

Неопределенные интегралы

В случае $f(x) = F'(x)$ функция $f(x)$ называется *производной функцией от функции $F(x)$* , а функция $F(x)$ — *первообразной функцией для функции $f(x)$* .

Соотношение $f(x) = F'(x)$ выражает производную через первообразную, и естественно возникает вопрос о том, как выразить первообразную через производную.

Удобно ввести специальное обозначение для всех первообразных функции $f(x)$.

Определение 2.2. Совокупность *всех* первообразных функций для некоторой функции $f(x)$ называется *неопределённым интегралом* и обозначается как

$$\int f(x) dx .$$

Естественно возникает вопрос: всегда ли по формуле для $f(x)$ можно построить формулу для $F(x)$? И, если можно, то как это сделать?

Напомним, что по формуле $F(x)$ формула для $f(x)$ может быть построена всегда. Но наоборот — «увы и ах!» ответ на данный вопрос, вообще говоря, *отрицательный*.

Примерами функций $f(x)$, первообразные для которых не выражаются через элементарные функции, служат e^{x^2} , $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$. Соответственно интегралы типа

$$\int e^{x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}$$

принято называть «неберущимися».

Вместе с тем, надо заметить, что, помимо очевидных соотношений типа

$$\int F'(x) dx = \left\{ F(x) + C \quad \forall C \right\},$$

в ряде практически важных случаев все же удается найти формулу для $F(x)$ по известной формуле для $f(x)$. Общее число этих случаев изменяется тысячами и их описание составляет содержание весьма, солидных по размерам и числу страниц, справочников.

Для наших же целей вполне будет достаточно коллекции неопределенных интегралов, представленных в таблицах 2.3а и 2.3б. Эти интегралы в дальнейшем мы будем называть «табличными» и считать их известными.

Хотелось бы еще раз обратить внимание на существенность предположения о непрерывности функции $f(x)$.

Рассмотрим подробнее четвертую формулу (отмеченную «звездочкой») в таблице 2.3а. Можно убедиться, что приведенная формула для первообразной задает *не все* функции $F(x)$ такие, что $F'(x) = f(x)$. Например, для функции

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1, & \text{если } x > 0, \\ \ln(-x) + C_2, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

производные как для случая $x > 0$, так и для $x < 0$ представляются одной и той же формулой $\frac{1}{x}$, даже, если $C_1 \neq C_2$.

Действительно,

$$\begin{aligned}\frac{d(\ln x + C_1)}{dx} &= \frac{1}{x}, \text{ если } x > 0, \\ \frac{d(\ln(-x) + C_2)}{dx} &= \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \frac{1}{x}, \text{ если } x < 0.\end{aligned}$$

Дело в том, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не является непрерывной: при $x_0 = 0$ она имеет разрыв, что и приводит к нарушению равенства (2.4.)

Впрочем, для практики эти проблемы не являются существенным ограничением. Скажем, функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ можно рассматривать для случаев $x > 0$ и $x < 0$ независимо друг от друга. Тогда формула (2.4) будет выполняться, поскольку эта функция непрерывна как для всех $x > 0$, так и для любых отрицательных значений своего аргумента.

	$f(x)$	$\int f(x) \, dx$
1°	$x^a, a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$
2°	e^x	$e^x + C$
3°	$a^x, \quad a > 0, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
4°	$\frac{1}{x}$	$\ln x + C^*$
5°	$\cos x$	$\sin x + C$
6°	$\sin x$	$-\cos x + C$

Таблица 2.3а

	$f(x)$	$\int f(x) dx$
7°	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
8°	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$, если $a \neq 0$
9°	$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\ln x + \sqrt{x^2+a^2} + C$, если $a > 0$
10°	$\sqrt{a^2-x^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$, если $a > 0$
11°	$\sqrt{x^2-a^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \ln x + \sqrt{x^2-a^2} + C$

Таблица 2.3б

Столь небольшое число «табличных» интегралов оказывается достаточным для решения значительного числа задач, поскольку в нашем распоряжении имеются также и формулы, позволяющие *выражать неопределенные интегралы одних функций через интегралы от других*. Эти формулы сведены в таблицу 2.4.

