Непрерывность функций многих переменных

Определение 2.1	Функция многих переменных $f\left(x\right)$ называется *непрерывной* в точке $a \in R^n$, если верно равенство $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Обратите внимание, что, хотя определение 2.1 совпадает по формулировке с определением непрерывности в точке функции одной переменной, оно является существенно более жестким, поскольку предел в этом определении является *кратным*.

Для функций многих переменных наряду с непрерывностью в смысле определения 2.1 (называемой *непрерывностью по совокупности* переменных $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$) можно использовать и понятие непрерывности функции $f(x)$ по некоторой, отдельно взятой переменной. Однако эти понятия неравносильны.

Например, функция

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x^2 + y^2 = 0\,, \\ \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{при} \quad x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$$

непрерывна в начале координат по каждому из своих аргументов, но не является в этой точке R^2 непрерывной в смыле определения 2.1.

Поскольку предел функции многих переменных может рассматриваться не на всей окрестности точки x_0 , а лишь на каком-то ее подмножестве, то для этой функции следует различать случаи непрерывности в точке x_0 в смысле определения 2.1 и непрерывность в этой точке по данному подмножеству.

Например, функция

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x^2+y^2=0\,, \\ y\,\sin\dfrac{1}{x} & \text{при} \quad x^2+y^2\neq 0 \end{cases}$$

является в начале координат непрерывной по области своего определения, но не будет непрерывной по определению 2.1, поскольку она не определена *для любых* ненулевых значений y, где $x=0$.

При этом некоторые свойства непрерывных функций одной переменной имеются и у функций многих переменных. Например, имеет место

Теорема 2.1 **Для непрерывных в некоторой точке функций $f(x)$ и $g(x)$ функции**

$$\begin{aligned}
&f(x)+g(x)\,,\\
&f(x)\cdot g(x)\,,\\
&\frac{f(x)}{g(x)} \quad \textbf{при} \quad g(x)^2 \neq 0\,,\\
&f\big(g(x)\big)
\end{aligned}$$

также будут непрерывными.

Задача 2.1 *Исследовать на непрерывность в начале координат функцию*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x^2+y^2=0\,, \\ \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \textit{при} \quad x^2+y^2 \neq 0 \end{cases}$$

Решение. Если идти в начало координат по положительной полуоси Oy, то на этой траектории $x(t)=0$ и, следовательно,

$$\lim_{t\to 0} \frac{0\cdot y(t)}{0^4+y^2(t)} = 0\,,$$

а, если идти по траектории

$$\begin{cases} x(t)=t\,, \\ y(t)=t^2\,, \end{cases}$$

то $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2\cdot t^2}{t^4+t^4} = \dfrac{1}{2}$. Это означает, что предел не существует и, следовательно, непрерывности в начале коодинат нет.

Решение получено.

Задача 2.2 *Исследовать на непрерывность в начале координат функцию*

$$f(x,y) = \begin{cases} A & \textit{при} \quad x^2+y^2=0\,, \\ \dfrac{x^2y^4}{x^4+y^2} & \textit{при} \quad x^2+y^2 \neq 0 \end{cases}$$

Решение. Имеем оценку

$$\left|\frac{x^2y^4}{x^4+y^2}\right| = \left|\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right| |\, y^3| \leq \frac{1}{2} |\, y^3|\,.$$

Это означает, что на любой траектории, ведещей в начало координат,

$$\lim_{t\to 0} \frac{x^2(t)\cdot y^4(t)}{x^4(t)+y^2(t)} = 0\,,$$

поскольку на этой траектории $y(t) \to 0$.

Решение получено. Это означает, что предел функции в начале координат равен нулю и, следовательно, непрерывность в начале кодина будет иметь место при $A=0$. При других значениях A непрерывности нет.

Приведем (для справки) некоторые определения, связанные с понятием непрерывности функции многих переменных в R^n .

Определение 2.02	Функция многих переменных, непрерывная в каждой точке некоторого подмножества $\Omega \subseteq R^n$, называется *непрерывной на* Ω .

Как и в случае функции одной переменной, свойства функций многих переменных, непрерывных на множестве, могут существенно отличаться от свойств функции, непрерывной в точке.

