

Линии второго порядка на плоскости

Пусть на плоскости дана ортонормированная система координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Определение Линия L называется алгебраической линией второго порядка, если ее уравнение в данной системе координат имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где числа A , B и C не равны нулю одновременно, а x и y суть координаты радиуса-вектора точки, принадлежащей L .

Поскольку коэффициенты этого уравнения зависят от выбора системы координат, при исследовании свойств линий второго порядка целесообразно попытаться найти другую ортонормированную систему координат $\{O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$, в которой запись уравнения линии оказывается более простой.

Решение этой проблемы дает

Теорема Для любой линии второго порядка существует ортонормированная система координат, в которой уравнение этой линии (при $a \geq b > 0, p > 0$) имеет один из следующих девяти (называемых каноническими) видов:

Таблица 1

<i>Тип линии</i>	<i>Эллиптический</i> $\Delta > 0$	<i>Гиперболический</i> $\Delta < 0$	<i>Параболический</i> $\Delta = 0$
<i>Вид линии</i>			
<i>Пустые множества</i>	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1$		$y'^2 = -a^2 \quad \forall x'$
<i>Изолированные точки</i>	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0$		
<i>Совпадающие прямые</i>			$y'^2 = 0 \quad \forall x'$
<i>Несовпадающие прямые</i>		$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$	$y'^2 = a^2 \quad \forall x'$
<i>Кривые</i>	<i>Эллипс</i> $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$	<i>Гипербола</i> $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$	<i>Парабола</i> $y'^2 = 2px'$

где $\Delta = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.

Уравнения *касательных* к эллипсу, гиперболе и параболе, проходящих через точку (x_0, y_0) , принадлежащую линии, в канонической системе координат, соответственно имеют вид

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1, \quad \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad yy_0 = p(x + x_0).$$

Следующие задачи иллюстрируют методы исследования свойств линий второго порядка.

Пример 01. На эллипсе $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{8} = 1$ найти все точки, для которых касательная параллельна прямой $x - 2y + 4 = 0$.

Решение: 1) Уравнение касательной к данному эллипсу, проходящей через точку на эллипсе с координатами x_0 и y_0 , имеет вид: $\frac{x_0x}{32} + \frac{y_0y}{8} = 1$.

2) Условие параллельности или совпадения на плоскости двух прямых

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

имеет вид: $\exists \lambda \neq 0$ такое, что $A_1 = \lambda A_2$ и $B_1 = \lambda B_2$. В данной задаче это условие дает соотношения

$$\frac{x_0}{32} = \lambda \cdot 1 \quad \text{и} \quad \frac{y_0}{8} = \lambda \cdot (-2) \quad \Rightarrow \quad x_0 = 32\lambda \quad \text{и} \quad y_0 = -16\lambda .$$

3) Точка с координатами x_0 и y_0 принадлежит эллипсу, поэтому

$$\frac{x_0^2}{32} + \frac{y_0^2}{8} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(32\lambda)^2}{32} + \frac{(-16\lambda)^2}{8} = 1 \quad \Rightarrow \quad 64\lambda^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm \frac{1}{8} .$$

Откуда получаем две точки: $(4, -2)$ и $(-4, 2)$, являющиеся решением задачи.

Пример 02. На гиперболе $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ найти все точки, расстояние от которых до одной из асимптот равно утроенному расстоянию до другой.

Решение: 1) Уравнение касательной к данной гиперболе, проходящей через точку с координатами x_0 и y_0 , имеет вид: $\frac{x_0 x}{4} - y_0 y = 1$. При этом уравнения асимптот этой гиперболы будут $y = \pm \frac{x}{2}$.

2) Напомним, что расстояние от точки с координатами x_0 и y_0 до прямой вида $Ax + By + C = 0$, в ортонормированной системе координат дается формулой

$$L = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Следовательно, расстояния соответственно до первой и второй асимптот в нашей задаче будут

$$L_1 = \frac{\left| -\frac{x_0}{2} + y_0 \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{|-x_0 + 2y_0|}{\sqrt{5}} \quad \text{и} \quad L_2 = \frac{\left| \frac{x_0}{2} + y_0 \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{|x_0 + 2y_0|}{\sqrt{5}}.$$

Поскольку в условии не указано, к какой из асимптот точка находится ближе, то придется рассмотреть два случая: $L_1 = 3L_2$ и $3L_1 = L_2$.

