

Операторы и функционалы. Отображения и преобразования плоскости

Определение Будем говорить, что задан оператор \hat{A} , действующий на множестве Ω со значениями в множестве Θ , если указано правило, по которому каждому элементу множества Ω поставлен в соответствие единственный элемент из множества Θ .

Символически результат действия оператора \hat{A} обозначается так: $y = \hat{A}x$, $x \in \Omega$, $y \in \Theta$. Элемент y в этом случае называется *образом элемента x* , элемент x называется *прообразом элемента y* .

Определение Если Θ – область значений некоторого оператора – является числовым множеством, то говорят, что на множестве Ω задан функционал.

Функционалы обычно обозначаются так же, как и функции: например, $y = \Phi(x)$, $x \in \Omega$.

Определение Оператором \hat{A} , отображающим плоскость (или просто отображением плоскости) P на плоскость Q , называется правило, по которому каждой точке плоскости P поставлена в соответствие единственная точка плоскости Q .

Отображение плоскости принято обозначать следующим образом: $\hat{A} : P \rightarrow Q$.

Определение Отображение $\hat{A} : P \rightarrow Q$ называется взаимно однозначным, если каждая точка плоскости Q имеет прообраз и притом единственный.

Отображение \hat{A} плоскости P в саму себя называется преобразованием плоскости P .

Определение Последовательное выполнение преобразований

$$M^* = \hat{A}M \quad \text{и} \quad M^{**} = \hat{B}M^*$$

называется *произведением (или композицией)* этих преобразований.

Произведение операторов записывается в виде $M^{**} = \hat{B}\hat{A}M$. Заметим, что в общем случае это произведение *не коммутативно*, но *ассоциативно* и *дистрибутивно*.

Определение Преобразованием, *обратным* взаимно однозначному преобразованию $\hat{A}: P \rightarrow P$, называется оператор $\hat{A}^{-1}: P \rightarrow P$, такой, что для каждой точки M плоскости P имеет место

$$\hat{A}^{-1}(\hat{A}M) = \hat{A}(\hat{A}^{-1}M) = M.$$

Определение Точка плоскости P , переводимая преобразованием \hat{A} сама в себя, называется *неподвижной точкой* для \hat{A} . Множество на P , состоящее из неподвижных точек для \hat{A} , называется *неподвижным* для \hat{A} .

Множество точек P , переходящее при \hat{A} само в себя, называется *инвариантным множеством преобразования* \hat{A} .

Например, у неподвижной прямой каждая точка является неподвижной. В то время, как у инвариантной прямой образ точки не обязательно совпадает с прообразом, но он принадлежит этой прямой.

Линейные операторы на плоскости

Пусть на плоскости с декартовой системой координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ каждой ее точке M поставлена в однозначное соответствие точка M^* .

И пусть координатные представления радиусов-векторов этих точек суть $\left\| \vec{r}_M \right\|_g = \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\|$ и

$\left\| \vec{r}_{M^*} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\|$, тогда координаты x^* и y^* будут некоторыми функциями от x и y

$$\begin{cases} x^* = F_x(x, y) \\ y^* = F_y(x, y) \end{cases}$$

тогда равенство $\left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{matrix} \right\|$ можно рассматривать как представление оператора $r_{M^*}^{\rightarrow} = \hat{A} r_M^{\rightarrow}$

в системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$.

Далее мы будем рассматривать частные, но важные для приложений виды функций $F_x(x, y)$ и $F_y(x, y)$.

Определение Оператор $r_{M^*}^{\rightarrow} = \hat{A}r_M^{\rightarrow}$ называется *линейным оператором*, если в каждой декартовой системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ он задается формулами

$$\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1, \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2. \end{cases}$$

При помощи операций с матрицами линейный оператор может быть записан в виде

$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A} \\ g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, где матрица

$$\begin{pmatrix} \hat{A} \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей линейного оператора* \hat{A} (координатным представлением \hat{A}) в $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$.

Определение Оператор $r_{M^*}^{\rightarrow} = \hat{A}r_M^{\rightarrow}$ называется *линейным однородным оператором*, если он удовлетворяет определению 5.3.1 и, кроме того, $\beta_1 = \beta_2 = 0$.
Если же $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$, то оператор \hat{A} называется *неоднородным*.

Пример К линейным однородным операторам относятся:

- оператор \hat{A} , действие которого сводится к умножению координат радиусов-вектора прообраза на фиксированные положительные числа, называемый “оператором сжатия к осям”, или просто “сжатием к осям”, имеющий матрицу

$$\|\hat{A}\|_g = \begin{vmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{vmatrix}, \text{ где числа } \kappa_1 \text{ и } \kappa_2 \text{ – коэффициенты сжатия};$$

- оператор *ортогонального проектирования* радиусов-векторов точек плоскости на некоторую заданную ось, проходящую через начало координат;

- *гомотетия* с коэффициентом k и с центром в начале координат.

Теорема Для линейного однородного оператора \hat{A} справедливы соотношения:

$$1^\circ. \hat{A}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \hat{A}\vec{r}_1 + \hat{A}\vec{r}_2 \quad \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2.$$

$$2^\circ. \hat{A}(\lambda \vec{r}) = \lambda \hat{A}\vec{r} \quad \forall \vec{r}, \lambda.$$

Из этих теорем вытекает важное следствие.