Приведем примеры таких свойств.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 2.2 **Всякая функция, непрерывная на замкнутом и ограниченном множестве (компакте), ограничена на этом множестве и достигает на нем своих точных верхней и нижней граней.**

Теорема 2.3 **Если функция $f(x)$ непрерывна в области $G \subseteq R^n$ и принимает в ней два различных значения, то она принимает в этой области и любое значение, заключенное между ними.**

Различие свойств функций многих переменных, непрерывных в точке и непрерывных на множестве иллюстрирует, например, важное понятие *равномерной непрерывности*, которое описывает

Определение 2.03	Функция многих переменных $f(x)$ называется *равномерно непрерывной на множестве* $G \subseteq R^n$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x', x" \in G,$ для которых $\rho\big(x', x"\big) < \delta_\varepsilon$ выполняется $\big\| f(x') - f(x") \big\| < \varepsilon\,.$

Заметим, что определение того, что функция $f(x)$ *не является* равномерно непрерывной имеет вид

Отрицание определения 2.03	Функция многих переменных $f(x)$ не является *равномерно непрерывной на множестве* $G \subseteq R^n$, если $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall \delta > 0$ $\exists\, x'_0, x''_0 \in G,$ для которых $\rho\big(x'_0, x''_0\big) < \delta$ и выполняется $\big\| f(x'_0) - f(x''_0) \big\| \geq \varepsilon_0\,.$

Различие понятий непрерывности и равномерной равномерной непрерывности становится более наглядным, если воспользоваться определением предела функции многих переменных по Коши.

В этом случае, непрерывность $f(x)$ на множестве G задает

Определение 2.04	Функция многих переменных, непрерывная в каждой точке некоторого подмножества $G \subseteq R^n$, называется *непрерывной на* G, если $\forall x' \in G$ и $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{x',\varepsilon} > 0$ такое, что $\forall x" \in G$ удовлетворяющих $0 < \rho(x', x") < \delta_{x',\varepsilon}$, выполняется $\big\lvert\, f(x') - f(x") \,\big\rvert < \varepsilon$.

При этом определение равномерной непрерывности (очевидно равносильное определению 2.03) получается из 2.04 следующим небольшим изменением последнего:

Определение 2.05	Функция многих переменных, непрерывная в каждой точке некоторого подмножества $G \subseteq R^n$, называется *равномерно непрерывной на* G, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x', x" \in G$ и, удовлетворяющих $0 < \rho(x', x") < \delta_\varepsilon$, выполняется $\big\lvert\, f(x') - f(x") \,\big\rvert < \varepsilon$.

Заметьте, что в определении 2.05 правило выбора δ_ε должно быть *одинаковым* для всех $x' \in G$, в то время как определение 2.04 допускает, что это правило может быть *разным* в разных точках $x'a \in G$, на что указывает двойной индекс в $\delta_{x',\varepsilon}$ определения 2.04.

При решении задач, связанных с использованием понятия равномерной непрерывности могут оказаться полезными следующие утверждения.

Теорема 2.4 (Кантора) **Функция, непрерывная на компакте (в том числе, на отрезке) равномерно непрерывна.**

Теорема 2.5 **Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке $[0,+\infty]$, тогда**

1) если $f'(x)$ ограничена на $[0,+\infty)$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на $[0,+\infty)$,

2) если $f'(x)$ бесконечно большая при $x \to +\infty$, то $f(x)$ не является равномерно непрерывной на $[0,+\infty)$.

Задача 2.3 *Исследовать на равномерную непрерывность функцию* $f(x)=\sqrt{x}$ *на* $[0,+\infty)$.

Решение. Оценим

$$\left|\sqrt{x_0+\delta}-\sqrt{x_0}\right|=\frac{\delta}{\sqrt{x_0+\delta}+\sqrt{x_0}}$$

Поскольку $x_0\in[0,+\infty)$, то

$$\frac{\delta}{\sqrt{x_0+\delta}+\sqrt{x_0}}\quad\leq\quad\frac{\delta}{\sqrt{\delta}}=\sqrt{\delta}\ .$$

Выбирая $\delta=\dfrac{\varepsilon^2}{2}<\varepsilon^2$, окончательно получаем

$$\left|\sqrt{x_0+\delta}-\sqrt{x_0}\right|\quad\leq\quad\sqrt{\delta}<\sqrt{\varepsilon^2}=\varepsilon$$

Решение получено. Значит функция $f(x)=\sqrt{x}$ в силу определения 2.03 равномерно непрерывна на промежутке $[0,+\infty)$.