3) Рассмотрим первый случай. Поскольку точка с координатами x_0 и y_0 принадлежит гиперболы, то необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} |-x_0 + 2y_0| = 3|x_0 + 2y_0|, \\ \frac{x_0^2}{4} - y_0^2 = 1. \end{cases}$$

Раскрытие символов абсолютной величины приводит к двум вариантам:

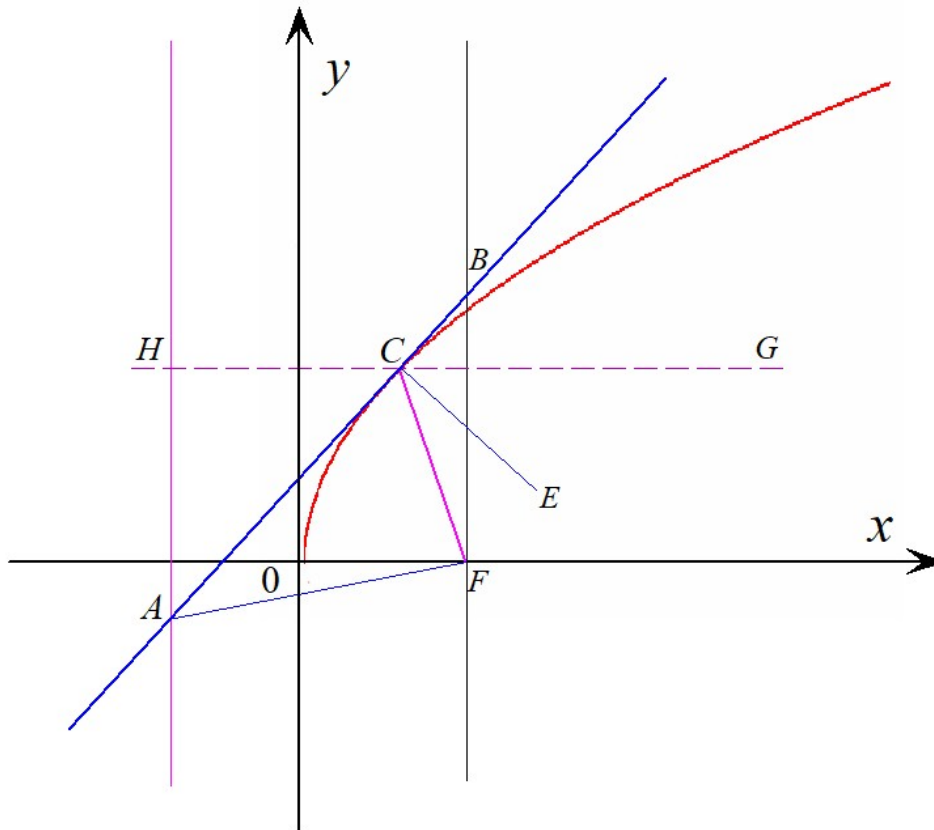
$$\begin{cases} -x_0 + 2y_0 = 3(x_0 + 2y_0), \\ \frac{x_0^2}{4} - y_0^2 = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_0 - 2y_0 = 3(x_0 + 2y_0), \\ \frac{x_0^2}{4} - y_0^2 = 1 \end{cases}$$

В первом варианте из первого уравнения имеем $-x_0 = y_0$, что, в силу второго уравнения, дает $-\frac{3y_0^2}{4} = 1$, то есть, здесь решений нет.

Во втором же варианте из первого уравнения получаем $x_0 = -4y_0$. Тогда из второго уравнения имеем $3y_0^2 = 1$, или $y_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_0 = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$. Это дает два решения задачи $\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

4) Рассуждения в случае $3L_1 = L_2$ аналогичны. Они дают два решения задачи $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, которые также могут быть получены из первой пары решений и симметричности ветвей гиперболы относительно канонических координатных осей.

