

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (Задачи)

Будем использовать следующие обозначения:

в *исходной* системе координат для *данной* точки, с координатным представлением $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *образом* будет являться точка с координатным представлением $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$. В *новой* системе координат (если такая потребуется) *данная* точка будет иметь координатное представление $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, а координатное представление ее образа будет $\begin{pmatrix} x'^* \\ y'^* \end{pmatrix}$.

Пример 01. Для прямой $3x - 2y - 2 = 0$ найти ее прообраз при преобразовании плос-

$$\text{кости} \begin{cases} x^* = -2x + y - 3, \\ y^* = -x + 2y - 3. \end{cases}$$

Решение: 1) Данное преобразование аффинное, поскольку $\det \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Из-

вестно, что при аффинном преобразовании прямая переходит в прямую. Поэтому задача заключается в отыскании связи между координатами x и y , при условии, что $3x^* - 2y^* - 2 = 0$.

2) Подставляем в уравнение образа $3x^* - 2y^* - 2 = 0$ формулы преобразования, получаем искомую линейную связь

$$3(-2x + y - 3) - 2(-x + 2y - 3) - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x + y + 5 = 0 .$$

Пример 02. Для прямой $9x - 9y - 7 = 0$ найти ее образ при преобразовании плоскости

$$\begin{cases} x^* = 6y - 5, \\ y^* = 3x + 6y - 5. \end{cases}$$

Решение: 1) Это преобразование аффинное, поскольку $\det \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$. По-

скольку при аффинном преобразовании прямая переходит в прямую, то данная задача заключается в отыскании связи между координатами x^* и y^* , при условии, что $9x - 9y - 7 = 0$.

2) Для этого нам потребуются формулы преобразования, *обратного* к данному. Известно, что для каждого аффинного преобразования существует единственное обратное и оно также аффинное. В нашем случае рассмотрим формулы данного преобразования как систему линейных уравнений с неизвестными x и y . Выразив x и y через x^* и y^* , получим

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3}x^* + \frac{1}{3}y^*, \\ y = \frac{1}{6}x^* + \frac{5}{6}. \end{cases}$$

3) Подставив теперь в уравнение прообраза $9x - 9y - 7 = 0$ формулы обратного преобразования, получаем уравнение искомого образа

$$9\left(-\frac{1}{3}x^* + \frac{1}{3}y^*\right) - 9\left(\frac{1}{6}x^* + \frac{5}{6}\right) - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad 9x^* - 6y^* + 58 = 0.$$

Пример 03. При некотором аффинном преобразовании плоскости имеет место следующее:

$$\begin{aligned} \text{образом точки } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{ является точка } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \text{образом точки } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{ является точка } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \text{образом точки } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{ является точка } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Какие точки плоскости остаются при этом преобразовании неподвижными?

Решение: 1) Пусть данное задается формулами $\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1, \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2. \end{cases}$ Найдем его.

$$2) \text{ Из первого условия } \begin{cases} 0 = \alpha_{11} \cdot 0 + \alpha_{12} \cdot 0 + \beta_1, \\ 1 = \alpha_{21} \cdot 0 + \alpha_{22} \cdot 0 + \beta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 1. \end{cases}$$

$$\text{Из второго условия } \begin{cases} 1 = \alpha_{11} \cdot 0 + \alpha_{12} \cdot 1 + 0, \\ 1 = \alpha_{21} \cdot 0 + \alpha_{22} \cdot 1 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{12} = 1 \\ \alpha_{22} = 0. \end{cases}$$

$$\text{Наконец, из третьего условия } \begin{cases} 0 = \alpha_{11} \cdot 1 + 1 \cdot 1, \\ 0 = \alpha_{21} \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{11} = -1, \\ \alpha_{21} = -1. \end{cases}$$

$$\text{В итоге: } \begin{cases} x^* = -x + y, \\ y^* = -x + 1. \end{cases} \text{ Это преобразование очевидно аффинное.}$$

3) Пусть $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ - неподвижная точка полученного преобразования. Тогда

$$\text{должно быть } \begin{cases} x_0 = -x_0 + y_0, \\ y_0 = -x_0 + 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{3}, \\ y_0 = \frac{2}{3}. \end{cases} \text{ Неподвижная точка}$$

единственная.