Следствие **Столбцами матрицы линейного однородного оператора \hat{A} в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ являются координатные представления векторов $\hat{A}\vec{g}_1$ и $\hat{A}\vec{g}_2$.**

Каждому линейному однородному оператору преобразования плоскости в конкретном базисе соответствует однозначно определяемая квадратная матрица второго порядка, а каждая квадратная матрица второго порядка задает в этом базисе некоторый линейный однородный оператор.

Проверим первое утверждение.

Очевидно, что в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ координатные представления (координатные столбцы) самих базисных векторов имеют вид $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда из формул $\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y, \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y, \end{cases}$ описывающих действие линейного однородного оператора \hat{A} , следует, что образы базисных элементов $\{\vec{g}_1^*, \vec{g}_2^*\}$ будут иметь координатные представления $\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix}$, которые и являются столбцами матрицы $\|\hat{A}\|_g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$.

Отметим также, что, если пару векторов $\{\vec{g}_1^*, \vec{g}_2^*\}$ (в случае их линейной независимости) принять за новый базис на плоскости, то матрица перехода от исходного базиса к новому, в силу ее определения, будет совпадать с матрицей преобразования \hat{A} , то есть, будет верным равенство

$$\|S\| = \|\hat{A}\|_g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Задача *Исходя из правил действия с матрицами, показать, что для линейных однородных операторов на плоскости справедливы утверждения:*

1°. *Матрица произведения линейных однородных операторов равна произведению матриц операторов-сомножителей: $\|\hat{A}\hat{B}\|_g = \|\hat{A}\|_g \|\hat{B}\|_g$.*

2°. *Если \hat{A}^{-1} есть оператор, обратный линейному однородному оператору \hat{A} , то*

$$\|\hat{A}^{-1}\|_g = \|\hat{A}\|_g^{-1}.$$

Выясним теперь, как изменится матрица линейного однородного оператора при замене базиса. Имеет место

Теорема **Пусть в системе координат $\{\vec{O}, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ некоторый однородный линейный оператор (преобразование) имеет матрицу $\|\hat{A}\|_g$. Тогда в системе координат $\{\vec{O}, \vec{g}'_1, \vec{g}'_2\}$ этот оператор будет иметь матрицу**

$$\|\hat{A}\|_{g'} = \|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_g \|S\|,$$

где $\|S\|$ – матрица перехода.

Следствие **Величина $\det \|\hat{A}\|_g$ не зависит от выбора базиса.**

Аффинные преобразования и их свойства

Линейные операторы, преобразующие плоскость саму в себя (то есть линейные операторы вида $\hat{A}:P \rightarrow P$) и имеющие обратный оператор, играют важную с практической точки зрения роль и потому выделяются в специальный класс.

Определение Линейный оператор

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A} \\ g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix},$$

отображающий плоскость P саму на себя, с матрицей $\begin{pmatrix} \hat{A} \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, для

которой в любом базисе $\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \neq 0$, называется *аффинным преобразованием плоскости*.

- Теорема
(признак
аффинности) .
- Если для линейного преобразования плоскости $\det \|\hat{A}\|_g \neq 0$ в некоторой декартовой системе координат, то это условие будет выполнено и в любой другой декартовой системе координат.
- Теорема
- Каждое аффинное преобразование имеет единственное обратное, которое также является аффинным.
- Теорема
- При аффинном преобразовании всякий базис переходит в базис, а для любых двух базисов существует единственное аффинное преобразование, переводящее первый базис во второй.

- Теорема **При аффинном преобразовании образом прямой линии является прямая.**
- Теорема **При аффинном преобразовании образом параллельных прямых являются параллельные прямые, общая точка пересекающихся прямых-прообразов переходит в точку пересечения их образов.**
- Теорема **При аффинном преобразовании сохраняется деление отрезка в данном отношении.**
- Теорема **При аффинном преобразовании отношение длин образов двух отрезков, лежащих на параллельных прямых, равно отношению длин их прообразов.**
- Теорема **При аффинном преобразовании всякая декартова система координат переходит в декартову систему координат, причем координаты образа каждой точки плоскости в новой системе координат будут совпадать с координатами прообраза в исходной.**

Будет справедлива

Теорема

- 1°. При аффинном преобразовании величины S^* – площади образа параллелограмма и S – площади прообраза параллелограмма связаны соотношением

$$S^* = \left| \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \right| \cdot S.$$

- 2°. При аффинном преобразовании ориентация образов пары неколлинеарных векторов совпадает с ориентацией прообразов, если

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

и меняется на противоположную, если

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} < 0.$$

Теорема **Для любой линии второго порядка, указанной в формулировке теоремы о канонической классификации:**

- **при аффинном преобразовании ее тип и вид не может измениться;**
- **найдется аффинное преобразование, переводящее ее в любую другую линию второго порядка этого же типа и вида.**

Теорема **Для всякого аффинного преобразования существует пара взаимно ортогональных направлений, которые переводятся данным аффинным преобразованием во взаимно ортогональные.**

Ортогональные преобразования плоскости

Определение Ортогональным преобразованием плоскости P называется линейный оператор \hat{Q} вида

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \|\hat{Q}\|_e \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix},$$

матрица которого $\|\hat{Q}\|_e = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix}$ ортогональная в любой ортонормированной системе координат.

Теорема В ортонормированной системе координат ортогональное преобразование плоскости сохраняет:

- 1) скалярное произведение векторов;
- 2) длины векторов и расстояния между точками плоскости;
- 3) углы между прямыми.

Теорема Каждое аффинное преобразование может быть представлено в виде произведения ортогонального преобразования и двух сжатий по взаимно ортогональным направлениям.