ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

1°. Формы задания прямой на плоскости

Пусть дана система координат $\{O,\vec{g}_1,\vec{g}_2\}$ на плоскости и прямая L, проходящая через точку $\vec{r}_0 = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}$, с лежащим на ней ненулевым вектором $\vec{a} = \begin{Vmatrix} a_x \\ a_y \end{Vmatrix}$, называемым направляющим вектором для L. Тогда справедливо следующее утверждение.

- Множество радиусов-векторов точек на прямой L представимо в виде $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau\vec{a}$, где τ - произвольный вещественный параметр.

Найдем координатную форму для $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau\vec{a}$ в выбранной системе координат.

Имеем: из $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau\vec{a}$ следует $\left\| \vec{r} \right\|_g = \left\| \vec{r}_0 + \tau\vec{a} \right\|_g$.

Используя утверждения теорем о действиях с векторами в координатах, получаем
$\left\| \vec{r} \right\|_g = \left\| \vec{r}_0 \right\|_g + \left\| \tau\vec{a} \right\|_g$ и $\left\| \vec{r} \right\|_g = \left\| \vec{r}_0 \right\|_g + \tau\left\| \vec{a} \right\|_g$.

Пусть в выбранной системе координат $\left\| \vec{r} \right\|_g = \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}$, $\left\| \vec{r}_0 \right\|_g = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}$ и $\left\| \vec{a} \right\|_g = \begin{Vmatrix} a_x \\ a_y \end{Vmatrix}$, тогда уравнение прямой в *матричном* виде будет $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix} + \tau\begin{Vmatrix} a_x \\ a_y \end{Vmatrix}$.

Полученное уравнение при помощи операций с *матрицами* приводим к виду

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \tau a_x \\ \tau a_y \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_0 + \tau a_x \\ y_0 + \tau a_y \end{Vmatrix}$$

Наконец, по определению равенства матриц, получаем $\begin{cases} x = x_0 + \tau a_x \\ y = y_0 + \tau a_y \end{cases} \quad \forall \tau \in \mathbf{R}$.

В координатном представлении из $\begin{cases} x = x_0 + \tau a_x \\ y = y_0 + \tau a_y \end{cases}$ следует

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}\ ; \quad a_x a_y \neq 0$$

$$y = y_0\ ;\ \forall x, \text{ если } a_y = 0$$

$$x = x_0\ ;\ \forall y, \text{ если } a_x = 0,$$

Эта запись называется *каноническим* видом уравнения прямой на плоскости.

Откуда получаем, что справедливы утверждения

- Всякая прямая в любой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида $Ax+By+C=0$, $|A|+|B|>0$.

- Каждое уравнение вида $Ax+By+C=0$, $|A|+|B|>0$ в любой декартовой системе координат есть уравнение некоторой прямой.

- Для того, чтобы два уравнения вида $A_1x+B_1y+C_1=0$, $|A_1|+|B_1|>0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, $|A_2|+|B_2|>0$ были уравнениями одной и той же прямой, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $\lambda\neq 0$ такое, что

$$A_1=\lambda A_2\ ;\ B_1=\lambda B_2\ ;\ C_1=\lambda C_2\ .$$

Задача 5.01 *Какое множество точек в системе координат* $\{O,\vec{g}_1,\vec{g}_2\}$ *на плоскости описывает уравнение* $Ax + By + C = 0$?

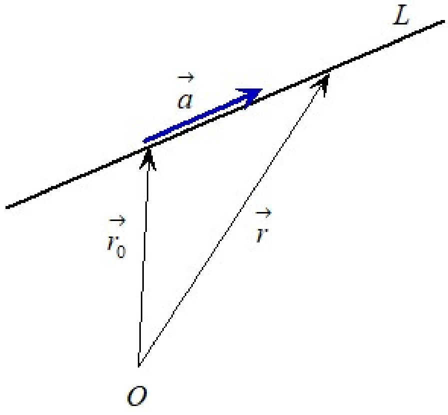
Решение

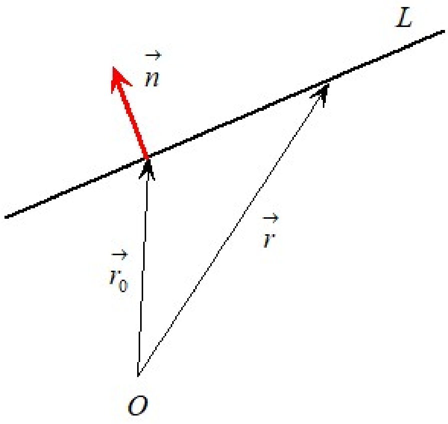
1°. Если . $|A|+|B|>0$, а C любое, то это множество − некоторая прямая.