Пример 03. *Выяснить, верно ли утверждение: касательная к параболе пересекает директрису и фокальную хорду, перпендикулярную оси параболы, в точках равноудаленных от фокуса. Ответ обосновать.*



Пояснения к рисунку:

красная линия – параболa,
синяя прямая – касательная,
прямая AH – директриса,
прямая FB – фокальная хорда,
 C – точка касания параболы,
 A – точка пересечения касательной и директрисы,
 B – точка пересечения касательной и фокальной хорды,
прямая HG параллельна оси Ox ,
прямая CE перпендикулярна касательной.

Приведем два варианта доказательства справедливости данного утверждения: стандартное геометрическое (при помощи чертежа) и аналитическое, не использующее наглядных образов.

Геометрическое доказательство

Углы GCE и ECF равны по оптическому свойству параболы и равны α .

Углы ECF и CBF равны α как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

Углы DAC и CBF равны α как накрестлежащие при параллельных прямых.

Углы ACF и BCG равны $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Угол HCA также равен $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Тогда в силу $HC = CF$ (для параболы эксцентриситет равен 1) треугольники AHC и ACF равные, значит равны α углы DAC и CAF .

Но тогда равны α углы CAF и CBF , то есть треугольник ABF равнобедренный и $AF = BF$.

Аналитическое доказательство

Пусть точка касания, имеет координаты x_0 и y_0 . Тогда мы имеем, что $y_0^2 = 2px_0$, а уравнение касательной будет $y_0 y = p(x + x_0)$. Кроме того, учтем, что уравнение директрисы есть $x = -\frac{p}{2}$, а уравнение фокальной хорды $x = \frac{p}{2}$. Также заметим, что FB равно модулю ординаты точки B , а FA есть расстояние между точками F и A .

Точка фокуса F имеет координаты $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Тогда координаты точки B определяются так:

$$\begin{cases} x_B = \frac{p}{2} \\ y_0 y_B = p(x_B + x_0) \end{cases} \Rightarrow y_B = \frac{p}{y_0} \left(\frac{p}{2} + x_0 \right) \Rightarrow y_B = \frac{p^2 + px_0}{2y_0}.$$

С другой стороны, координаты точки A находятся из системы

$$\begin{cases} x_A = -\frac{p}{2} \\ y_0 y_A = p(x_A + x_0) \end{cases} \Rightarrow y_A = \frac{p}{y_0} \left(-\frac{p}{2} + x_0 \right) \Rightarrow y_A = \frac{-p^2 + 2px_0}{2y_0}.$$

Поскольку система координат ортонормированная, то с учетом $y_0^2 = 2px_0$ получаем

$$\begin{aligned} FA &= \sqrt{\left(x_A - \frac{p}{2}\right)^2 + y_A^2} = \sqrt{\left(-\frac{p}{2} - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{-p^2 + 2px_0}{2y_0}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{4p^2 y_0^2 + p^4 - 4p^3 x_0 + 4p^2 x_0^2}{4y_0^2}} = \sqrt{\frac{8p^3 x_0 + p^4 - 4p^3 x_0 + p^2 x_0^2}{4y_0^2}} = \left| \frac{p^2 + px_0}{2y_0} \right| = FB. \end{aligned}$$

Практическая классификация линий второго порядка

I. Анализ упрощается, если уравнение линии второго порядка имеет специальный вид.

Пример 04. Выяснить тип линии второго порядка (не приводя ее уравнение к каноническому виду) $(x - 4y + 3)^2 + (2x + 3y - 1) = 0$.

Решение. Обозначим $\begin{cases} x' = x - 4y + 3, \\ y' = 2x + 3y - 1, \end{cases}$ тогда получим $x'^2 + y' = 0$. При этом будет

$$\det \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0, \text{ значит, эти соотношения могут быть формулами пе-}$$

рехода. Поскольку при замене системы координат аффинная классификация линий сохраняется, то линия в условии - парабола.

