Определители

Рассмотрим множество, состоящее из натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, n$. Будем обозначать *перестановки* этих чисел (то есть последовательную их запись в некотором порядке без пропусков и повторений) как $\{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n\}$. Напомним, что полное число таких различных перестановок равно $n!$.

Определение Будем говорить, что числа k_i и k_j образуют в перестановке *беспорядок* (*нарушение порядка,* или *инверсию*), если при $i < j$ имеет место $k_i > k_j$.

Полное число беспорядков в перестановке $\{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n\}$ будем обозначать $\text{Б}(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Например, $\text{Б}(3, 1, 4, 2) = 3$.

Пусть дана квадратная матрица

$$\|A\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{matrix} \right\| = \| \alpha_{ij} \|; \; i, j = [1, n].$$

Определение *Детерминантом* (или *определителем*) квадратной матрицы $\|A\|$ размера $n \times n$ называется число $\det\|A\|$, получаемое по формуле

$$\det\| A \| = \sum_{\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n\}} (-1)^{\text{Б}(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \dots \alpha_{nk_n} ,$$

где $\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n\}$ – *всевозможные различные* перестановки, образованные из номеров столбцов матрицы $\| A \|$.

Поскольку в этом определении указано, что сумма берется по всем *возможным различным* перестановкам, то число слагаемых равно $n!$.

Из данного определения также вытекает, что каждое слагаемое содержит в качестве сомножителя по одному элементу матрицы из каждого столбца и каждой строки.

Свойства определителей

Теорема. **При транспонировании квадратной матрицы ее определитель не меняется.**

Следствие **Всякое свойство определителя матрицы, сформулированное для ее столбцов, справедливо для ее строк, и наоборот.**

Теорема **При перестановке двух столбцов матрицы знак ее определителя меняется на противоположный.**

Следствие **Определитель матрицы, содержащей два одинаковых столбца, равен нулю.**

Теорема

(линейное свойство определителя).

Если k-й столбец матрицы задан в виде линейной комбинации некоторых "новых" столбцов, то ее определитель представим в виде той же линейной комбинации определителей матриц, k-ми столбцами которых являются соответствующие "новые" столбцы из исходной линейной комбинации.

Следствия

.

При вычислении определителя из столбца матрицы можно выносить общий множитель.

.

Если к некоторому столбцу матрицы прибавить линейную комбинацию остальных ее столбцов, то определитель не изменится.

Теорема

Определитель произведения матриц размера $n \times n$ равен произведению их определителей, то есть

$$\det(\|A\|\|B\|) = \det\|A\| \cdot \det\|B\|.$$

Разложение определителей

Выберем в *квадратной* матрице n-го порядка $\|A\|$ строки с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$ и столбцы с номерами $j_1, j_2, \dots, j_k$, где $1 \le k \le n$.

Определения

Детерминант квадратной матрицы порядка k, образованной элементами, стоящими на пересечении строк $i_1, i_2, ..., i_k$ и столбцов $j_1, j_2, ..., j_k$, называется *минором* k*-го порядка* и обозначается $M^{j_1, j_2, ..., j_k}_{i_1, i_2, ..., i_k}$.

Детерминант квадратной матрицы порядка $n-k$, образованной элементами, остающимися после вычеркивания строк $i_1, i_2, ..., i_k$ и столбцов $j_1, j_2, ..., j_k$, называется *минором, дополнительным к минору* $M^{j_1, j_2, ..., j_k}_{i_1, i_2, ..., i_k}$, и обозначается $\overline{M}^{j_1, j_2, ..., j_k}_{i_1, i_2, ..., i_k}$.

Выберем в матрице $\|A\|$ i-ую строку и j-ый столбец, на пересечении которых расположен элемент α_{ij}. Удалим из $\|A\|$ выбранные строку и столбец, рассмотрим квадратную матрицу $\|A^{+}\|$ размера $(n-1)\times(n-1)$.

Определение Детерминант матрицы $\|A^{+}\|$ называется *дополнительным минором* $\overline{M}_{i}^{j}$ *элемента* α_{ij}.

Сгруппируем в определении детерминанта матрицы $\|A\|$ – все $(n-1)!$ слагаемых, содержащих элемент α_{ij}, и вынесем его за скобки. Получим выражение вида

$$\det\|A\| = \alpha_{ij}D_{ij} + \ldots .$$

Определение Число D_{ij} называется *алгебраическим дополнением* элемента α_{ij}.

Заметим, что по этому определению имеют место равенства

$$\det\|A\| = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}D_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\alpha_{kj}D_{kj} \qquad \forall j=[1,n],\ \forall i=[1,n],$$

которые можно использовать для вычисления определителей квадратных матриц.