Пример 04. Найти аффинное преобразование плоскости, при котором все точки прямой $x + y - 1 = 0$ неподвижны, а точка $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ имеет своим образом точку с координатами $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение: 1) Пусть искомое преобразование задается формулами

$$\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1, \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2. \end{cases}$$

Их условия $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ сразу получаем, что $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Используем теперь условие неподвижности каждой точки прямой $x + y - 1 = 0$.

Пусть точка $\begin{pmatrix} x_0 \\ 1 - x_0 \end{pmatrix} \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$ произвольная точка этой прямой. Тогда условие ее неподвижности будет:

$$\begin{cases} x_0 = \alpha_{11}x_0 + \alpha_{12}(1 - x_0) + 1, \\ 1 - x_0 = \alpha_{21}x_0 + \alpha_{22}(1 - x_0) + 1. \end{cases}$$

3) Эти равенства перегруппируем к виду

$$\begin{cases} (\alpha_{11} - \alpha_{12} - 1)x_0 + (\alpha_{12} + 1) = 0, \\ (\alpha_{21} - \alpha_{22} + 1)x_0 + \alpha_{22} = 0. \end{cases}$$

Откуда, с учетом $\forall x_0 \in \mathbf{R}$, из

$$\begin{cases} \alpha_{11} - \alpha_{12} - 1 = 0, \\ \alpha_{12} + 1 = 0, \\ \alpha_{21} - \alpha_{22} + 1 = 0, \\ \alpha_{22} = 0, \end{cases} \text{ получаем ответ задачи: } \begin{cases} x^* = -y + 1, \\ y^* = -x + 1. \end{cases}$$

Пример 05. Найти все инвариантные прямые аффинного преобразования плоскости

$$\begin{cases} x^* = -28x + 18y + 65, \\ y^* = -45x + 29y + 107. \end{cases}$$

Решение: 1) Пусть прямая-прообраз имеет уравнение $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 > 0$, а ее образ - уравнение $Ax^* + By^* + C = 0$ или

$$A(-28x + 18y + 65) + B(-45x + 29y + 107) + C = 0.$$

А это значит, что $(-28A - 45B)x + (18A + 29B)y + (65A + 107B + C) = 0$.

2) Поскольку уравнение прямой определяется с точностью до ненулевого множителя, то условие *инвариантности* будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} A^* = kA = -28A - 45B, \\ B^* = kB = 18A + 29B, \\ C^* = kC = 65A + 107B + C. \end{cases}$$

3) Заметим, что первые два уравнения образуют линейную однородную систему:

$$\begin{cases} (-28 - k)A - 45B = 0, \\ 18A + (29 - k)B = 0. \end{cases}$$

Поскольку A и B не могут равняться 0 одновременно, то необходимо выполнение (следующего из теории систем линейных уравнений) условия:

$$\det \begin{vmatrix} -28 - k & -45 \\ 18 & 29 - k \end{vmatrix} = 0,$$

которое дает

$$(k + 28)(k - 29) + 18 \cdot 45 = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 + k - 2 = 0.$$

Откуда либо $k = 2$, либо $k = -1$ и можно взять

при $k = 2$ $A = 3, B = -2, C = -7$, а при $k = -1$ $A = 5, B = -3, C = 24$.

Следовательно, искомые инвариантные прямые будут:

$$3x - 2y - 7 = 0 \quad \text{и} \quad 5x - 3y + 24 = 0.$$

Пример 06. Найти аффинное преобразование плоскости, при котором:

- 1) каждая из прямых $x - 2y - 3 = 0$ и $-x + y + 1 = 0$ инвариантна,
- 2) точка $M = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ имеет своим образом точку $M^* = \begin{pmatrix} -39 \\ -32 \end{pmatrix}$.

Решение:

1). Перейдем в *новую* систему координат, в которой *началом* O' служит точка пересечения данных прямых, а *новыми базисными векторами* являются направляющие векторы этих же прямых.

