Правило Крамера

Будем рассматривать систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \ldots + \alpha_{2n}\xi_n = \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{nn}\xi_n = \beta_n \end{cases}$$

в неразвернутом виде $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\xi_i = \beta_j$; $j = [1, n]$ или же в матричной форме $\| A \| \| x \| = \| b \|$, где квадратная матрица $\|A\|$ имеет компоненты α_{ji}, а столбцы $\|x\|$ и $\|b\|$ – соответственно ξ_i и β_j.

Определение	Упорядоченный набор чисел $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ будем называть *частным решением* (или, просто, *решением*) *системы линейных уравнений*, если при подстановке этих чисел в каждое из уравнений системы мы получаем тождество.

Имеет место

Теорема (правило Крамера).

Для того чтобы система линейных уравнений (6.4.1) *имела единственное* решение, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta = \det\| A \| \neq 0$, и в этом случае решение данной системы будет иметь вид

$$\xi_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad i = 1,2,\ldots,n,$$

где Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы $\| A \|$ заменой ее i-го столбца на столбец свободных членов $\| b \|$:

$$\Delta_i = \det \begin{array}{c} \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \beta_1 & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \beta_2 & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \beta_n & \ldots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix} \\ \uparrow \\ i\text{-й столбец} \end{array}.$$

Пример 01. Найти все решения системы линейных уравнений $\begin{cases} \lambda\xi_1 + 4\xi_2 = \lambda \\ \xi_1 + \lambda\xi_2 = \lambda - 1 \end{cases}$ для любых значений параметра $\lambda \in \mathbf{R}$.

Решение: 1. Теорема Крамера утверждает: для того, чтобы система линейных уравнений $\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 = \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 = \beta_2 \end{cases}$ имела единственное решение $\{\xi_1^*; \xi_2^*\}$, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta \neq 0$, при этом $\xi_1^* = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$ и $\xi_2^* = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, где

$$\Delta = \det\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}; \quad \Delta_1 = \det\begin{Vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{Vmatrix}; \quad \Delta_2 = \det\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \beta_2 \end{Vmatrix}.$$

В случае, когда $\Delta = 0$, требуется специальное исследование.

2. В нашем случае

$$\Delta = \det\begin{Vmatrix} \lambda & 4 \\ 1 & \lambda \end{Vmatrix} = \lambda^2 - 4\ ,\ \Delta_1 = \det\begin{Vmatrix} \lambda & 4 \\ \lambda - 1 & \lambda \end{Vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \quad \text{и}$$

$$\Delta_2 = \det\begin{Vmatrix} \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda - 1 \end{Vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda\ .$$

Поэтому при $\lambda \in (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$ по теореме Крамера система имеет единственное решение

$$\xi_1^* = \frac{\lambda - 2}{\lambda + 2}\ ; \quad \xi_2^* = \frac{\lambda}{\lambda + 2}\ .$$

3. Наконец, при $\lambda = -2$ система имеет вид $\begin{cases} -2\xi_1 + 4\xi_2 = -2, \\ \xi_1 - 2\xi_2 = -3. \end{cases}$ Решений тут нет.

При $\lambda = 2$ система будет $\begin{cases} 2\xi_1 + 4\xi_2 = 2, \\ \xi_1 + 2\xi_2 = 1. \end{cases}$ Она имеет бесчисленное множество решений, описываемых формулой $\begin{cases} \xi_1^* = 1 - 2\tau \\ \xi_2^* = \tau \end{cases}$; $\tau \in (-\infty,+\infty)$.

Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу $\|A\|$ размера $m \times n$. Пусть число k такое, что $1 \le k \le \min\{m, n\}$. Выберем некоторым способом в $\|A\|$ k столбцов и k строк, на пересечении которых стоят элементы, образующие квадратную матрицу *минора порядка* k.

Пусть при данном k все миноры k-го порядка равны нулю, тогда будут равны нулю и все миноры порядка выше, чем k, поскольку каждый минор $(k+1)$-го порядка представим в виде линейной комбинации миноров порядка k .

Определения

Максимальный из порядков, отличных от нуля миноров матрицы $\|A\|$, называется *рангом* матрицы и обозначается $\mathrm{rg}\|A\|$.

Любой ненулевой минор матрицы, порядок которого равен ее рангу, называется *базисным минором*.

Столбцы (строки) матрицы, входящие в матрицу базисного минора, называются *базисными*.

