Определенный интеграл как предел последовательности

До сих пор мы рассматривали свойства функций при помощи их локальных (то есть, относящихся к некоторой небольшой окрестности фиксированной точки) количественных характеристик, таких как: значение, предел, производная и т.п.

Однако, достаточно часто возникают задачи исследования свойств функций, относящихся к *не малым* промежуткам области определения.

Их характерным примером является задача нахождения значения функции $F(x)$ в некоторой точке b по ее значению в точке a и известной производной функции $f(x) = F'(x)$, в случае, когда a и b не находятся в малых окрестностях друг друга.

Рассмотрим возможную схему решения этой задачи.

Пусть заданная функция $f(x)$ является производной функцией от некоторой первообразной $F(x)$, для которой известно ее значение $F(a)$, и требуется найти $F(b)$ — значение (неизвестной нам) первообразной в точке b.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на N равных частей точками $x_1, x_2, \dots x_{N-1}$. Кроме того, будем считать, что $x_0 = a$ и $x_N = b$. Тогда

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{N}$$

для любого $k = 0, 1, 2, \dots N-1$.

Заметим, что числа $k = 1, 2, \dots N$ служат не только номерами точек разбиения (точнее, правых границ отрезков), но также их можно использовать как номера *отрезков,* на которые мы разбили $[a,b]$.

Обозначим приращение значения функции $F(x)$ на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ как

$$\Delta F_k = F(x_k) - F(x_{k-1}) \ ,$$

тогда разность $F(b)-F(a)$, (прибавляя и вычитая одинаковые числа), можно записать в виде

$$F(b)-F(a) = F(x_N)-F(x_0) =$$

$$= \underbrace{F(x_N) - F(x_{N-1})}_{\Delta F_{N-1}} + \underbrace{F(x_{N-1}) - F(x_{N-2})}_{\Delta F_{N-2}} + \cdots$$

$$\cdots + \underbrace{F(x_2) - F(x_1)}_{\Delta F_1} + \underbrace{F(x_1) - F(x_0)}_{\Delta F_0} = \sum_{k=0}^{N-1} \Delta F_k \ .$$

Откуда $F(b) = F(a) + \sum\limits_{k=1}^{N} \Delta F_k$ и рассматриваемая задача свелась к нахождению $\sum\limits_{k=1}^{N} \Delta F_k$.

Поскольку по условию задачи $F'(x) = f(x)$, то приращение функции $F(x)$ в малой окрестности точки x_k можно заменить ее *дифференциалом* и получить приближенное равенство

$$\Delta F_k \approx dF(x_k) = F'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = f(x_k)\Delta x_k,$$

в силу которого

$$F(b) \approx F(a) + \sum_{k=1}^{N} f(x_k)\Delta x_k \ .$$

Погрешность этой аппроксимации будет тем меньше, чем меньше длина отрезка $[x_k, x_{k+1}]$, которая равна $\frac{b-a}{N}$ и уменьшается с ростом значения N.

С другой стороны, при увеличении N растет число слагаемых в сумме

$$\sum_{k=1}^{N} f(x_k)\Delta x_k,$$

и предельный переход $N \to \infty$ приводит к необходимости раскрытия неопределенности вида "$0 \cdot \infty$". Эту сумму принято называть *интегральной.*

В курсе математического анализа показывается, что для существования предела $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{N} f(x_k)\Delta x_k$ достаточно, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной на отрезке $[a, b]$.

Сделаем следующее обобщение рассмотренного подхода. Дадим

Определение 3.1

Пусть дан отрезок $[a,b]$. Набор чисел, обозначаемый τ,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b$$

называется *разбиением отрезка* $[a,b]$ *с мелкостью* δ_τ, где

$$\delta_\tau = \max_{k=\overline{1,N}} \left| x_k - x_{k-1} \right| .$$

Определение 3.2

Для некоторого разбиения τ выберем произвольно $\forall k = \overline{1,N} \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Выражение вида

$$\sigma_\tau\Big(f, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_N\Big) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k \,, \qquad (3.01)$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, называется *интегральной суммой Римана для функции* $f(x)$.

