Линии и поверхности на плоскости и в пространстве

Пусть дана система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ на плоскости и числовое множество Ω, являющееся промежутком (возможно, бесконечным).

> Будем говорить, что линия L на плоскости задана *параметрически* вектор-функцией $\vec{r} = \vec{F}(\tau)$ (или в координатной форме
> $$\left\| \vec{r} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} F_x(\tau) \\ F_y(\tau) \end{matrix} \right\|,$$
> где $F_x(\tau), F_y(\tau)$ – непрерывные, скалярные функции аргумента τ, определенные для $\tau \in \Omega$), если
>
> 1) для любого $\tau \in \Omega$ точка $\vec{r} = \vec{F}(\tau)$ лежит на L;
> 2) для любой точки $\vec{r}_0$, лежащей на L, существует $\tau_0 \in \Omega$, такое, что выполнено равенство $\vec{r}_0 = \vec{F}(\tau_0)$.

Иногда линия на плоскости задается в виде уравнения $G(x,y)=0$, которое получается исключением параметра τ из системы уравнений $\begin{cases} x = F_x(\tau) \\ y = F_y(\tau) \end{cases}, \quad \tau \in \Omega$.

1°. Прямая линия, например, задается вектор-функцией $\vec{r} = \vec{r_0} + \tau\,\vec{a}$, где $\vec{a}$ – направляющий вектор, а $\vec{r_0}$ – одна из точек этой прямой. Скалярная форма задания прямой в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + \tau a_x, \\ y = y_0 + \tau a_y, \end{cases} \quad \tau \in (-\infty, +\infty),$$

то есть $\begin{cases} F_x(\tau) = x_0 + \tau a_x, \\ F_y(\tau) = y_0 + \tau a_y, \end{cases} \quad \tau \in (-\infty, +\infty)$,

или $Ax + By + C = 0, \quad |A| + |B| > 0$, где $G(x,y) = Ax + By + C$.

2°. В декартовой ортонормированной системе координат окружность радиуса R с центром в точке $\begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}$ в параметрическом виде может быть задана как

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\tau, \\ y = y_0 + R\sin\tau, \end{cases} \quad \tau \in [0,2\pi)$$, то есть

$$\begin{cases} F_x(\tau) = x_0 + R\cos\tau, \\ F_y(\tau) = y_0 + R\sin\tau, \end{cases} \quad \tau \in [0,2\pi),$$

или же уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \ ,$$

где $G(x,y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2$.

Линия называется *алгебраической*, если ее уравнение в декартовой системе координат имеет вид $\sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k x^{p_k} y^{q_k} = 0$, где p_k и q_k – целые неотрицательные числа, а числа α_k не равны нулю одновременно.

Число $N = \max\limits_{k=[0,m]} \{p_k + q_k\}$ называется *порядком алгебраического уравнения*, где максимум находится по всем k, для которых $\alpha_k \neq 0$. *Наименьший* из порядков алгебраических уравнений, задающих данную алгебраическую линию, называется *порядком алгебраической линии*.

Прямая	$x + 3y + 2 = 0$	$(N = 1)$
Квадратная парабола	$y - x^2 = 0$	$(N = 2)$
Гипербола	$xy - 1 = 0$	$(N = 2)$
“Декартов лист”	$x^3 + y^3 - xy = 0$	$(N = 3)$

Теорема **Порядок алгебраической линии не зависит от выбора системы координат.**

Доказательство.

Пусть алгебраическая линия L имеет в системе координат $\{O,\vec{g}_1,\vec{g}_2\}$ уравнение $G(x,y)=0$ и порядок N. Перейдем к системе координат $\{O,\vec{g}_1',\vec{g}_2'\}$. Формулы перехода имеют вид

$$\begin{cases} x=\sigma_{11}x'+\sigma_{12}y'+\beta_1, \\ y=\sigma_{21}x'+\sigma_{22}y'+\beta_2, \end{cases}$$

поэтому уравнение линии L в “новой” системе координат будет

$$G(\sigma_{11}x'+\sigma_{12}y'+\beta_1,\ \sigma_{21}x'+\sigma_{22}y'+\beta_2)=0.$$

Отсюда следует, что $N\geq N'$, то есть, при переходе к “новой” системе координат порядок алгебраической кривой не может повыситься.

Применяя аналогичные рассуждения для обратного перехода от системы координат $\{O,\vec{g}_1',\vec{g}_2'\}$ к системе $\{O,\vec{g}_1,\vec{g}_2\}$, получим $N\leq N'$ и окончательно $N=N'$.

Теорема доказана.

Фигуры на плоскости можно задавать, используя ограничения типа неравенств.

1°. В ортонормированной системе координат набор условий $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y - 3 \leq 0 \end{cases}$ задает прямоугольный равнобедренный треугольник, катеты которого лежат на осях координат и имеют длины 3.

