Вычисление пределов при помощи формулы Тейлора

Представление функций, использующее формуле Тейлора, может оказаться эффективным методом вычисления их пределов. Точнее говоря, это представление может использоваться для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и 1^{∞}. Основой данного использования служит следующая теорема (*теорема* 6.1).

Пусть функции $f(x)$ **и** $g(x)$ **таковы, что** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ **и** $\exists m \in \mathbb{N}$ **такое, что для них справедливы равенства** $f(x) = ax^m + o(x^m)$ **и** $g(x) = bx^m + o(x^m)$ **с** $b \neq 0$. **Тогда**

$$\textbf{1)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^m + o(x^m)}{bx^m + o(x^m)} = \frac{a}{b},$$

$$\textbf{2)} \qquad \lim_{x\to 0} \Big(1 + f(x)\Big)^{\dfrac{1}{g(x)}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \Big(1 + ax^m + o(x^m)\Big)^{\dfrac{1}{bx^m + o(x^m)}} = e^{\frac{a}{b}}.$$

Напомним, что равенство

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\big((x - x_0)^n\big) \tag{6.1}$$

называется *разложением функции* $y(x)$ *в окрестности точки* x_0 *по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*, а равенство (6.1) в случае, когда $x_0 = 0$ называется *формулой Маклорена.*

Приведем таблицу формул Маклорена для некоторых основных элементарных функций.

$$
\begin{aligned}
1)\quad e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2)\quad \operatorname{sh} x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = \\
&= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3)\quad \operatorname{ch} x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = \\
&= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4)\quad \sin x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
5)\quad \cos x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
6)\quad (1+x)^a &= 1 + \sum_{k=1}^{n} C_a^k x^k + o(x^n) = \\
&= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o(x^2)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
7)\quad \frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = \\
&= 1 - x + x^2 + o(x^2)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
8)\quad \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = \\
&= 1 + x + x^2 + o(x^2)\,,
\end{aligned}
$$

$$9)\quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}x^k+o(x^n) = 1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2)\,,$$

$$10)\quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+o(x^n) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\,,$$

$$11)\quad \operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2n+2}) = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^6)\,.$$

Также могут оказаться полезными и разложения

$$12)\quad \operatorname{tg} x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)\,,$$

$$13)\quad \arcsin x = x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+o(x^6)\,.$$

Поясним идею данного метода следующим примером.

Пример 6.1 Найти $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} 2x - 2\sin x}{x^3}\,.$

Решение. Согласно формулам 2) и 4) будут справедливы равенства

$$\operatorname{sh} 2x = 2x - \frac{8x^3}{3!} + o(x^4) \qquad \text{и} \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\,.$$

Поэтому

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{2x + \dfrac{4}{3}x^3 + o(x^4) - 2x + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{5}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{3} + \frac{o(x^4)}{x^3}\right) =$$

$$= \frac{5}{3} + \lim_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{x^3} = \frac{5}{3}\,.$$

Особых комментариев приведенные преобразования не требуют. Отметим только, что были использованы равенства

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{x^3}=\lim_{x\to 0}x\frac{o(x^4)}{x^4}=0 \qquad \text{и} \qquad o(x^4)+o(x^4)=o(x^4),$$

первое из которых следует из определения функции $o(x)$ а во втором (выглядящем диковато) просто все три функции $o(x)$ *разные* и правильнее была бы запись вида $o_{(1)}(x^4)+o_{(2)}(x^4)=o_{(3)}(x^4)$.

Заметим, что теорема 6.1 не дает способа нахождения величины m, хотя понятно, что эта величина определяется первыми ненулевыми членами в разложениях для функций $f(x)$ и $g(x)$. При решении задач можно лишь порекомендовать начинать построение разложения с наиболее простой из них. Следующие примеры иллюстрируют возможную целесообразность такого подхода.

Пример 6.2 Найти $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\sqrt{1+\sin x} + \ln(1-x)}{\operatorname{tg} x - \sin x}$.

Решение. 1) Знаменатель здесь явно проще числителя. Поэтому начнем с него. Из табличных формул 4) и 12) имеем

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \qquad \text{и} \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\,.$$

Следовательно, знаменатель равен $\dfrac{1}{2}x^3 + o(x^4)$, при этом $m = 3$.

2) В числителе первое слагаемое равно произведению x на сложную (т.е. суперпозицию) функцию $\sqrt{1+\sin x}$. Поэтому последнюю достаточно разложить до $o(x^2)$, поскольку $x\,o(x^2) = o(x^3)$.

