Построение линий, заданных параметрически или неразрешаемыми уравнениями

Построение линий, заданных параметрически

Будем говорить, что линия на плоскости задана *параметрически* в прямоугольной декартовой системе координат Oxy, если связь между координатами точек линии определена системой соотношений

$$\left\{\begin{array}{l} x = x(t), \\ y = y(t), \end{array}\right. \tag{8.1}$$

где t принадлежит некоторому промежутку вещественной оси.

При построении линий, заданных параметрически, можно придерживаться, например, следующей последовательности действий.

1°. Исследовать функции $x(t)$ и $y(t)$. Построить эскизы их графиков.

2°. Для функций $x(t)$ и $y(t)$ выбрать значения переменной t, при стремлении t к которым, имеет место $\left\| \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix} \right\| \to \left\| \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\|$, где хотя бы один из символов p или q является либо 0, либо ∞. Такие значения t (для краткости) будем называть *опорными*.

3°. Получить приближенные формулы связи значений x и y для опорных значений t.

4°. Используя информацию из 1°, 2° и 3°, построить приближенный эскиз линии.

5°. Вычислить производные $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$. Определить их опорные точки. При вычислении производных удобно пользоваться, следующими из правил дифференцирования, формулами

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} \qquad \text{и} \qquad y''_{xx}(t) = \frac{y''_{tt}(t)x'_t(t) - y'_t(t)x''_{tt}(t)}{\big(x'_t(t)\big)^3}\,.$$

6°. Используя информацию из 5°, найти промежутки монотонности, точки локальных экстремумов, а также направления выпуклости и точки перегиба линии.

7°. Свести полученную информации о поведении линии в итоговую таблицу.

8°. Построить уточненный эскиз линии.

Пример 8.1. Построить линию, заданную параметрически

$$x(t) = \frac{t^2}{1-2t}\,, \qquad y(t) = \frac{t^3}{1-2t}.$$

Решение. 1°. Графики функций $x(t)$ и $y(t)$ показаны на рис. 1. Причем на левом графике показана также и наклонная асимптота $u(t) = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$ (выделена синим цветом).

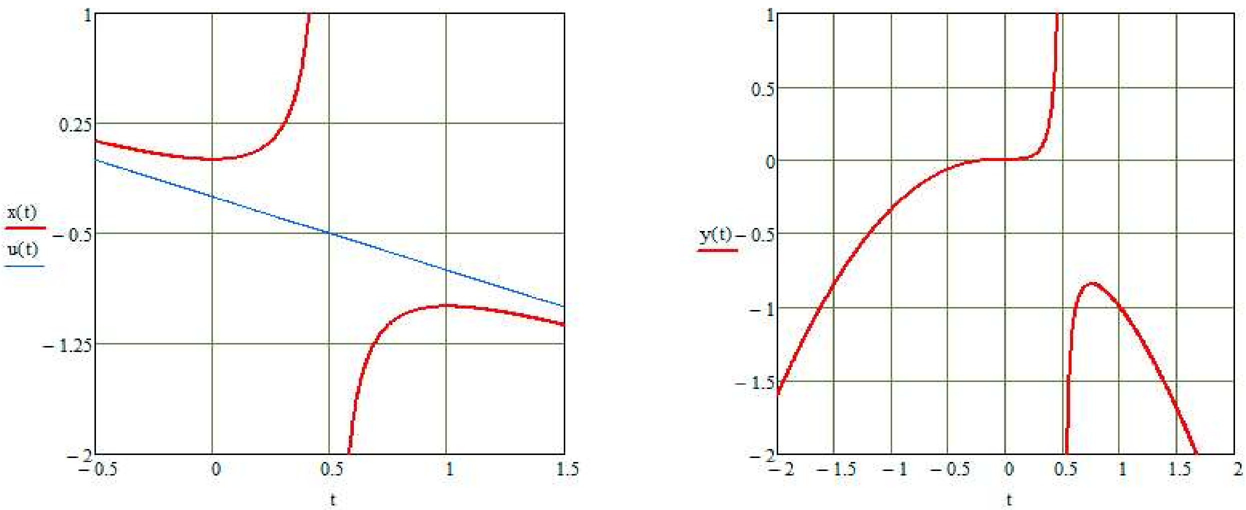

Рис. 1. Графики функций $x(t)$ и $y(t)$.