2°. Если $A=0, B=0$, а $C\neq 0$, то множество − пустое множество.

3°. Если $A=0, B=0$ и $C=0$, то множество − вся координатная плоскость.

Решение получено





Уравнение прямой L, проходящей через заданную точку $\vec{r}_0 = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}$, перпендикурярно ненулевому вектору $\vec{n} = \begin{Vmatrix} n_x \\ n_y \end{Vmatrix}$, называемому *нормальным* вектором для L, имеет вид $(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$. Или же $(\vec{n}, \vec{r}) = d$, где $d = (\vec{n}, \vec{r}_0)$.

Задача 5.02 *Уравнение прямой* $(\vec{n},\vec{r}) = d$ *записать в виде* $(\vec{n},\vec{r}-\vec{r}_0) = 0$.

Решение

Поскольку вектор $\vec{n}$ содержится в обеих формах уравнения, то нужно найти только вектор $\vec{r}_0$.

В качестве $\vec{r}_0$ можно взять радиус-вектор любой точки. Поэтому примем за $\vec{r}_0$ вектор *ортогональной проекции начала координат на прямую*, который существует для любой прямой. В этом случае очевидно выполняется равенство $\vec{r}_0 = \lambda\,\vec{n}$, где λ − некоторое число.

Поскольку точка с $\vec{r}_0$ принадлежит прямой, то имеем $(\vec{n},\vec{r}_0) = d$. Откуда

$$(\vec{n},\lambda\,\vec{n}) = d \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{d}{\left|\vec{n}\right|^2}\ .$$

Решение получено

Сопоставляя рзличные формы задания прямой:

$$\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}\ ,\ (\vec{n},\vec{r})=d\ ,\ (\vec{n},\vec{r}-\vec{r}_0)=0 \quad \text{и} \quad Ax+By+C=0\ ,\ |A|+|B|>0\ ,$$

можно установить геометрический смысл коэффициентов A,B,C .

В любой ДСК $A=a_y,\quad B=-a_x$. В прямоугольной ДСК $A=n_x,\quad B=n_y$.

Уравнение прямой, проходящей через две несовпадающие точки $\vec{r}_1 = \begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Vmatrix}$ и $\vec{r}_2 = \begin{Vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Vmatrix}$ в векторной форме будет иметь вид $\vec{r} = (1-\tau)\vec{r}_1 + \tau\vec{r}_2$.

А в координатном представлении (после исключения τ):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1};\ (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \neq 0$$

$$y = y_1;\ \forall x, \quad \text{если } y_2 = y_1$$

$$x = x_1;\ \ \forall y, \quad \text{если } x_2 = x_1.$$

Линейное *неравенство* $Ax + By + C \geq 0$, $|A| + |B| > 0$ определяет часть координатной плоскости, координаты точек которой удовлетворяют данному неравенству. Прямая $Ax + By + C = 0$, $|A| + |B| > 0$ является фрагментом границы этой части плоскости.

Задача 5.03 *Построить координатное описание прямоугольного треугольника ABC, вершина прямого угла C которого находится в начале ортономированной системы координат* $\{Oxy\}$, *а две остальные вершины соответственно имеют радиусы-векторы* $\vec{r}_A = \left\| \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix} \right\|$ и $\vec{r}_B = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|$.