Определение 3.3

Если для любого разбиения τ и при любом выборе чисел ξ_k существует конечный

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = A\,,$$

то этот предел называется *римановским определенным интегралом* для функции $f(x)$ на промежутке $[\,a,b\,]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Теперь решение задачи нахождения значения функции $F(x)$ в точке $x = b$ можно записать, при помощи определенного интеграла

$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(x)\,dx \quad ,$$

хотя на практике чаще используется иной вид записи этой формулы:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad . \quad \text{или, для краткости} \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b \quad . \tag{3.02}$$

Соотношение (3.02) принято называть *формулой Ньютона-Лейбница.* Она связывает значения функции $F(x)$ в двух, вообще говоря не близких друг к другу точках через определенный интеграл от функции $f(x)$ в случае, когда $F'(x) = f(x)$, или позволяет находить значение определенного интеграла по значениям функции $F(x)$ в точках, являющимися пределами интегрирования.

Рекомендуется также запомнить, что функцию $f(x)$ обычно называют *подынтегральной функцией,* переменную x – *переменной интегрирования,* а интервал (a, b) – *интервалом интегрирования.*

К понятию определенного интеграла стоит добавить еще один комментарий.

Из определения 3.3 следует, что определенный интеграл можно рассматривать как однозначное сопоставление функции $f(x)$, определенной на $[a,b]$, и числа $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. (Однозначность следует из того факта, что определенный интеграл есть предел. А предел, если он существует, то — единственен).

Это дает полное основание считать определенный интеграл *функционалом*, определенном на множестве функций интегрируемых на промежутке $[a,b]$,

Использование определения 3.03 для обоснования интегрируемости некоторой функции (или ее неинтегрируемости) может оказаться достаточно сложной процедурой. Это в первую очередь связано с тем, что интегральная сумма Римана не зависит однозначно от числа промежутков разбиения N. Иными словами, данная зависимость не является, вообще говоря, функциональной.

Поэтому представляют интерес также альтернативные условия интегрируемости. Для этого дадим

Определение 3.4

Пусть

$$M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$$

и

$$m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\,.$$

Обозначим

$$S_\tau = \sum_{k=1}^{N} M_k\Delta x_k \quad \text{и} \quad s_\tau = \sum_{k=1}^{N} m_k\Delta x_k\,.$$

Тогда S_τ и s_τ называются соответственно *верхней и нижней суммами Дарбу функции* $f(x)$.

Оказываются справедливыми

Теорема 3.1 **Для того, чтобы ограниченная функция $f(x)$ была интегрируема на $[a,\,b]$ необходимо и достаточно, чтобы**

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \left(S_\tau - s_\tau\right) = 0\,.$$

Дополнительно обозначим $\quad J_* = \sup\limits_{\delta_\tau} s_\tau \quad$ и $\quad J^* = \inf\limits_{\delta_\tau} S_\tau\,.$

Теорема 3.2 **Для того, чтобы ограниченная функция $f(x)$ была интегрируема на $[a,\,b]$ необходимо и достаточно, чтобы $J_* = J^*$.**

Следствие 3.1 **Для того, чтобы ограниченная функция $f(x)$ была интегрируема на $[a,\,b]$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall\,\varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение τ, что $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$.**

Использование этих утверждений проиллюстрируем следующими примерами

Задача 3.1 *Исследовать при* $x \in [0,1]$ *на интегрируемость функцию*

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\sin\dfrac{\pi}{x}, & \textit{если} \quad x \in (0,1], \\ 0\,, & \textit{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

Решение. 1) На указанном множестве функция $f(x)$ ограничена и имеет разрывы первого рода в точках $x_j = \dfrac{1}{j}$.

2) Заметим, что на отрезке $[0,1]$ разность

$$\sup f - \inf f = 1 - (-1) = 2.$$

Разделим отрезок $[0,1]$ точкой x^* так, чтобы внутри правой части оказалось ровно N точек разрыва. Тогда в левой части их будет бесконечно много.