2°. Находим опорные точки для системы функций $x(t)$ и $y(t)$:

$t \to$	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x(t) \to$	$+\infty$	0	$\pm\infty$	$+\infty$
$y(t) \to$	$-\infty$	0	$\pm\infty$	$+\infty$

и определяем вид связи между x и y для них.

1) Для опорной точки $\pm\infty$ имеем $x(t) \sim -\dfrac{t}{2}$ и, поскольку $y(t) = tx(t)$, то $y \sim -2x^2$.

2) Для опорной точки 0 из $x(t) \sim t^2$ и $y(t) \sim t^3$ получаем $y \sim x\sqrt{x}$.

3) Наконец, для опорной точки $\frac{1}{2}$, заметив, что

$$a = \lim_{t \to \frac{1}{2}} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to \frac{1}{2}} t = \frac{1}{2}$$

и при этом

$$b = \lim_{t \to \frac{1}{2}} \bigl(y(t) - ax(t)\bigr) = \lim_{t \to \frac{1}{2}} \left(\frac{t^3}{1-2t} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{1-2t} \right) =$$

$$= \lim_{t \to \frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}t^2 \right) = -\frac{1}{8},$$

приходим к заключению о существовании в этой опорной точке наклонной асимптоты, заданной уравнением $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}$.

3°. При помощи формул, указанных в п. 5° общего плана исследования, и равенств

$$x'_t(t) = -\frac{2t(t-1)}{(2t-1)^2} \qquad \text{и} \qquad y'_t(t) = \frac{t^2(3-4t)}{(2t-1)^2}$$

получаем

$$y'_x(t) = \frac{t(4t-3)}{2(t-1)} \qquad \text{и} \qquad y''_{xx}(t) = \frac{(2t-1)^3(2t-3)}{4t(1-t)^3}.$$

Отметим, что последнее равенство может также быть получено при помощи соотношения

$$y''_{xx}(t) = \frac{y''_{xt}(t)}{x'_t(t)},$$

использование которого может более эффективным с вычислительной точки зрения.

4°. Найдем теперь опорные точки для производных $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$. Учитывая знаки производных составляем следующую таблицу:

$t \to$	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$y'_x(t) \to$	$-\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\mp\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$
$y''_{xx}(t) \to$	-2	$\bigcap$	$\mp\infty$	$\bigcup$	0	$\bigcap$	$\bigcap$	$\bigcap$	$\mp\infty$	$\bigcup$	0	$\bigcap$	-2

5°. Помещаем полученную информацию в сводную таблицу свойств линии.

$t \to$	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x(t)$	$+\infty$	$-$	0	$+$	$\pm\infty$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-\infty$
$y(t)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$\pm\infty$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-\infty$
$y'_x(t)$	$-\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\mp\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$
$y''_{xx}(t)$	-2	$\bigcap$	$\mp\infty$	$\bigcup$	0	$\bigcap$	$\bigcap$	$\bigcap$	$\mp\infty$	$\bigcup$	0	$\bigcap$	-2
комент.	асим.		возв.				max		вер.кас.		пер.		асим.

6°. Эскиз линии показан на рис. 2. Фрагменты асимптоты выделены на рисунке синим цветом.