Решение

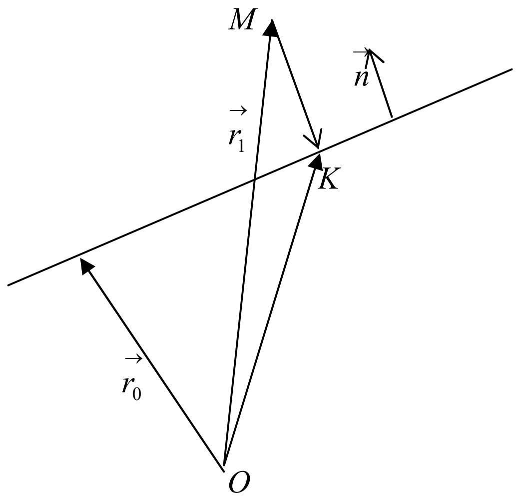
Искомым описанием является следующая система нестрогих линейных неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + 3y \leq 3. \end{cases}$$

Решение получено

Задача 5.04 *Дана система координат* $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ *на плоскости и прямая* L *с уравнением* $(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$. *Найти расстояние от этой прямой до точки M, радиус-вектор которой* $\vec{r}_1 = \begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Vmatrix}$.

Решение



1°. Пусть $\vec{MK} = \lambda \vec{n}$, тогда

$$\vec{OK} = \vec{OM} + \vec{MK} \quad \Rightarrow \quad \vec{OK} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{n} .$$

2°. Точка K принадлежит данной прямой, поэтому справедливо равенство

$$(\vec{n}, \vec{r}_1 + \lambda \vec{n} - \vec{r}_0) = 0 .$$

Откуда $\lambda = -\dfrac{(\vec{n}, \vec{r}_1 - \vec{r}_0)}{|\vec{n}|^2}$.

3°. Подставив λ в формулу для $\vec{MK}$, получим $|\vec{MK}| = \left| (\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}) \right|$.

4°. Пусть система координат ортонормированная. Тогда для прямой

$$Ax + By + C = 0 , \quad |A| + |B| > 0$$

вектор $\vec{n} = \begin{Vmatrix} A \\ B \end{Vmatrix}$ нормальный. Поэтому

$$|\vec{MK}| = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} .$$

Учтя, что точка $\vec{r}_0$ лежит на прямой L, и, следовательно, $Ax_0 + By_0 + C = 0$, ответ можно записать в виде

$$|\vec{MK}| = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} .$$

Решение получено.

Задача 5.05 *В общей декартовой системе координат даны прямая* $9x-5y-8=0$ *и точки* $\vec{r}_A = \begin{Vmatrix} -8 \\ -9 \end{Vmatrix}$ *и* $\vec{r}_B = \begin{Vmatrix} -2 \\ -6 \end{Vmatrix}$. *Опредилить аналитически лежат ли эти точки по одну или по разные стороны прямой.*

Решение:

1) Найдем значение для линейной функции $9x-5y-8$ в точке A: получим $9(-8)-5(-9)-8=-35<0$.

2) Найдем значение для линейной функции $9x-5y-8$ в точке B: получим $9(-2)-5(-6)-8=4>0$.

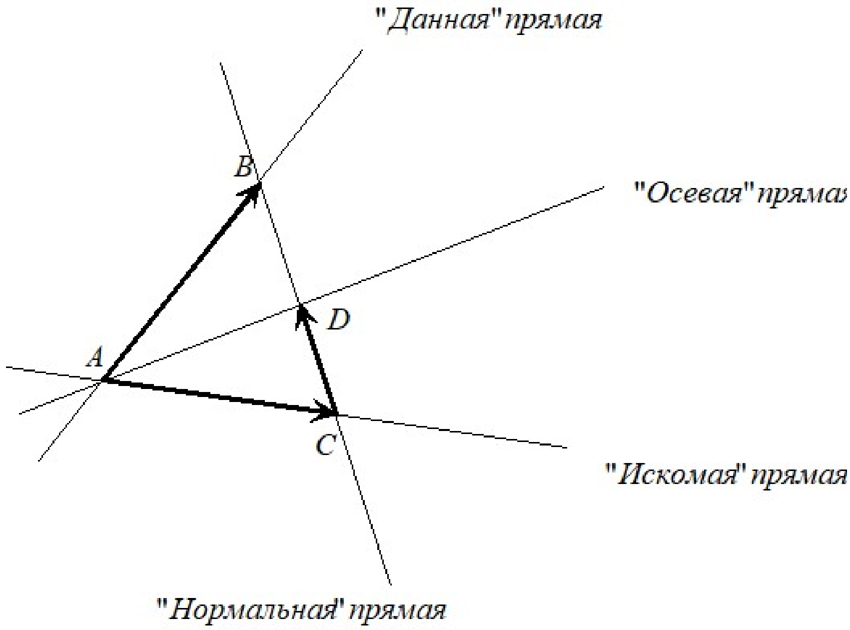
Значит, точки A и B лежат по разные стороны прямой $9x-5y-8=0$.

