Матричные объекты

Определение.	*Матрицей размера* $m \times n$ называется упорядоченная прямоугольная таблица (или массив) чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Числа, образующие матрицу, называемые ее *элементами* (или *компонентами*), характеризуются как своим значением, так и номерами строк и столбцов, в которых они расположены. Условимся обозначать элемент матрицы, расположенный в i-ой строке и j-м столбце, как α_{ij}

Определение	Числа m, n и $m \times n$ называются *размерами матрицы*.

Матрицы обозначаются и записываются перечислением их элементов. Например, матрица с элементами

$$\alpha_{ij}\,;\ i=[1,m]\ ;\ j=[1,n]$$

или же в развернутой форме:

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{Vmatrix},$$

Если же потребуется неразвернутое представление матрицы, то мы запишем ее в виде $\|\alpha_{ij}\|$ или просто $\|A\|$.

Матрицы принято классифицировать по количеству их строк и столбцов.

Определение	Если $m = n$, то матрица называется *квадратной, порядка* n. Матрица размера $m \times 1$ называется m-мерным (или m-компонентным) *столбцом*. Матрица размера $1 \times n$ называется n-мерной (или n-компонентной) *строкой*.

Отметим, что, хотя формально для обозначения строк или столбцов следует использовать двухиндексные записи $\left\| \alpha_{1j} \right\|$ или $\left\| \beta_{i1} \right\|$, неменяющиеся индексы принято опускать, в результате чего обозначения строк или столбцов имеют вид $\left\| \alpha_j \right\|$ или соответственно $\left\| \beta_i \right\|$.

Некоторые часто используемые матрицы с особыми значениями элементов имеют специальные названия и обозначения.

Определение

Квадратная матрица, для которой

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad \forall i, j = [1, n],$$

называется *симметрической*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой.* Нулевую матрицу обозначают как $\|O\|$.

Квадратная матрица порядка n вида

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{Vmatrix}$$

называется *единичной*.

Единичную матрицу принято обозначать $\|E\|$.

Операции с матрицами

Определение

Две матрицы $\| A \|$ и $\| B \|$ считаются *равными* (обозначается: $\| A \| = \| B \|$), если они одинаковых размеров и если их соответствующие компоненты равны, то есть

$$\alpha_{ij} = \beta_{ij} \quad \forall i = [1, m] \text{ и } \forall j = [1, n].$$

Определение

Матрица $\|C\|$ называется *суммой матриц* $\|A\|$ *и* $\|B\|$ (это обозначается как: $\|C\| = \|A\| + \|B\|$), если матрицы $\|A\|$, $\|B\|$, $\|C\|$ одинаковых размеров и

$$\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \ \ \forall i = [1, m], \ \forall j = [1, n],$$

где числа $\gamma_{ij} \ \ \forall i = [1, m]$, $\forall j = [1, n]$ являются соответствующими компонентами матрицы $\|C\|$.

Определение Матрица $\|C\|$ называется *произведением числа* λ *на матрицу* $\|A\|$ (обозначается: $\|C\|=\lambda\|A\|$), если матрицы $\|A\|$ и $\|C\|$ одинаковых размеров и

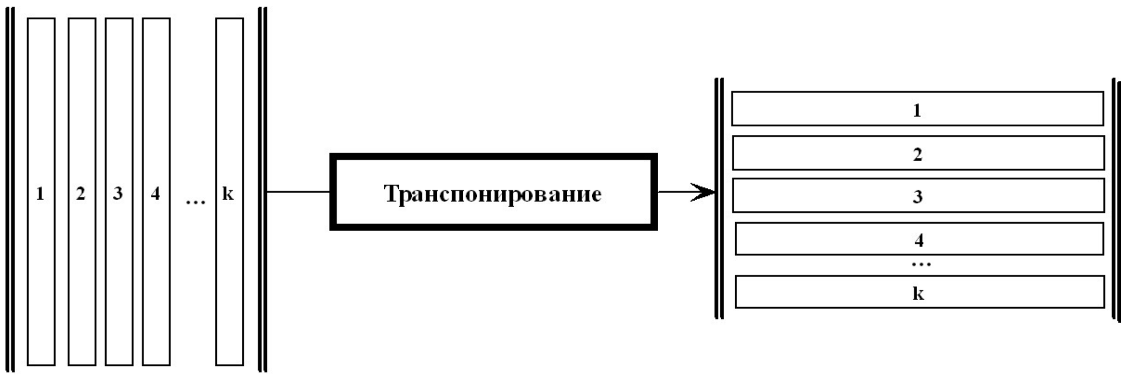
$$\gamma_{ij}=\lambda\alpha_{ij}\quad\forall i=[1,m],\ \forall j=[1,n].$$

Отметим, что умножать число можно на матрицу любого размера.