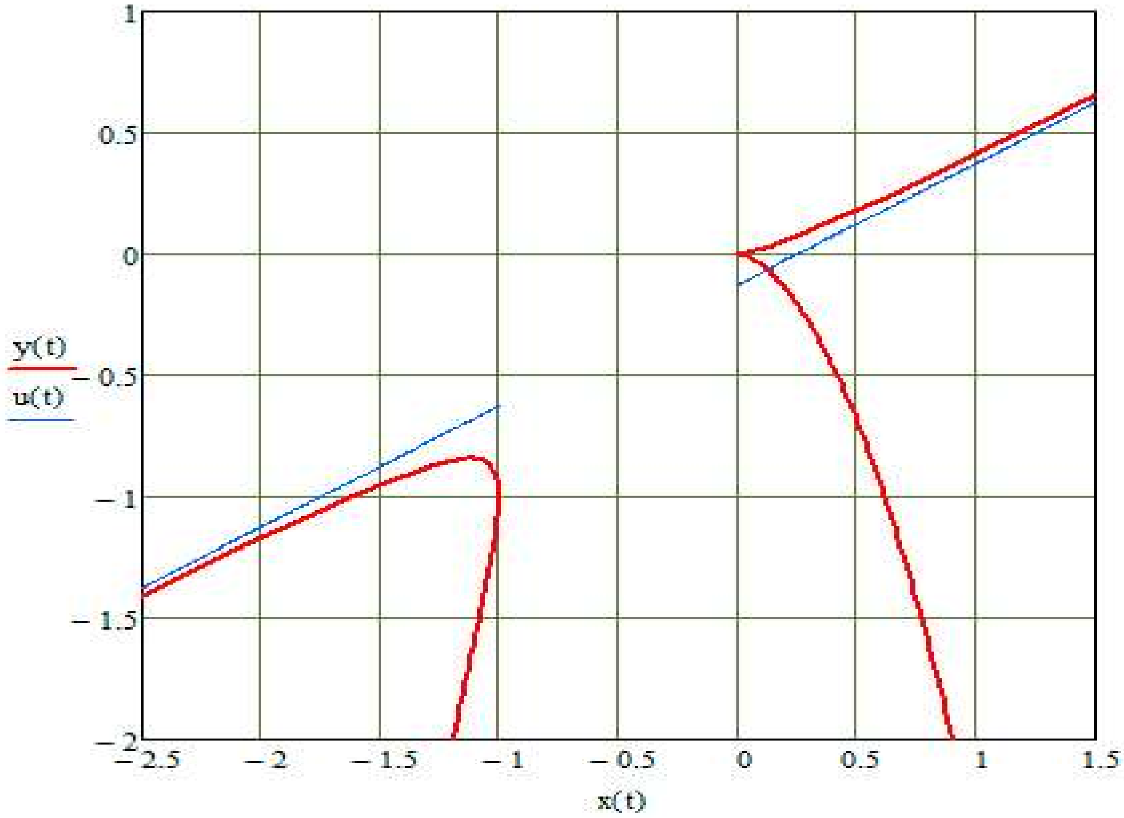

Рис. 2. Эскиз линии $y = y(x)$.

Построение линий, заданных неразрешаемыми уравнениями

Под линией, заданной *неразрешаемым уравнением*, будем понимать линию, связь между координатами точек которой, задает уравнение $F(x,y)=0$. Причем это уравнение оказывается неразрешимым (быть может, практически) как относительно переменной y, так и относительно переменной x.

Метод построения графического вида такой линии заключается в параметризации ее описания, то есть, замены уравнения $F(x,y)=0$, равносильной ему системой вида (8.1).

Пример 8.2. Построить линию, заданную уравнением

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0\,.$$

Решение. 1°. Параметризацию в этой задаче удобно выполнить, положив $y = tx$. Это дает

$$x(t) = \frac{3t}{t^3+1}\,, \qquad y(t) = \frac{3t^2}{t^3+1}\,.$$

Графики функций $x(t)$ и $y(t)$ показаны на рис. 3.