По табличной формуле 4) , где $a = \dfrac{1}{2}$

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}t^2 + o(t^2) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2),$$

поэтому

$$\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right) -$$

$$- \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^2 + o(x^2) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\,.$$

Заметьте, что здесь мы вначале воспользовались известной формулой

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc, \qquad (6.2)$$

а затем собрали в $o(x^2)$ *все* слагаемые более высокого порядка малости.

3) Табличная формула 10) для логарифмической функции дает

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\,,$$

что, вместе с полученным в 2) разложением, позволяет записать разложение по Маклорену для всего числителя

$$x\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) =$$

$$= -\frac{11}{24}x^3 + o(x^3)\,.$$

И, окончательно, $\quad A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\dfrac{11}{24}x^3 + o(x^3)}{\dfrac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = -\dfrac{11}{12}.$

Пример 6.3 Найти $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + \ln(1 - \sin x) - 1}{\sqrt[3]{8 - x^4} - 2}$.

Решение. 1) Знаменатель в этой задаче также более простой по сравнению с числителем. Для знаменателя, используя табличную формулу 6) с $a = \dfrac{1}{3}$, имеем

$$\sqrt[3]{8 - x^4} - 2 \quad = \quad 2\left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{8}x^4} - 1\right) =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{8} + o(x^4) - 1\right) \quad = \quad -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)\,.$$

Значит, $m = 4$.

2) Для построения разложения числителя нам потребуются следующие табличные формулы

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\,,\\
\ln(1-x) &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\,,\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\,.
\end{aligned}$$

Конкретно, для второго слагаемого в числителе, снова используя формулу (6.2), находим

$$\ln(1-\sin x) =$$

$$= -\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right) \; -\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^2 -$$

$$-\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^3 -\frac{1}{4}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^4 +o(x^4) =$$

$$= -x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4) =$$

$$= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)\,.$$

В итоге формула для числителя принимает вид

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}-1+o(x^4) =$$

$$= -\frac{x^4}{24}+o(x^4)\,.$$

3) Таким образом, окончательно, мы получаем

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{1}{24}x^4 + o(x^4)}{-\dfrac{1}{12}x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{2}.$$

Иногда для построения маклореновской аппроксимации оказывается целесообразным комбинирование использования табличных разложений и ее определения, т.е. формулы (6.1). Приведем пример такой ситуации.

Пример 6.4 Найти $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(3+x^2) - \operatorname{arctg}(2+\cos x)}{\ln(1+x) - e^x + 1}$.

Решение. 1) Поскольку справедливы разложения

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\,,$$

то для знаменателя легко получаем

$$x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x - \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \;\;=\;\; -x^2 + o(x^2)\,.$$

2) В этом примере $m = 2$ и разложения для числителя несложно вычислить при помощи формулы (6.1). Для этого надо в точке $x = 0$ найти значения как самого числителя, так и его производных до второго порядка включительно.

Значение числителя $\Phi(x)$ в нуле очевидно равно нулю. Выпишем формулу для его первой производной, не выполняя каких-либо упрощений. Имеем

$$\Phi'(x) = \frac{2x}{1 + (3 + x^2)^2} - \frac{-\sin x}{1 + (2 + \cos x)^2}$$

Также очевидно, что $\Phi'(0) = 0$.

3) $\Phi''(x)$ ищем по правилу дифференцирования. Имеем для первого слагаемого в $\Phi'(x)$

$$\left(\frac{2x}{1+(3+x^2)^2}\right)'_x = \frac{2(1+(3+x^2)^2) - 2x(1+(3+x^2)^2)'_x}{(1+(3+x^2)^2)^2} =$$

$$= \frac{2(1+3^2)-0}{(1+3^2)^2} = \frac{1}{5}.$$

Аналогично находим для второго слагаемого в $\Phi'(x)$

$$\left(\frac{-\sin x}{1+(2+\cos x)^2}\right)'_x = -\frac{1}{10}.$$

Проверьте это самостоятельно.

4) Теперь, используя (6.1), запишем разложение для всего числителя

$$\Phi(x) = \Phi(0) + \Phi'(0)x + \frac{1}{2}\Phi''(0)x^2 + o(x^2)\,.$$

Подставляя, получим

$$\Phi(x) = 0+0\,x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{10}\right)\right)x^2+o(x^2) = \frac{3}{20}x^2+o(x^2)\,.$$

Окончательно $\quad A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{3}{20}x^2 + o(x^2)}{-x^2 + o(x^2)} = -\dfrac{3}{20}\,.$

Пример 6.5 Найти первые три члена разложения в формуле Маклорена для функции $\operatorname{tg} x$.