1°	$\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$
2°	$\int (k \cdot f(x)) \, dx = k \cdot \int f(x) \, dx$, где $k - \text{const}$
3°	$\int f'(x) \cdot g(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, dx$
4°	$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int f(u) \, du$, где $u = g(x)$

Таблица 2.4

Данные формулы нуждаются в доказательстве, и для примера убедимся в справедливости формулы 3°, часто называемой правилом *интегрирования по частям*. Согласно пункту 3° таблицы 2.2 и определению интеграла

$$\begin{aligned} (f(x) \cdot g(x))' &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \int (f(x) \cdot g(x))' dx &= \int (f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x) \cdot g(x) &= \int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx, \end{aligned}$$

поскольку из равенства функций следует равенство их неопределенных интегралов (но не первообразных!) Из последнего соотношения и следует формула интегрирования по частям.

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx.$$

Правило 4°, часто называемое *правилом замены переменной интегрирования*, также вполне очевидно, ибо по определению первого дифференциала из равенства $u = g(x)$ следует $du = g'(x) dx$. Заметим, что достаточно часто (особенно, если функция $g(x)$ не слишком сложна) правило 4° записывают в виде

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(g(x)) d(g(x)).$$

Примеры нахождения интегралов

Рассмотрим примеры нахождения интегралов, основанных на следующей схеме:

- А) подынтегральную функцию данного определенного интеграла приводим к виду, удобному для использования таблиц 2.3 и 2.4;
- В) при помощи таблиц 2.3 и 2.4 находим неопределенный интеграл. (или какую-нибудь первообразную);

Вначале продемонстрируем как при помощи таблицы 2.3, зная неопределенный интеграл $\int f(x) dx$, можно получить формулу для $\int f(ax + b) dx$.

Пример 2.2. Пусть требуется найти

$$\int \cos(2x - 7) dx .$$

Решение. Заметим, что в таблице 2.3а (формула 5°) имеется табличный интеграл

$$\int \cos x dx = \sin x + C .$$

Введем новую переменную $u = 2x - 7$, для которой имеем

$$du = d(2x - 7) = d(2x) + d(-7) = 2 dx + 0 = 2 dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2} .$$

Тогда искомый интеграл при помощи таблицы 2.4 (формула 2°) находится следующим образом

$$\begin{aligned}\int \cos(2x - 7) dx &= \int \cos u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \cos u du = \frac{1}{2} \sin u + C = \\ &= \frac{1}{2} \sin(2x - 7) + C.\end{aligned}$$

Заметьте, что в ответе вместо $\frac{C}{2}$ написано C — это не опечатка. Произвольная константа, деленная пополам, все равно остается произвольной константой.

Проверьте самостоятельно, что аналогичным методом можно, например, получить формулы

$$\int e^{3x+1} dx = \frac{1}{3} e^{3x+1} + C \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{5x+2} = \frac{1}{5} \ln |5x+2| + C .$$

Далее заметим, что, несмотря на невозможность в общем случае записи интеграла в виде некоторой элементарной функции, имеют место случаи, когда это принципиально *всегда выполнимо*.

К таким интегралам, в первую очередь, относятся интегралы от *дробно-рациональных* функций, то есть функций, представимых в виде дроби, числитель и знаменатель которых есть алгебраические многочлены, например,

$$\int \frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 - 3x^2 + 8x - 6} dx .$$

Рассмотрим два основных метода интегрирования дробно-рациональных функций, в первом из которых удастся разложить знаменатель на линейные множители.

Пример 2.3. Пусть требуется найти

$$\int \frac{(x-4) dx}{x^2 - 5x + 6}.$$

Решение. Поскольку $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, то попробуем представить подынтегральную функцию в виде

$$\frac{x-4}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3},$$

где A и B – некоторые числа, значения которых найдем из следующей цепочки равенств.

