

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Формы задания плоскости в пространстве

Пусть даны система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ в пространстве и плоскость S , проходящая

через точку $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, с лежащими на S неколлинеарными векторами $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ и $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}$.

Векторы $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ и $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}$ называются направляющими векторами для S . Тогда спра-

ведливо следующее утверждение:

- Множество радиусов-векторов точек плоскости S представимо в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \varphi \vec{p} + \theta \vec{q},$$

где φ и θ – произвольные вещественные числа.

Поскольку данное уравнение равносильно условию компланарности векторов $\vec{r} - \vec{r}_0$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$, то его можно записать в виде

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{p}, \vec{q}) = 0.$$

Или в координатной форме $\det \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix} = 0$.

- Всякая плоскость в любой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида $Ax + By + Cz + D = 0$, $|A| + |B| + |C| > 0$.
- Каждое уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$, $|A| + |B| + |C| > 0$ в любой декартовой системе координат задает некоторую плоскость.

Уравнение плоскости S , проходящей через точку с радиусом-вектором $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$, имеет вид

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0, \quad \text{или} \quad \vec{n} \cdot \vec{r} = d, \quad \text{где } d = \vec{n} \cdot \vec{r}_0.$$

Вектор $\vec{n}$ называется нормальным вектором плоскости S .

- Если плоскость S задана в ортонормированной системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, $|A| + |B| + |C| > 0$, то вектор $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ ортогонален этой плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через три, попарно несовпадающих, и не лежащих на одной прямой, точки $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$; $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$; $\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ имеет вид $(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$.

Или же, в координатном представлении

$$\det \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0..$$

Формы задания прямой в пространстве

Прямая L в пространстве, имеющая ненулевой направляющий вектор $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ и проходящая через точку с радиусом-вектором $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, задается уравнением вида

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}.$$

Если параметр τ исключить из скалярной записи этого уравнения $\begin{cases} x = x_0 + \tau a_x \\ y = y_0 + \tau a_y \\ z = z_0 + \tau a_z \end{cases}$, то получается каноническая система вида

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}.$$

Прямая L в пространстве может быть задана как линия пересечения плоскостей вида $(\vec{n}_1, \vec{r}) = d_1$ и $(\vec{n}_2, \vec{r}) = d_2$. Здесь $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ неколлинеарные нормальные векторы этих плоскостей, а d_1 и d_2 суть некоторые числа. Векторное описание прямой L будет

$$\begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{r}) = d_1 \\ (\vec{n}_2, \vec{r}) = d_2 \end{cases}$$

Если известен радиус-вектор $\vec{r}_0$ некоторой точки прямой L , то ее описание будет $\begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0, \\ (\vec{n}_2, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0. \end{cases}$ Координатная форма описания L в этих случаях будет

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Условие коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{r} - \vec{r}_0$ при задании прямой может быть записано как $[\vec{a}, \vec{r} - \vec{r}_0] = 0$ или же

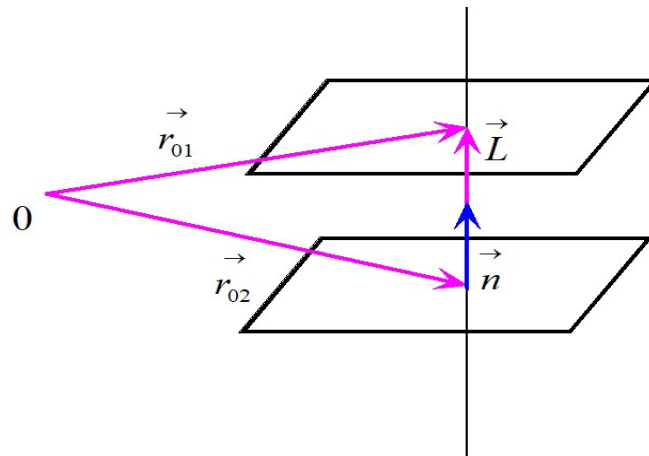
$$[\vec{a}, \vec{r}] = \vec{b},$$

где $\vec{b} = [\vec{a}, \vec{r}_0]$.

В ортонормированной системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ данный способ описания прямой в пространстве имеет вид

$$\det \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_x & a_y & a_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{b} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_y z - a_z y = b_x, \\ a_z x - a_x z = b_y, \\ a_x y - a_y x = b_z. \end{cases}.$$

Отметим, что в последней системе только два уравнения из трех независимые.



Задача 6.1. Найти расстояние между плоскостями $(\vec{n}, \vec{r}) = d_1$ и $(\vec{n}, \vec{r}) = d_2$.