Общий случай линии второго порядка.

$$\text{Пусть } Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

1) Предварительно заметим, что без ограничения общности можно считать выполненными условия: $B \geq 0$ и $A \geq C$. Действительно, если $B < 0$, то можно изменить знаки всех коэффициентов в уравнении линии.

Если же $A < C$, то, перейдя к новой ортонормированной системе координат, для которой $\vec{e}'_1 = \vec{e}_2$; $\vec{e}'_2 = \vec{e}_1$; $\vec{OO}' = \vec{o}$, мы получим желаемое соотношение, поскольку при таком переходе имеют место равенства $x = y'$; $y = x'$ по правилам построения формул перехода. Заметим также, что при этой замене Δ не меняется, поскольку

$$\det \begin{vmatrix} C & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \Delta.$$

2) Поворот вокруг начала координат $\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \end{cases}$ приводящий к тому, что слагаемое $2Bxy$ исчезает ($B' = 0$), выполняется при условии:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2B}{A-C}; \quad \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2B}{A-C} \text{ или, равносильному ему,} \\ \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{A-C}{B} \operatorname{tg} \alpha - 1 &= 0, \quad B \neq 0, \end{aligned}$$

$$\text{Это дает } A' = \frac{A+C}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4B^2 + (A-C)^2} \quad \text{и} \quad C' = \frac{A+C}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{4B^2 + (A-C)^2}.$$

Пример 05: В прямоугольной системе координат построить линию второго порядка

$$3x^2 + 12xy + 12y^2 - 2x + 46y + 67 = 0 .$$

Решение :

1°. Поскольку $B \geq 0$, но $A \leq C$, то делаем замену переменных: $\begin{cases} x = y', \\ y = x'. \end{cases}$ (А)

Получим уравнение $12x'^2 + 12x'y' + 3y'^2 + 46x' - 2y' + 67 = 0$.

2°. Делаем поворот системы координат на угол α против часовой стрелки. При-
чем $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$.

Формулы этой замены $\begin{cases} x' = x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha, \\ y' = x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha. \end{cases}$

Величину α находим из условия: $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C} = \frac{2 \cdot 6}{12-3} = \frac{4}{3}$.

Используя формулы: $\frac{1}{\cos^2 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 2\alpha + 1$ и $\begin{cases} 1 + \cos 2\phi = 2 \cos^2 \phi \\ 1 - \cos 2\phi = 2 \sin^2 \phi \end{cases}$,

находим, что $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$ и $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$. То есть, $\begin{cases} x' = \frac{2}{\sqrt{5}} x'' - \frac{1}{\sqrt{5}} y'', \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}} x'' + \frac{2}{\sqrt{5}} y''. \end{cases}$ (В)

Поскольку

$$A'' = \frac{A' + C'}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4B'^2 + (A' - C')^2} = \frac{12+3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot 6^2 + (12-3)^2} = \frac{15}{2} + \frac{\sqrt{144+81}}{2} = 15$$
$$\text{и } C'' = \frac{A' + C'}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4B'^2 + (A' - C')^2} = 0,$$

то мы приходим к уравнению вида:

$$15x''^2 + \frac{90}{\sqrt{5}}x'' - \frac{50}{\sqrt{5}}y'' + 67 = 0 \quad \text{или} \quad x''^2 + 2\frac{3}{\sqrt{5}}x'' - 2\frac{5}{3\sqrt{5}}y'' + \frac{67}{15} = 0.$$

3°. Выделяем полный квадрат: $x''^2 + 2\frac{3}{\sqrt{5}}x'' + \frac{9}{5} - 2\frac{5}{3\sqrt{5}}y'' + \frac{67}{15} - \frac{9}{5} = 0$ или

$$\left(x'' + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2\frac{5}{3\sqrt{5}}y'' + \frac{8}{3} = 0. \text{ Откуда получаем:}$$

$$\left(x'' + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2\frac{\sqrt{5}}{3}\left(y'' - \frac{4}{\sqrt{5}}\right).$$

Каноническую форму уравнения нашей линии получим, переименовав оси и

сдвинув начало координат, то есть, при замене:
$$\begin{cases} x'' = y''' - \frac{3}{\sqrt{5}}, \\ y'' = x''' + \frac{4}{\sqrt{5}}. \end{cases} \quad (C)$$