Замечание: в качестве всех (или некоторых) элементов матрицы допускается использование не только чисел, но и *других* математических объектов, для которых подходящим образом определены операции *сравнения, сложения и умножения на число*, например, векторов, функций или тех же матриц.

Определение *Транспонированием* матрицы называется операция, в результате которой образуется новая матрица, где строками служат столбцы исходной, записанные с сохранением порядка их следования (рис. 1.1.1).

Матрица, получающаяся в результате транспонирования матрицы $\|A\|$, обозначается $\|A\|^{\mathrm{T}}$.



Для элементов транспонированной матрицы $\|A\|^{\mathrm{T}}$ верно равенство

$$\alpha_{ij}^{\mathrm{T}} = \alpha_{ji} \quad \forall i = [1, m]\ ,\ \forall j = [1, n]\ .$$

Операция транспонирования, например, не изменяет симметрическую матрицу, но переводит строку размера $1 \times m$ в столбец размера $m \times 1$ и наоборот.

**Детерминанты (определители) квадратных матриц
2-го и 3-го порядков**

Для квадратных матриц вводится специальная числовая характеристика, называемая детерминантом (или определителем) и обозначаемая как $\det\|A\|$.

Описание свойств определителей квадратных матриц n-го порядка будет приведено позднее, здесь же мы ограничимся рассмотрением случаев $n=2$ и $n=3$.

Определение. Детерминантом (определителем) квадратной матрицы 2-го порядка $\left\|\begin{matrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{matrix}\right\|$ называется число

$$\det\left\|\begin{matrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{matrix}\right\| = \alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}.$$

Определение.

Детерминантом (определителем) квадратной матрицы 3-го порядка

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix}$$

называется число

$$\det \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} =$$

$$= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} + +\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} -$$

$$- \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}.$$

Для определителей квадратных матриц справедливы следующие теоремы:

Теорема **Определитель матрицы 3-го порядка может быть выражен через определители 2-го порядка формулой следующего вида:**

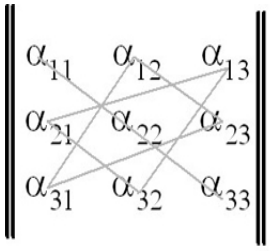
$$\det \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} =$$

$$= \alpha_{11} \det \begin{Vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} - \alpha_{12} \det \begin{Vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} + \alpha_{13} \det \begin{Vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{Vmatrix},$$

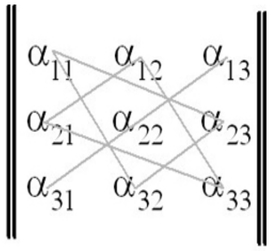
называемой *разложением* определителя по первой строке.

Раскладывать определители можно по *любой* строке (или столбцу), при условии, что знак каждого слагаемого с множителем α_{ij} равен $(-1)^{i+j}$.

Иногда подсчет значения определителя матрицы 3-го порядка удобнее выполнить иначе ('Метод треугольников')



Со знаком "плюс"



Со знаком "минус"

Следствие

При *транспонировании* квадратных матриц 2-го или 3-го порядков их определители *не меняются*.

В терминах определителей матриц второго порядка достаточно удобно формулируется условие однозначной разрешимости системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Теорема (Крамера). **Для того чтобы система линейных уравнений**

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 = \beta_1, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 = \beta_2 \end{cases}$$

имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\det\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Пример 01. Найти все решения системы линейных уравнений $\begin{cases} \lambda\xi_1 + 4\xi_2 = \lambda \\ \xi_1 + \lambda\xi_2 = \lambda - 1 \end{cases}$ для любых значений параметра $\lambda \in \mathbf{R}$.

Решение: 1. Теорема Крамера утверждает: для того, чтобы система линейных уравнений $\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 = \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 = \beta_2 \end{cases}$ имела единственное решение $\{\xi_1^*;\xi_2^*\}$, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta \neq 0$, при этом $\xi_1^* = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$ и $\xi_2^* = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, где

$$\Delta = \det\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}; \quad \Delta_1 = \det\begin{Vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{Vmatrix}; \quad \Delta_2 = \det\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \beta_2 \end{Vmatrix}.$$

В случае, когда $\Delta = 0$, требуется специальное исследование.