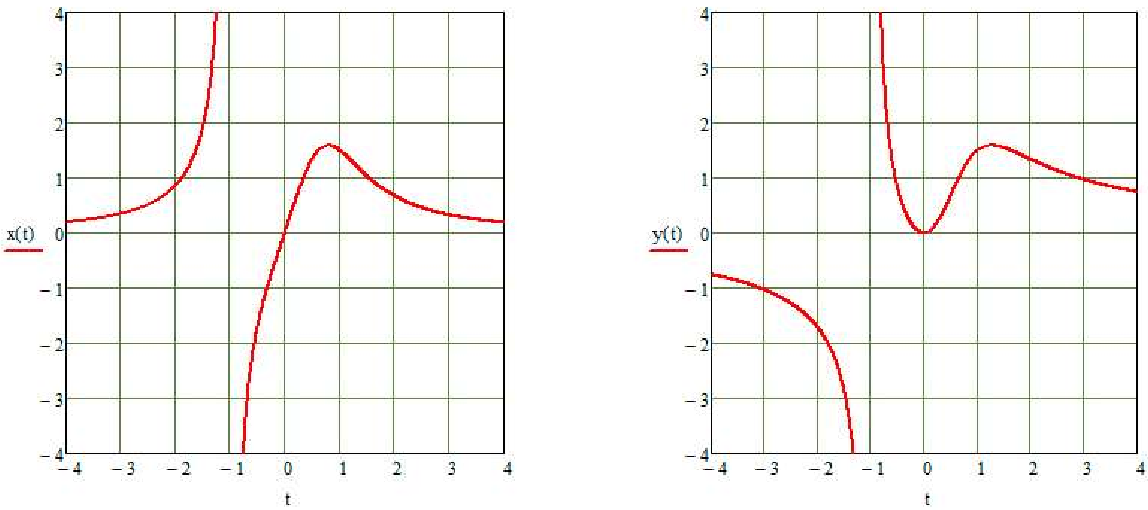

Рис. 3. Графики функций $x(t)$ и $y(t)$.

Предварительно : по исходному уравнению линии можно заключить, она обладает симметрией относительно прямой $y = x$. А из ее параметрического представления следует, что

$$x + y = 3\,\frac{t+t^2}{t^3+1} = 3\,\frac{t}{t^2-t+1} = \frac{3}{t+\dfrac{1}{t}-1}\,.$$

А поскольку $t+\dfrac{1}{t} \geq 2 \quad \forall t > 0$, то $x+y$, (а, значит, и каждая из координат любой точки линии) в первой четверти ограничена величиной 3 .

2°. Находим опорные точки для системы функций $x(t)$ и $y(t)$:

$t \to$	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x(t) \to$	$+0$	$\pm\infty$	0	$+0$
$y(t) \to$	-0	$\mp\infty$	0	-0

и определяем вид связи между x и y для них.

1) Для опорной точки $\pm\infty$ мы имеем $x(t) \sim \dfrac{3}{t^2}$ и $y(t) \sim \dfrac{3}{t}$, поэтому $x \sim \dfrac{y^2}{3}$.

2) Для опорной точки 0 из $x(t) \sim 3t$ и $y(t) \sim 3t^2$ получаем $y \sim \dfrac{x^2}{3}$.

3) Для опорной точки -1, имеем, что

$$a = \lim_{t \to -1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to -1} t = -1\,.$$

Аналогично

$$b = \lim_{t \to -1} \big(y(t) - a x(t) \big) = \lim_{t \to -1} \left(\frac{3t^2}{t^3+1} + \frac{3t}{t^3+1} \right) =$$

$$= \lim_{t \to -1} \frac{3t}{t^2 - t + 1} = -1\,.$$

Это означает, что в этой опорной точке линия имеет наклонную асимптоту $y = -x - 1$.

3°. При помощи формул, указанных в п. 5° плана исследования, а также равенств

$$x'_t(t) = \frac{3(2t^3-1)}{(t^3+1)^2} \qquad \text{и} \qquad y'_t(t) = \frac{3t(t^3-2)}{(t^3+1)^2}$$

получаем

$$y'_x(t) = \frac{t(t^3-2)}{2t^3-1} \qquad \text{и} \qquad y''_{xx}(t) = -\frac{2}{3}\,\frac{(t^3+1)^4}{(2t^3-1)^3}.$$

Напомним, что последнее равенство может быть получено из предпоследнего по формуле $y''_{xx}(t) = \dfrac{y''_{xt}(t)}{x'_t(t)}$.