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{x^2-5x+6} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \\ &= \frac{A(x-3) - B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x - (3A+2B)}{x^2-5x+6}. \end{aligned}$$

Сравнивая начальное и конечное звенья этой цепочки, легко видеть, что значения чисел A и B (при которых данные равенства верны при всех x) являются решением системы линейных уравнений

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 3A + 2B = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}.$$

Теперь, используя таблицы 2.3 и 2.4, получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-4) dx}{x^2 - 5x + 6} &= \int \left(\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-3} \right) dx = \\ &= 2 \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x-3} = 2 \ln |x-2| - \ln |x-3| + C = \ln \frac{(x-2)^2}{|x-3|} + C. \end{aligned}$$

Заметим, что этот алгоритм иногда называют «методом разложения на простейшие множители».

Следующие два примера показывают как можно действовать в случае, когда знаменатель дробно-рациональной функции не удастся разложить на линейные множители.

Пример 2.4. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4}.$$

Решение. По формуле 2° (из таблицы 2.4) выполним следующие преобразования соответствующего неопределенного интеграла

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{dx}{2}}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} =$$

Теперь используем определение дифференциала и правило 4° из таблицы 2.4, считая $u = \frac{x}{2}$.

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

Заключительное равенство следует из формулы 8° таблицы 2.4.

Пример 2.5. Найти

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} dx .$$

Решение. Поскольку

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = 1 + \frac{x}{x^2 + 1} ,$$

то применяя последовательно формулы 1° и 4° таблицы 2.4, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} dx &= \int \left(1 + \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = x + \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \\ &= x + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{x^2 + 1} = x + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x + \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + C . \end{aligned}$$

Здесь, при использовании 4° мы полагали $u = x^2 + 1$, откуда следуют равенства для дифференциалов: $d(x^2 + 1) = d(x^2) = 2x dx$.

Иногда в процессе интегрирования оказывается эффективным одновременное использование различных свойств неопределенного интеграла, приводимых в таблице 2.4.

Пример 2.6. Найти

$$\int (\sqrt{x} + 1)^3 dx .$$

Решение. По формулам 1° и 2° в таблице 6.2.2, выражающим неопределенный интеграл от суммы функций через интегралы от слагаемых, и используя формулу «куб суммы двух чисел», получаем

$$\begin{aligned} \int (\sqrt{x} + 1)^3 dx &= \int \left((\sqrt{x})^3 + 3(\sqrt{x})^2 + 3\sqrt{x} + 1 \right) dx = \\ &= \int (\sqrt{x})^3 dx + 3 \int (\sqrt{x})^2 dx + 3 \int \sqrt{x} dx + \int 1 \cdot dx = \end{aligned}$$

Теперь используем первую формулу таблицы 2.3 и правила действий со степенями с дробным показателем.

$$= \int x^{3/2} dx + 3 \int x dx + 3 \int x^{1/2} dx + \int 1 \cdot dx = \frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{3}{2} x^2 + 2x^{3/2} + x + C .$$

Пример 2.7. Найти

$$\int x \cdot \cos x \, dx .$$

Решение. Для нахождения неопределенного интеграла применим правило интегрирования по частям, то есть формулу 3° из таблицы 2.4. Будем полагать, что $f(x) = \sin x$, а $g(x) = x$. Тогда соответствующий неопределенный интеграл можно преобразовать следующим образом.

$$\int x \cdot \cos x \, dx = \int x \cdot (\sin x)' \, dx = x \cdot \sin x - \int (x)' \cdot \sin x \, dx =$$

Поскольку $(x)' = 1$, по шестой формуле таблицы 2.3 получаем

$$= x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx = x \cdot \sin x - (-\cos x) + C = x \cdot \sin x + \cos x + C .$$

Пример 2.8. Найти

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx .$$

Решение. Применим формулу 3° интегрирования по частям, используя равенство $(x)' = 1$,

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx =$$

затем – формулу 4° таблицы 2.4, что с учетом $u = x^2$ дает

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C .$$

В завершение обзора приведем пример, в котором оказывается целесообразным *двукратное* использование правила интегрирования по частям.

Пример 2.9. Найти

$$\int e^x \sin x \, dx .$$

Решение. Применив интегрирования по частям, получим

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x (-\cos x) - \int e^x (-\cos x) \, dx ,$$

то есть выражение содержащее интеграл, который ничуть не проще исходного. Однако повторное интегрирование по частям дает соотношение

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx ,$$

из которого следует

$$2 \cdot \int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x + C \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C .$$