Решение. 1) Используем табличные разложения для функций $\sin x$ и $\cos x$, а также разложение с неопределенными коэффициентами для нечетной функции $\operatorname{tg} x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\,,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\,,$$

$$\operatorname{tg} x = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)\,.$$

2) Значения неопределенных коэффициентов найдем при помощи равенства

$$\cos x \cdot \operatorname{tg} x = \sin x\,,$$

которое во введенных обозначениях имеет вид

$$\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)\left(ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)\right) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)\,.$$

3) Перемножив многочлены в левой части и приравняв коэффициенты при равных степенях x в обеих частях, получаем значения искомых коэффициентов

$$a = 1\,, \qquad b = \frac{1}{3}, \qquad c = \frac{2}{15}.$$

Рассмотрим теперь пример вычисления предела вида, указанного в п. 2) теоремы Т6.1.

Пример 6.6 Найти $A = \lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+2x}\cdot\cos x - \dfrac{\arcsin x}{1+x}\right)^{\dfrac{x}{(1-\operatorname{ch} x)^2}}$.

`Решение.` 1) Поскольку функция, являющаяся показателем, проще основания, начнем с поиска разложения для показателя. Имеем

$$1-\operatorname{ch} x = -\frac{1}{2}x^2+o(x^2) \qquad \Longrightarrow \qquad (1-\operatorname{ch} x)^2 = \frac{1}{4}x^4+o(x^4)\,.$$

Тогда

$$\frac{x}{(1-\operatorname{ch} x)^2} = \frac{x}{\dfrac{1}{4}x^4+o(x^4)} = \frac{1}{\dfrac{1}{4}x^3+o(x^3)}\,.$$

Значит, $m = 3$.

2) Разложение основания получаем следующим образом. Имеем

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\,,$$

$$\sqrt{1+2x} = 1 + \frac{1}{2}2x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}4x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{6}8x^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

Тогда

$$\sqrt{1+2x}\cdot\cos x =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)\cdot\left(1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)\right) =$$

$$= 1 + x - x^2 + o(x^3)\,.$$

Аналогично, учитывая табличные формулы 13) и 6), из

$$\arcsin x = 1 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\,,$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)\,,$$

получаем

$$\frac{\arcsin x}{1+x} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) \cdot \big(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)\big) =$$

$$= x - x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)\,.$$

В итоге для основания получаем $\quad 1 + \dfrac{5}{6}x^3 + o(x^3)\,.$

3) Окончательно, по п. 2) теоремы 6.1 получаем

$$A = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{5}{6}x^3+o(x^3)\right)^{\dfrac{1}{\frac{1}{4}x^3+o(x^3))}} = e^{\frac{5}{6}\cdot 4} = e^{\frac{10}{3}}\,.$$

Заметим, что в условиях теоремы 6.1 будет справедливым равенство $A = e^B$, где

$$B = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+f(x))}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \ln A\,. \qquad (6.3)$$

Рассмотрим еще один пример раскрытия неопределенности 1^{∞}.

Пример 6.7 Найти $A = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2x}{\sin 2x} - \dfrac{2}{3}x^2 \right)^{\dfrac{x^2}{x^2 - \operatorname{arctg} x^2}}$.

Решение. 1) Начнем с построения разложения для показателя степени. Имеем

$$\frac{x^2}{x^2 - \operatorname{arctg} x^2} = \frac{x^2}{x^2 - \left(x^2 - \dfrac{x^6}{3} + o(x^9) \right)} = \frac{1}{\dfrac{x^4}{3} + o(x^7)}.$$

То есть, $m = 4$.

2) Чтобы получить формулу Маклорена для основания, предварительно разложим до $o(x^4)$ дробь

$$\frac{2x}{\sin 2x} = \frac{2x}{2x - \frac{1}{6}8x^3 + \frac{1}{120}32x^5 + o(x^6)} =$$

$$= \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{15}x^4 + o(x^5)\right)} =$$

$$= 1 + \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{15}x^4 + o(x^5)\right) + \left(\frac{2}{3}x^2 + o(x^3)\right)^2 + o(x^5) =$$

$$= 1 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{15}x^4 + \frac{4}{9}x^4 + o(x^5) = 1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{14}{45}x^4 + o(x^5)\,.$$

В итоге маклореновское представление основания будет

$$\frac{2x}{\sin 2x} - \frac{2}{3}x^2 \quad = \quad 1 + \frac{14}{45}x^4 + o(x^5)\,.$$

Окончательно, применяя второе утверждение теоремы 6.1, получаем $\quad A = e^{\frac{14}{45}\cdot 3} = e^{\frac{14}{15}}$.