Координаты O' – точки пересечения прямых, определяется из системы уравнений:

$$\begin{cases} x_0 - 2y_0 = 3, \\ -x_0 + y_0 = -1. \end{cases}$$

Откуда $x_0 = -1$ и $y_0 = -2$. Это означает, что $\vec{OO'} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

В качестве направляющих векторов прямых очевидно можно взять $\vec{g'_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и

$\vec{g'_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда, согласно *теореме о формулах перехода*, получим, что выраже-

ние *старых* координат через *новые* имеет вид: $\begin{cases} x = 2x' + y' - 1, \\ y = x' + y' - 2. \end{cases}$ Откуда находим и

формулы *обратного* перехода: $\begin{cases} x' = x - y - 1, \\ y' = -x + 2y + 3. \end{cases}$

2). Исходя из условия задачи, можно утверждать, что при искомом аффинном преобразовании:

- 1) Точка O' будет неподвижной,
- 2) а координатными осями новой системы координат будут инвариантные прямые.

Тогда в новой системе координат формулы искомого аффинного преобразования будут иметь следующий, очень простой вид: $\begin{cases} x^* = \lambda x', \\ y^* = \mu y', \end{cases}$ где λ и μ – некоторые константы.

3). Значения λ и μ найдем из условия $M \rightarrow M^*$, указанного в условии в задаче. Действительно, используя формулы *обратного* перехода, мы получим, что в новой системе координат $M(8; -11)$, а $M^*(-8; -22)$, Откуда очевидно, что $\lambda = -1$ и $\mu = 2$.

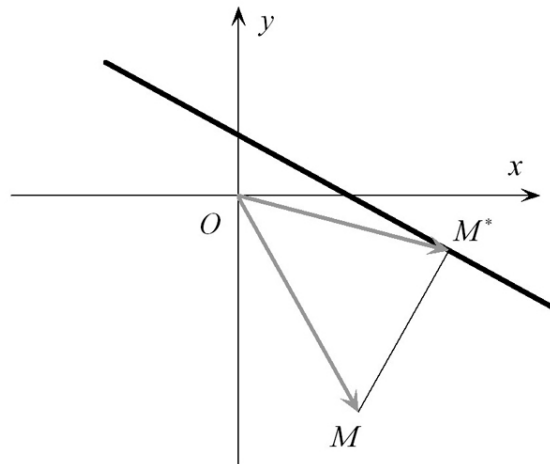
4). Наконец, подставив в равенства $\begin{cases} x^* = -x', \\ y^* = 2y', \end{cases}$ формулы *обратного* перехода, получим уравнения связи между координатами образа и прообраза в *исходной системе координат* (то есть, формулы, задающие искомое аффинное преобразование):

$$\begin{cases} x^* = -4x + 6y + 7, \\ y^* = -3x + 5y + 5. \end{cases}$$

Пример 07. В ортонормированной системе координат найти матрицу оператора, ортогонально проектирующего радиусы-векторы точек координатной плоскости на прямую $x + 3y - 2 = 0$.

Решение:

1). Пусть точка-прообраз M имеет радиус-вектор $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, а точка M^* – образ точки M – соответственно ее радиус-вектор $\vec{r}_0^* = \begin{pmatrix} x_0^* \\ y_0^* \end{pmatrix}$.



Из рисунка следует, что M^* есть точка пересечения прямой $x + 3y - 2 = 0$ и перпендикуляра к ней, проходящего через M .

2) Поскольку нормальный вектор прямой $x + 3y - 2 = 0$ является направляющим вектором этого перпендикуляра, то уравнение последнего будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} + \tau \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}.$$

Откуда следует, что координаты радиуса-вектора точки M^* будут удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x_0^* = x_0 + \tau, \\ y_0^* = y_0 + 3\tau, \\ x_0^* + 3y_0^* - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_0^* = \frac{9}{10}x_0 - \frac{3}{10}y_0 + \frac{1}{5}, \\ y_0^* = -\frac{3}{10}x_0 + \frac{1}{10}y_0 + \frac{3}{5}. \end{cases}$$

3) Используя правила операций с матрицами, получаем окончательно, что

$$\begin{pmatrix} x_0^* \\ y_0^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

то есть

$$\| \hat{A} \|_e = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что оператор ортогонально проектирования точек плоскости на фиксированную прямую линейный, но не аффинный, поскольку между образами и прообразами взаимной однозначности нет. Поэтому, естественно, и получилось, что $\det \| \hat{A} \|_e = 0$.