Решение: 1) Пусть $\vec{r}_{01}$ и $\vec{r}_{02}$ суть радиусы-векторы точек пересечения общего перпендикуляра с плоскостями. Тогда $\vec{L} = \vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}$ и $\vec{L} = \lambda \vec{n}$. Искомое расстояние очевидно равно $S = |\vec{L}|$.

2) Найдем λ из условия $\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02} = \lambda \vec{n}$, умножив обе части скалярно на $\vec{n}$, получим

$$(\vec{r}_{01}, \vec{n}) - (\vec{r}_{02}, \vec{n}) = \lambda (\vec{n}, \vec{n}) \Rightarrow d_1 - d_2 = \lambda |\vec{n}|^2 \Rightarrow \lambda = \frac{d_1 - d_2}{|\vec{n}|^2}.$$

$$3) \text{ Откуда } S = |\vec{L}| = |\lambda \vec{n}| = |\lambda| |\vec{n}| = \frac{|d_1 - d_2|}{|\vec{n}|}$$

Решение получено

Задача 6.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(5, -4, 3)$, перпендикулярно прямой, проходящей через точки $B(-1, -2, 1)$ и $C(-6, -4, 3)$. Система координат прямоугольная.

Решение: 1) Пусть точки A, B, C имеют радиусы-векторы соответственно $\vec{r}_0, \vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, произвольная точка плоскости имеет радиус-вектор $\vec{r}$.

2) Заметим, что векторы $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ и $\vec{r} - \vec{r}_0$ в данном случае ортогональны при любом $\vec{r}$. Поэтому искомое уравнение будет $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$.

3) Пусть вектор $\vec{r}$ имеет координаты $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Тогда уравнение плоскости имеет вид $(-6 + 1)(x - 5) + (-4 + 2)(y + 4) + (3 - 1)(z - 3) = 0 \Rightarrow 5x + 2y - 2z = 11$.

Решение получено

Задача 6.3. Найти плоскость, проходящую через прямую $\begin{cases} x = 1 - 5\tau \\ y = 2 - \tau \\ z = 1 + 4\tau \end{cases}$, параллельно прямой $\begin{cases} x = -3 + 3\tau \\ y = -2 - 5\tau \\ z = 2 - 4\tau \end{cases}$. Система координат произвольная.

Решение: 1) Пусть в векторной форме данные прямые имеют следующий параметрический вид

$$\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}_1 \text{ и } \vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau \vec{a}_2.$$

То есть, нам известна точка $\vec{r}_{01}$, через которую искомая плоскость гарантированно проходит, поскольку через эту точку проходит и первая прямая.

2) Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны искомой плоскости по условию. Пусть вектор $\vec{r}$ произвольной точки этой плоскости имеет координаты $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$. Значит, тройка векторов $\vec{r} - \vec{r}_{01}$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ компланарна искомой плоскости, а ее уравнение можно записать в виде $(\vec{r} - \vec{r}_{01}, \vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0$.

3) В произвольной ДСК это уравнение будет

$$\det \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -5 & -1 & 4 \\ 3 & -5 & -4 \end{vmatrix} \cdot (g_1, g_2, g_3) = 0,$$

где векторы базиса $\{\vec{g}_1; \vec{g}_2; \vec{g}_3\}$ линейно независимы и, следовательно, их смешанное произведение отлично от нуля. Тогда в любой ДСК уравнение искомой плоскости будет

$$\det \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -5 & -1 & 4 \\ 3 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6x - 2y + 7z = 9.$$

Решение получено

Задача 6.4. Найти точку пересечения прямой $\begin{cases} x = -3 + 4\tau \\ y = 1 - 4\tau \\ z = -5 + \tau \end{cases}$ и плоскости $x + 4z = -7$. Система координат произвольная.

Решение: 1) Пусть в векторной форме данные прямая и плоскость имеют следующий вид $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$ и $(\vec{n}, \vec{r}) = d$. Обозначим искомую точку пересечения как $\vec{R}$, причем будем считать, что $\vec{R} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{a}$.