Далее рассмотрим n штук m-компонентных столбцов вида

$$\|a_1\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \dots \\ \alpha_{m1} \end{matrix} \right\|; \quad \|a_2\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \dots \\ \alpha_{m2} \end{matrix} \right\|; \dots ; \quad \|a_n\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \dots \\ \alpha_{mn} \end{matrix} \right\|$$

и столбцы $\|b\| = \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_m \end{matrix} \right\|; \quad \|o\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \right\|.$

Поскольку для столбцов (как частного случая матриц) определены операции сравнения, сложения и умножения на число, то будем говорить, что столбец $\|b\|$ есть *линейная комбинация* столбцов

$$\|a_1\|, \|a_2\|, \dots, \|a_n\| \ ,$$

если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, такие, что $\|b\| = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \|a_j\|$.

Теорема (О базисном миноре).

Всякий столбец (строка) матрицы есть линейная комбинация базисных столбцов (строк) этой матрицы.

Определение

Столбцы $\|a_1\|, \|a_2\|, \dots, \|a_n\|$ будем называть *линейно зависимыми*, если существуют не равные нулю одновременно числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, такие, что

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \| a_j \| = \| o \|, \quad \left(\sum_{j=1}^{n} | \lambda_j | > 0 \right).$$

Леммы

Для того чтобы столбцы (строки) матрицы были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.

Если среди столбцов матрицы есть линейно зависимое подмножество, то множество всех столбцов этой матрицы также линейно зависимое.

Теорема

Для того чтобы определитель был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы столбцы (строки) его матрицы были линейно зависимыми.

Теорема

(О ранге матрицы).

Максимальное число линейно независимых столбцов матрицы равно максимальному числу линейно независимых строк и равно рангу этой матрицы.

Пример 02. Найти ранг матрицы размера 100×200, все элементы которой равны 1.

Решение: 1. С одной стороны искомый ранг не меньше единицы, поскольку есть ненулевой минор первого порядка отличный от нуля. Например, это детерминант квадратной подматрицы размера 1×1, являющейся первым элементом в первой строке и первом столбце.

2. С другой стороны, *любой* минор второго порядка в данной матрице имеет вид $\det\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = 0$. Значит, ранг этой матрицы строго меньше 2.

3. Сопоставление п.1 и п.2 приводит к заключению, что искомый ранг равен единице.

Для практического посчета ранга применяется *метод Гаусса*, который заключается в последовательном изменении матрицы, при котором величина определителей квадратных подматриц (а, значит, и величина ранга) не меняется, а вычисление ранга итоговой матрицы оказывается легко выполнимым по его определению.

Пример 03. Используя метод Гаусса, найти ранг матрицы

$$\|A\| = \left\| \begin{matrix} 2 & -6 & 10 & -10 \\ 3 & -6 & 12 & -12 \\ -7 & 3 & -17 & 17 \\ 2 & -6 & 10 & -10 \\ 8 & 2 & 14 & -14 \end{matrix} \right\|.$$

Решение: 1. Поскольку исходная матрица имеет две одинаковые строки, то, заменив четвертую строку разностью первой и четвертой, получим

$$\operatorname{rg}\|A\| = \operatorname{rg}\left\| \begin{matrix} 2 & -6 & 10 & -10 \\ 3 & -6 & 12 & -12 \\ -7 & 3 & -17 & 17 \\ 2 & -6 & 10 & -10 \\ 8 & 2 & 14 & -14 \end{matrix} \right\| = \operatorname{rg}\left\| \begin{matrix} 2 & -6 & 10 & -10 \\ 3 & -6 & 12 & -12 \\ -7 & 3 & -17 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 14 & -14 \end{matrix} \right\|.$$

Нулевую строку можно выбросить, поскольку она не влияет на величину ранга матрицы.

$$\operatorname{rg}\|A\| = \operatorname{rg}\left\| \begin{matrix} 1 & -3 & 5 & -5 \\ 1 & -2 & 4 & -4 \\ -7 & 3 & -17 & 17 \\ 4 & 1 & 7 & -7 \end{matrix} \right\|.$$

2. Далее зануляем все элементы первого столбца, кроме, расположенного в первой строке. Для этого вторую строку заменим разностью первой и второй. Третью заменим суммой третьей и второй, умноженной на 7. Четвертую строку заменим разностью четвертой и второй, умноженной на 4.

$$\operatorname{rg}\|A\| = \operatorname{rg}\begin{Vmatrix} 1 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -18 & 18 & -18 \\ 0 & 13 & -13 & 13 \end{Vmatrix}.$$

Затем, вынося из третьей строки 18, а из четвертой 13, получим:

$$\operatorname{rg}\|A\| = \operatorname{rg}\begin{Vmatrix} 1 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$$

На последнем шаге третью строку заменяем разностью третьей и второй. Наконец, четвертую строку заменяем суммой четвертой и второй. В итоге получаем матрицу с очевидным значением ранга

$$\operatorname{rg}\|A\| = \operatorname{rg}\begin{Vmatrix} 1 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = 2.$$