$$\{\,1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ \ldots\}$$

с периодически повторяющейся триадой членов $1, -1,\ \ 0$. Эту последовательность можно задать функционально, например, формулой

$$A_k = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2\pi(k+1)}{3}\,,$$

что позволяет записать ответ задачи в виде

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{2\pi(k+1)}{3}\cdot x^k + o(x^n)\,.$$

Пример 5.07. Получить формулу Маклорена для

$$y(x) = \operatorname{arctg} x\,.$$

Решение. 1) Заметим, что в данном случае функция $y'(x)$ легко записывается в виде разложения по Маклорену при помощи формулы 7) . Действительно

$$y'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1})\,.$$

Интегрируя это равенство по x, имеем

$$\operatorname{arctg} x = C + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})\,,$$

где C — константа интегрирования.

Наконец учитывая, что $\operatorname{arctg} 0 = 0$, получаем

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})\,.$$