2. В нашем случае

$$\Delta = \det \begin{Vmatrix} \lambda & 4 \\ 1 & \lambda \end{Vmatrix} = \lambda^2 - 4 \,,\ \Delta_1 = \det \begin{Vmatrix} \lambda & 4 \\ \lambda - 1 & \lambda \end{Vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \quad \text{и}$$

$$\Delta_2 = \det \begin{Vmatrix} \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda - 1 \end{Vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda \,.$$

Поэтому при $\lambda \in (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$ по теореме Крамера система имеет единственное решение

$$\xi_1^* = \frac{\lambda - 2}{\lambda + 2}\,; \quad \xi_2^* = \frac{\lambda}{\lambda + 2}\,.$$

3. Наконец, при $\lambda = -2$ система имеет вид $\begin{cases} -2\xi_1 + 4\xi_2 = -2, \\ \xi_1 - 2\xi_2 = -3. \end{cases}$ Решений тут нет.

Если же $\lambda = 2$, то система будет $\begin{cases} 2\xi_1 + 4\xi_2 = 2, \\ \xi_1 + 2\xi_2 = 1. \end{cases}$ Она имеет бесчисленное множество решений, описываемых формулой $\begin{cases} \xi_1^* = 1 - 2\tau \\ \xi_2^* = \tau \end{cases}$; $\tau \in (-\infty,+\infty)$.

Произведение матриц

\
Определение Матрица $\|C\|$ размера $m\times n$ с элементами

$$\gamma_{ji} \quad \forall i=[1,n],\ \forall j=[1,m]$$

называется *произведением* матрицы $\|A\|$ размера $m\times l$ с элементами

$$\alpha_{jk} \quad \forall j=[1,m],\ \forall k=[1,l]$$

на матрицу $\|B\|$ размера $l\times n$ с элементами $\beta_{ki}\ \ \forall k=[1,l]$, $\forall i=[1,n]$, где

$$\gamma_{ji}=\sum_{k=1}^{l}\alpha_{jk}\beta_{ki} \quad \forall i=[1,n],\ \forall j=[1,m].$$

Результат умножения матриц – матрица $\|C\|$ −.

– есть матрица размера $m\times n$ при любом натуральном l, которая обозначается как $\|C\|=\|A\|\|B\|$. Правило вычисления компонентов произведения по компонентам сомножителей матричного произведения иллюстрирует следующий рисунок.

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \cdots & \alpha_{jl} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{ml} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1i} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2i} & \cdots & \beta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{l1} & \beta_{l2} & \cdots & \beta_{li} & \cdots & \beta_{ln} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1i} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2i} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{j1} & \gamma_{j2} & \cdots & \boxed{\gamma_{ji}} & \cdots & \gamma_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mi} & \cdots & \gamma_{mn} \end{Vmatrix} \qquad \gamma_{ji}=\sum_{k=1}^{l}\alpha_{jk}\,\beta_{ki}$$

Из определения произведения матриц непосредственно следует, что для матриц подходящих размеров:

1) умножение матриц *некоммутативно*, то есть в общем случае $\|A\|\|B\| \neq \|B\|\|A\|$,

2) умножение матриц *ассоциативно*

$$\|A\|(\|B\|\|C\|) = (\|A\|\|B\|)\|C\|,$$

3) умножение матриц обладает свойством *дистрибутивности*

$$\|A\|(\|B\| + \|C\|) = \|A\|\|B\| + \|A\|\|C\|.$$

Определение

Матрица $\|A\|^{-1}$ называется *обратной* квадратной матрице $\|A\|$, если выполнены равенства

$$\|A\|^{-1}\|A\| = \|A\|\|A\|^{-1} = \|E\|.$$

Обратная матрица существует не для произвольной квадратной матрицы. Для существования матрицы, обратной к $\|A\|$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\det\|A\| \neq 0$.

Определение

Матрица $\|A\|$, для которой $\det\|A\| = 0$, называется *вырожденной*, а матрица, для которой $\det\|A\| \neq 0$, – *невырожденной*.

Лемма

Если обратная матрица существует, то она единственна.

Теорема. **Имеет место соотношение**

$$(\| A \| \| B \|)^{\mathrm{T}} = \| B \|^{\mathrm{T}} \| A \|^{\mathrm{T}} .$$

Теорема **Для невырожденных одинакового размера квадратных матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ справедливо соотношение**

$$(\| A \| \| B \|)^{-1} = \| B \|^{-1} \| A \|^{-1} .$$

Задача *Проверить тождество* $(\| A \|^{-1})^{\mathrm{T}} = (\| A \|^{\mathrm{T}})^{-1}$.

Определение Невырожденная квадратная матрица $\|Q\|$, для которой $\|Q\|^{-1} = \|Q\|^{\mathrm{T}}$, называется *ортогональной.*