2°. В ортонормированной системе координат неравенство вида $x^2 + y^2 - 4 \leq 0$ определяет круг радиуса 2 с центром в начале координат.

Рассмотрим теперь случай линии в пространстве.

Пусть дана пространственная система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Будем говорить, что линия L в пространстве задана *параметрически* вектор-функцией $\vec{r} = \vec{F}(\tau)$ (или в координатной форме

$$\left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} F_x(\tau) \\ F_y(\tau) \\ F_z(\tau) \end{matrix} \right\|,$$

где $F_x(\tau), F_y(\tau), F_z(\tau)$ – непрерывные, скалярные функции от τ, определенные для $\tau \in \Omega$), если

1) для любого $\tau \in \Omega$ точка $\vec{r} = \vec{F}(\tau)$ лежит на L,
2) для любой точки $\vec{r}_0$, лежащей на L, существует $\tau_0 \in \Omega$, такое, что выполнено равенство $\vec{r}_0 = \vec{F}(\tau_0)$.

Иногда линия в пространстве задается системой уравнений

$$\begin{cases} G(x, y, z) = 0, \\ H(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

которая получается исключением параметра τ из соотношений

$$\begin{cases} x = F_x(\tau), \\ y = F_y(\tau), \qquad \tau \in \Omega \\ z = F_z(\tau), \end{cases},$$

или же равносильным уравнением, например, вида

$$G^2(x, y, z) + H^2(x, y, z) = 0 .$$

1°. В декартовой системе координат алгебраическая линия второго порядка $x^2 + y^2 = 0 \ \forall z$ является *прямой*.

2°. В ортонормированной системе координат *винтовая линия* радиуса R с шагом $2\pi a$ может быть задана в следующем параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = R\cos\tau, \\ y = R\sin\tau, \ \tau \in (-\infty, +\infty), \\ z = a\tau \end{cases}$$

или же $\begin{cases} x = R\cos\dfrac{z}{a}, \\ y = R\sin\dfrac{z}{a}. \end{cases}$

Поверхности в пространстве

Пусть имеется пространственная система координат $\{O,\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3\}$ и Ω – множество упорядоченных пар чисел φ,θ, заданное условиями: $\alpha \le \varphi \le \beta,\ \gamma \le \theta \le \delta$.

Будем говорить, что в пространстве поверхность S задана *параметрически* вектор-функцией

$\vec{r} = \vec{F}(\varphi,\theta)$ (или в координатной форме

$$\left\| \vec{r} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} F_x(\varphi,\theta) \\ F_y(\varphi,\theta) \\ F_z(\varphi,\theta) \end{matrix} \right\|,$$

где $F_x(\varphi,\theta),\ F_y(\varphi,\theta),\ F_z(\varphi,\theta)$ – непрерывные скалярные функции двух аргументов φ,θ, определенные для $\varphi,\theta \in \Omega$), если

1) для любой упорядоченной пары чисел $\varphi,\theta \in \Omega$ точка $\vec{r} = \vec{F}(\varphi,\theta)$ лежит на S,
2) для любой точки $\vec{r}_0$, лежащей на S, существует упорядоченная пара чисел $\varphi_0,\theta_0 \in \Omega$, таких, что выполнено равенство $\vec{r}_0 = \vec{F}(\varphi_0,\theta_0)$.

Иногда поверхность в пространстве задается в виде уравнения $G(x,y,z)=0$, которое получается исключением φ и θ из системы уравнений

$$\begin{cases} x = F_x(\varphi,\theta), \\ y = F_y(\varphi,\theta), \qquad \varphi,\theta \in \Omega . \\ z = F_z(\varphi,\theta). \end{cases}$$

В ортонормированной системе координат *сфера* радиуса R с центром в точке $\begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Vmatrix}$ может быть параметрически задана в виде

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\varphi\sin\theta, \\ y = y_0 + R\sin\varphi\sin\theta, \\ z = z_0 + R\cos\theta, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le \varphi < 2\pi, \\ 0 \le \theta \le \pi, \end{array}$$

а ее уравнение в координатах

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \ .$$

Поверхность называется *алгебраической*, если ее уравнение в декартовой системе координат имеет вид $\sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k x^{p_k} y^{q_k} z^{r_k} = 0$, где p_k, q_k и r_k – целые неотрицательные числа, а числа α_k не равны нулю одновременно.

\

Число $N = \max\limits_{k=[0,m]} \{p_k + q_k + r_k\}$ называется *порядком алгебраического уравнения*, где максимум находится по всем k, для которых $\alpha_k \neq 0$. *Наименьший* из порядков алгебраических уравнений, задающих данную алгебраическую поверхность, называется *порядком алгебраической поверхности*.

Прямой круговой цилиндр

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad (N = 2)$$

Сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \qquad (N = 2)$$

Теорема **Порядок алгебраической поверхности не зависит от выбора системы координат.**