4°. Найдем теперь опорные точки для производных $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$. Используя интерпретацию знака производных, составляем следующую таблицу:

$t \to$	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$y'_x(t) \to$	$-\infty$	$\searrow$	-1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\pm\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y''_{xx}(t) \to$	$+\infty$	$\bigcup$	0	$\bigcup$	$\bigcup$	$\bigcup$	$\pm\infty$	$\bigcap$	0	$\bigcap$	$-\infty$

5°. Соберем полученную информацию в сводную таблицу свойств линии.

t	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$x(t)$	0	$+$	$\pm\infty$	$-$	0	$+$	$\sqrt[3]{4}$	$+$	$\sqrt[3]{2}$	$+$	0
$y(t)$	0	$-$	$\mp\infty$	$+$	0	$+$	$\sqrt[3]{2}$	$+$	$\sqrt[3]{4}$	$+$	0
$y'_x(t)$	$-\infty$	$\searrow$	-1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\pm\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y''_{xx}(t)$	$+\infty$	$\bigcup$	0	$\bigcup$	$\bigcup$	$\bigcup$	$\pm\infty$	$\bigcap$	0	$\bigcap$	$-\infty$
комент.	сам. пер.		асим.		сам. пер.		вер.кас.		max		сам. пер.

6°. Эскиз линии показан на рис. 4. Фрагменты асимптоты выделены на рисунке синим цветом.

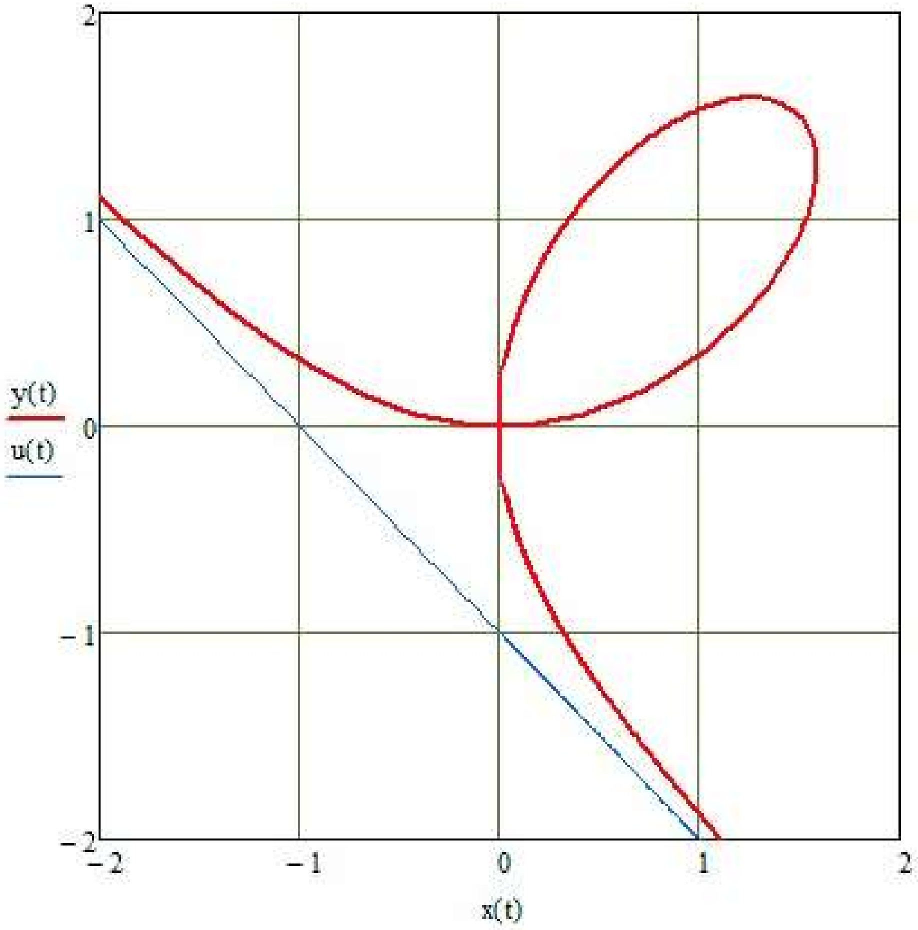

Рис. 4. Линия $y = y(x)$.