Задача 2.4 *Исследовать на равномерную непрерывность функцию* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *на* $(\,0,1\,)$.

Решение. Воспользуемся отрицанием определения 2.03. Для любого $\delta > 0$ возьмем

$$\delta^* = \begin{cases} \delta, & \text{если} \quad \delta < \frac{1}{2}\,, \\ \frac{1}{2}, & \text{если} \quad \delta \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Тогда для δ^* на $(\,0,1\,)$ всегда можно выбрать пару чисел $x'_0 = \delta^*$ и $x''_0 = 2\delta^*$ таких, что

$$\left|\,\frac{1}{x'_0} - \frac{1}{x''_0}\,\right| = \frac{|\,x'_0 - x''_0\,|}{x'_0 x''_0} = \frac{\delta^*}{2\delta^{*2}} = \frac{1}{2\delta^*} \geq \varepsilon_0 = \frac{1}{2}\,.$$

Поскольку $x_0 \in [\,0,+\infty)$, то

$$\frac{\delta}{\sqrt{x_0+\delta}+\sqrt{x_0}} \quad \leq \quad \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta}\ .$$

Значит функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ согласно отрицанию определения 2.03 не является равномерно непрерывной на интервале $(\,0,1\,)$.

Решение получено.

Задача 2.5 *Исследовать на равномерную непрерывность функцию* $f(x)=\sqrt{x}\ln(1+x^2)$ *на* $[0,+\infty)$.

Решение. 1. Функция $f(x)=\sqrt{x}\ln(1+x^2)$ определена и непрерывна на $[0,+\infty)$. Ее производная

$$f'(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{2\sqrt{x}}+\frac{2x\sqrt{x}}{1+x^2}$$

существует и напрерывна $\forall x\in(0,+\infty)$.

2. Применив формулу Тейлора получим, что

$$\lim_{x\to+0}f'(x)=0\,,$$

а по формуле Лопиталя имеем

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0\,,$$

3. Объединяя результаты пунктов 1 и 2, заключаем, что $f'(x)$ ограничена на $[0,+\infty)$. А, использовав утверждение 1) теоремы 2.05, приходим к выводу о равномерной непрерывности функции $f(x)$ на $[0,+\infty)$.

Решение получено.

Задача 2.6 *Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x) = xe^{\sin x}$ на $[\,0, +\infty\,)$.*

Решение. 1. Заметим, что, хотя производная

$$f'(x) = e^{\sin x}\Big(1 + x\cos x\Big)$$

неограничена на $[\,0, +\infty\,)$, применение утверждения 2) теоремы 2.05 здесь некорректно, так как эта производная не является бесконечно большой. Поэтому воспользуемся отрицанием определения 2.03.

2. Выберем на промежутке $[\,0, +\infty\,)$ две точки $x_0' = 2\pi n$ и $x_0'' = 2\pi n + \dfrac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$. Это всегда возможно. Оценим значение

$$\big|\, f(x_0'') - f(x_0') \,\big| =$$

$$= \left(2\pi n + \frac{1}{n}\right) e^{\sin\left(2\pi n + \frac{1}{n}\right)} - 2\pi n\, e^{\sin 2\pi n} \geq 2\pi n \left(e^{\sin\frac{1}{n}} - 1\right) \geq$$

$$\geq 2\pi n\, \sin\frac{1}{n} \geq 2\pi n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}\right) = 2\pi - \frac{\pi}{3n^2} > \pi\ .$$

3. Итак,

$$\exists\, \varepsilon_0 = \pi \qquad \text{такое, что} \qquad \forall \delta > 0 \qquad \exists n = \left[\frac{1}{\delta} \right] + 1,$$

при котором точки $\quad x_0' = 2\pi n; \qquad x_0'' = 2\pi n + \dfrac{1}{n}$

принадлежат $[\,0, +\infty)$ и обеспечивают выполнение неравенств

$$\left|\, x_0'' - x_0' \,\right| = \frac{1}{n} < \delta \qquad \text{и} \qquad \left|\, f(x_0'') - f(x_0') \,\right| \geq \varepsilon_0\,.$$

Решение получено. То есть, в силу отрицания определения 2.03, равномерной непрерывности для рассматриваемой функции нет.