Решение получено

Задача 5.06 *на плоскости с ортонормированной системой координат найти «искомую» прямую симметричную «данной» прямой с уравнением* $11x-2y+31=0$ *относительно «осевой» прямой с уравнением* $4x-3y+9=0$.

Решение:

1°. Пусть *искомая* прямая проходит через две несовпадающие точки с координатами $(x_0;y_0)$ и $(x_1;y_1)$. Тогда ее уравнение будет $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$.



2°. В качестве первой точки можно выбрать точку *A* − точку пересечения *данной* и *осевой* прямых. Координаты этой точки очевидно определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} 11x_0-2y_0=-31, \\ 4x_0-3y_0=-9, \end{cases}$$

которая имеет решение $\begin{cases} x_0=-3, \\ y_0=-1. \end{cases}$

3°. На данной прямой выберем некоторую точку B , не совпадающую с точкой точку *A*. Например, точку с координатами $(-1;10)$. Проведем через *B* прямую *нормальную* (то есть, перпендикулярную) к *осевой* прямой. Пусть точка *C*, принадлежащая *нормальной* прямой, симметрична точке *B* относительно *осевой* прямой,

В этом случае, если точку пересечения *осевой* и *нормальной* прямой обозначить как *D*, мы будем иметь $|BD|=|DC|$.

4^{0}. Найдем теперь координаты точки *C*. Предварительно заметим, что, в силу выбора точек *B* и *C,* нормальный вектор *осевой* прямой $\overrightarrow{CD}$ будет являться направляющим вектором *нормальной* прямой. А, поскольку система координат прямоугольная, то уравнение нормальной прямой будет $3x+4y+K=0$, где K − некоторая константа.

Значение *K* найдем, учтя, что точка *B* принадлежит *нормальной* прямой, то есть,

$$3\cdot(-1)+4\cdot 10+K=0 \qquad \Rightarrow \qquad K=-37\,.$$

Следовательно, *нормальная* прямая имеет уравнение $3x+4y-37=0$ и точка *C* принадлежит этой прямой.

5^{0}. С другой стороны, пусть точка *C* имеет координаты $(x_1;y_1)$. Тогда, поскольку $|\,BD\,|=|\,DC\,|$, использовав формулу для расстояния от точки до прямой (в ОНСК !), запишем это равенство в виде

$$\frac{|\,4\cdot(-1)-3\cdot 10+9\,|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|\,4x_1-3y_1+9\,|}{\sqrt{4^2+3^2}} \qquad \text{или} \qquad \frac{|-25|}{5}=\frac{|\,4x_1-3y_1+9\,|}{5}\,.$$

Зная, что точки *B* и *C* лежат по разные стороны от *осевой* прямой, раскроем модули с противоположными знаками для их внутренностей, что дает $4x_1-3y_1-16=0$.

6^{0}. Таким образом, для координат точки *C* мы имеем два условия, которые запишем в виде системы $\begin{cases} 3x_1+4y_1=37, \\ 4x_1-3y_1=16, \end{cases}$ из которой получаем, что $\begin{cases} x_1=7, \\ y_1=4. \end{cases}$

7^{0}. Наконец, подставляя в формулу из пункта 1^{0} значения координат точек *A* и *C,* получаем уравнение искомой прямой:

$$\frac{x-(-3)}{7-(-3)}=\frac{y-(-1)}{4-(-1)} \qquad \text{или, после упрощения,} \qquad x-2y+1=0\,.$$

Решение получено