Итак, имеют место равенства

$$\det\|A\| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} D_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} D_{kj} \qquad \forall j = [1,n],\ \forall i = [1,n],$$

которые можно использовать для вычисления определителей квадратных матриц, находя значения алгебраических дополнений при помощи соотношений, которые устанавливает следующая теорема

Теорема **Справедливы равенства** $D_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{M}_i^j$ **.**

Следствие **Разложение определителя по** i **-му столбцу имеет вид**

$$\det\| A \| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} \alpha_{ki} \overline{M}_k^i$$

или

$$\det\| A \| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} M_k^i \overline{M}_k^i \, .$$

Для практических приложений особо полезной является

Теорема. **Для любой квадратной матрицы $\|A\|$ имеет место равенство**

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} D_{is} = \delta_{js} \cdot \Delta ,$$

где $\Delta = \det\|A\|$ **и** $\delta_{js} = \begin{cases} 1 \ , \ j = s, \\ 0 \ , \ j \neq s \end{cases}$ **– символ Кронекера.**

Следствие **Если квадратная матрица $\|A\|$ невырожденна, то элементами ее обратной матрицы $\|A\|^{-1}$ являются числа**

$$\beta_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \overline{M}_j^{\,i}}{\Delta} ; \ i, j = [1, n] .$$

Пример 01. Показать без непосредственного вычисления, что детерминант:

$$\Delta = \det \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 1 \\ 5 & 1 & 5 & 2 \\ 7 & 9 & 3 & 1 \end{Vmatrix}.$$

делится без остатка на 59, если известно, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} 59 \times 23 &= 1357, \\ 59 \times 41 &= 2419, \\ 59 \times 67 &= 3953, \\ 59 \times 19 &= 1121. \end{aligned}$$

Решение: 1. Значение детерминанта не изменится, если матрица будет протранспонирована. Поэтому

$$\Delta = \det \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 1 \\ 5 & 1 & 5 & 2 \\ 7 & 9 & 3 & 1 \end{Vmatrix} . = \det \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 9 \\ 3 & 9 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix} .$$

2. Выполним с полученной матрицей следующие, не меняющие значения ее детерминанта преобразования. К последнему столбцу последовательно прибавим:

третий столбец, умноженный на 10,
затем второй столбец, умноженный на 100,
и, наконец, первый столбец, умноженный на 1000.

В итоге получим:

$$\Delta = \det \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1357 \\ 2 & 4 & 1 & 2419 \\ 3 & 9 & 5 & 3953 \\ 1 & 1 & 2 & 1121 \end{Vmatrix} .$$

3. Согласно условию задачи и следствию из линейного свойства определителя, из четвертого столбца можно вынести общий множитель 59. Это дает

$$\Delta = 59 \cdot \det \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 & 23 \\ 2 & 4 & 1 & 41 \\ 3 & 9 & 5 & 67 \\ 1 & 1 & 2 & 19 \end{Vmatrix} = 59 \cdot K ,$$

где, в силу определения детерминанта, число K - целое. Поэтому будет целым и число Δ.

Пример 02. Найти определитель матрицы n-го порядка:

$$\Delta_n = \det \begin{Vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{Vmatrix}.$$

Решение: 1. Заметим, что сумма элементов каждого столбца матрицы одинакова и равна $x + a(n-1)$. Поэтому, прибавив к первой строке сумму остальных строк и вынося общий множитель из первой строки, мы получим матрицу с тем же определителем

$$\Delta_n = (x + a(n-1)) \cdot \det \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{Vmatrix}.$$

2. Вычитая из каждой строки, начиная со второй, первую строку, умноженную на a, получим

$$\Delta_n = (x + a(n-1)) \cdot \det \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x-a \end{Vmatrix}.$$

3. Последовательно применив $n-1$ раз формулу для разложения определителя по первому столбцу, приходим к выражению

$$\Delta_n = (x + a(n-1))(x-a)^{n-1} \quad .$$

Пример 03. Найти определитель матрицы n-го порядка:

$$\Delta_n = \det\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Решение: 1). Заметим, что при $n=3$, разлагая детерминант по первой строке имеем

$$\Delta_3 = \det\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} = 2\cdot\det\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} - \det\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} = 2\cdot 3 - 2 = 4\,,$$

а для $n=4$, аналогичным образом получаем, что

$$\Delta_4 = \det\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} = 2\cdot\det\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} - 1\cdot\det\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} =$$

$$= 2\cdot\Delta_3 - 1\cdot\det\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} = 2\cdot 4 - 3 = 5\,.$$

2). Напишем теперь разложение Δ_n по первой строке

$$\Delta_n = 2\cdot\det\left\|\begin{matrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{matrix}\right\| - 1\cdot\det\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{matrix}\right\| =$$

$$= 2\cdot\Delta_{n-1} - 1\cdot\Delta_{n-2}$$

3). Рассмотрим рекуррентное соотношение $\Delta_n = 2 \cdot \Delta_{n-1} - 1 \cdot \Delta_{n-2}$ как разностное уравнение, считая Δ_n неизвестной функцией от n.

Его решением является любая линейная функция вида $\Delta_n = a\,n + b$, где a и b - некоторые константы. Действительно,

$$an + b = 2 \cdot (\ a(n-1) + b\ ) - (\ a(n-2) + b\ ) \qquad \Rightarrow \qquad 0 = 0\,.$$

Значения констант a и b найдем из условий

$$\begin{cases} \Delta_3 = 4, \\ \Delta_4 = 5 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a \cdot 3 + b = 4, \\ a \cdot 4 + b = 5 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad a = b = 1.$$

Таким образом, $\Delta_n = n + 1$.