2) Поскольку $\vec{R}$ принадлежит, как прямой, так и плоскости, то значение параметра λ можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{a} \\ (\vec{n}, \vec{R}) = d \end{cases} \Rightarrow (\vec{n}, \vec{r}_0 + \lambda \vec{a}) = d \Rightarrow \lambda = \frac{d - (\vec{n}, \vec{r}_0)}{(\vec{n}, \vec{a})}.$$

Откуда $\vec{R} = \vec{r}_0 + \frac{d - (\vec{n}, \vec{r}_0)}{(\vec{n}, \vec{a})} \vec{a}.$

3) Значения координат искомой точки $\vec{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ удобнее искать не при помощи полученной формулы, а непосредственно из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} X = -3 + 4\lambda, \\ Y = 1 - 4\lambda, \\ Z = -5 + \lambda, \\ X + 4Z + 7 = 0. \end{cases}$$

Если подставить X и Z из первого и третьего уравнений в четвертое, то

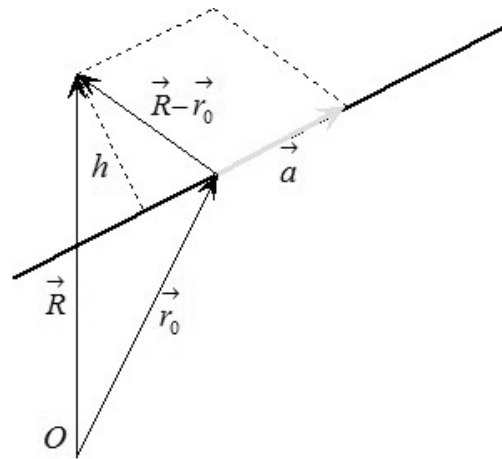
сразу получается, что $\lambda = 2$ и, следовательно, $\vec{R} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Решение получено

Задача 6.5 Найти расстояние от точки с радиусом-вектором $\vec{R}$ до прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$.

Решение: Расстояние h в пространстве от некоторой точки с радиусом-вектором $\vec{R}$ до прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$ можно найти, воспользовавшись свойством, что S – площадь параллелограмма, построенного на паре векторов, равна длине векторного произведения этих векторов. В итоге получаем

$$h = \frac{S}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{a}|}{|\vec{a}|}.$$

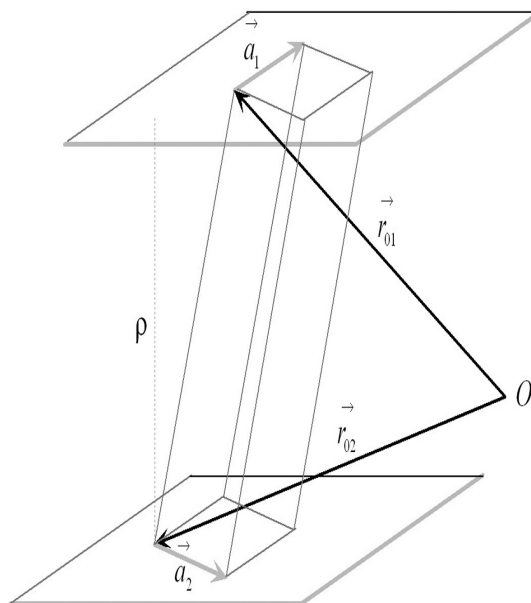


Решение получено

Задача 6.6 Найти расстояние между прямыми $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau \vec{a}_2$.

Решение: 1°. Если векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны, тогда решение аналогично решению примера 06.

2°. Пусть векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ неколлинеарны, тогда построим пару плоскостей, параллельных этим векторам, одна из которых содержит точку $\vec{r}_{01}$, а другая точку $\vec{r}_{02}$.



Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}$, равен, с одной стороны, произведению площади параллелограмма, находящегося в основании, на искомую величину ρ и $\left| (\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}, \vec{a}_1, \vec{a}_2) \right|$ – с другой. Откуда находим, что

$$\rho = \frac{|(\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}, \vec{a}_1, \vec{a}_2)|}{|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]|}.$$

Решение получено

Задача 6.7 Даны плоскость $(\vec{n}, \vec{r}) = d$ и прямая $[\vec{a}, \vec{r}] = \vec{b}$. Найти $\vec{R}$ – радиус-вектор точки их пересечения, если $(\vec{n}, \vec{a}) \neq 0$.

Решение: 1°. Умножив обе части уравнения прямой векторно слева на $\vec{n}$, получим $[\vec{n}, [\vec{a}, \vec{r}]] = [\vec{n}, \vec{b}]$. Подставляя в это соотношение искомый вектор $\vec{R}$ и применяя формулу "bac-cab" приходим к равенству

$$\vec{a}(\vec{n}, \vec{R}) - \vec{R}(\vec{n}, \vec{a}) = [\vec{n}, \vec{b}].$$

Поскольку точка $\vec{R}$ принадлежит данной плоскости, то верно равенство $(\vec{n}, \vec{R}) = d$. Тогда, при ограничении $(\vec{n}, \vec{a}) \neq 0$, получаем

$$\vec{R} = \frac{d \vec{a} - [\vec{n}, \vec{b}]}{(\vec{n}, \vec{a})}.$$

Решение получено