Эта форма будет иметь вид $y'''^2 = 2px'''$, то есть это парабола, у которой фокаль-

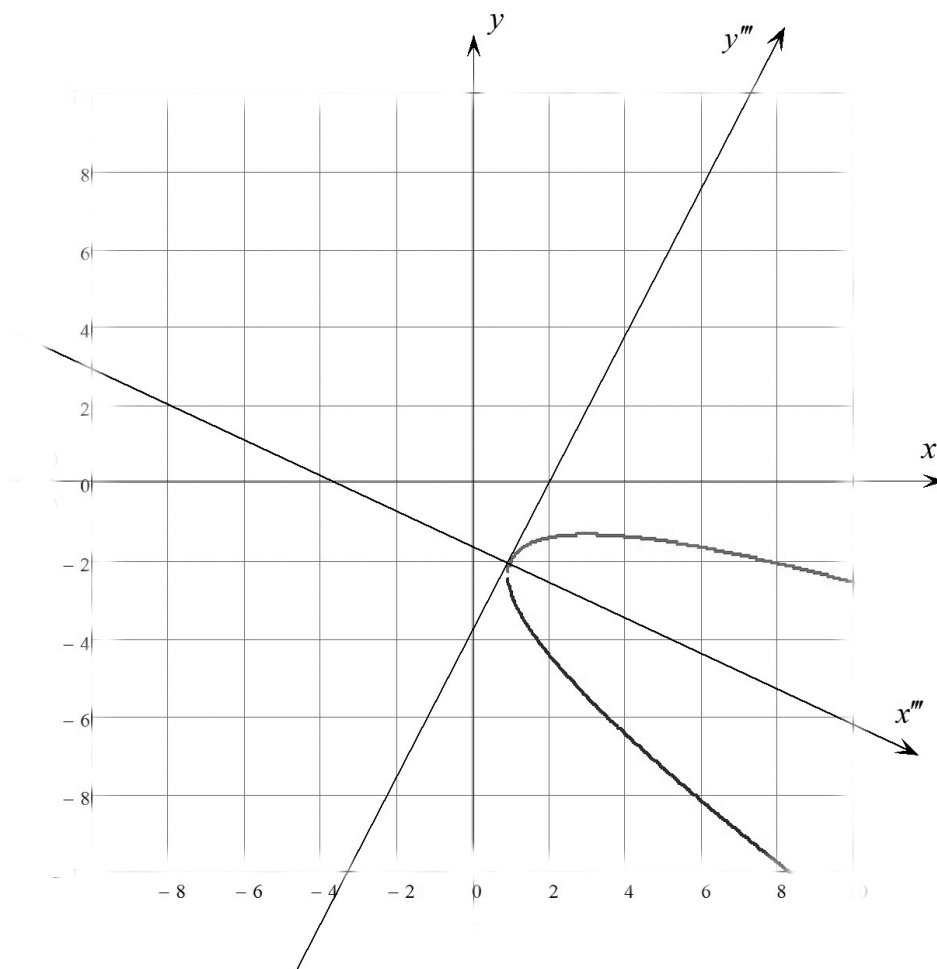
ный параметр $p = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

- 4°. Найдем итоговые формулы перехода, подставив (С) в (В), а результат этой подстановки подставим в (А). Окончательно получим

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x''' + \frac{1}{\sqrt{5}}y''' + 1, \\ y = -\frac{1}{\sqrt{5}}x''' + \frac{2}{\sqrt{5}}y''' - 2. \end{cases}$$

Это означает, что итоговая матрица перехода $\|S\| = \begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}$, а итоговое начало координат (вершина параболы) будет в точке $\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}$.

- 5°. Учитывая, что столбцы матрицы $\|S\|$ суть координатные столбцы базисных векторов e_1''' , e_2''' , а вектор e_1''' есть направляющий вектор оси параболы, строим эскиз:



Графический вариант решения задачи получается удалением ('стиранием') с рисунка осей канонической системы координат $\{O'', x'', y''\}$.