3) Очевидно, что $x^* < \dfrac{1}{N}$ и вклад 'левых' точек разрыва в разность сумм Дарбу не будет превышать $\dfrac{2}{N}$.

4) Для каждой из 'правых' точек выберем, содержащий ее отрезок следующего вида

$$x_j \in \left[x_j - \frac{1}{2N^2}, x_j + \frac{1}{2N^2} \right] .$$

Это гарантирует, что вклад в разность сумм Дарбу за счет каждой 'правой' точки не превысит $\dfrac{2}{N^2}$.

5) Поскольку 'правых' точек N, то оценка разности верхней и нижней сумм Дарбу для всего промежутка интегрирования составит

$$S_\tau - s_\tau < \frac{2}{N} + N \cdot \frac{2}{N^2} = \frac{4}{N}.$$

Построенное разбиение однозначно определяется значением N.

Пусть $N > N_\varepsilon = \left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1$, где $[A]$ обозначает целую часть A, тогда

$$\frac{4}{N} < \frac{4}{N_\varepsilon} = \frac{4}{\left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1} < \frac{4}{\left[\frac{4}{\varepsilon}\right]} = [\,\varepsilon\,] \le \varepsilon\,.$$

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon = \left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1$ такое, что $\forall N > N_\varepsilon : \quad S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. То есть, по следствию 3.1, функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[0,1]$.

Решение получено.

Задача 3.2 *Исследовать при* $x \in [0,1]$ *на интегрируемость функцию*

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \textit{если} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0\,, & \textit{если} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Решение. Построим два разбиения, в первом из которых $x_k \in \mathbb{Q}$, а во втором — $x_k \notin \mathbb{Q}$.

Решение получено. Тогда условие теоремы 3.1 не выполняется и данная функция (называемая функцией Дирихле) неинтегрируема.

Заметим, что, если функция $f(x)$ интегрируема, то интегрируема и функция $|\,f(x)\,|$. Обратное верно не всегда. В качестве примера рассмотрите на отрезке $[0,1]$ такую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{если} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ -1\,, & \text{если} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Заметим, что также при исследовании на интегрируемость могут оказаться следующие (достаточные) условия

Теорема 3.3 **Если ограниченная функция $f(x)$ непрерывна на $[a,\, b]$, то она интегрируема.**

Теорема 3.4 **Если ограниченная функция $f(x)$ монотонна на $[a,\, b]$, то она интегрируема.**

Пример 3.1. Рассмотрим в качестве иллюстрации вычисление определенного интеграла функции $f(x) = x^3$ на отрезке $[0, 1]$, то есть,

$$\int_0^1 x^3\, dx \quad .$$

Найдем вариант интегральной суммы: например, можно взять $\Delta x_k = \frac{1}{N}$ и $x_k = \frac{k}{N}$. Тогда интегральная сумма (3.01) будет иметь вид

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^3 \cdot \frac{1}{N} \quad = \quad \frac{1}{N^4} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} k^3$$

и нам нужно найти предел этого выражения при $N \to \infty$.

Методом математической индукции можно показать, что

$$\sum_{k=0}^{N-1} k^3 = \frac{(N-1)^2 N^2}{4} \,,$$

поэтому

$$\int_0^1 x^3\,dx = \lim_{N\to\infty} \frac{(N-1)^2 N^2}{4N^4} = \lim_{N\to\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)^2}{4} = \frac{1}{4} \,.$$

Обратим внимание на следующие нюансы. Во-первых, значение определенного интеграла не зависит от того, как обозначается переменная интегрирования. Например, вместо x можно использовать t. Иначе говоря,

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{и} \qquad \int_a^b f(t)\,dt \qquad \text{– это одно и то же!}$$

Во-вторых, если для функции $f(x)$ удается подобрать функцию $F(x)$, то вместо предельного перехода в интегральной сумме (3.1) при нахождении определенного интеграла гораздо удобнее пользоваться формулой Ньютона-Лейбница. Так в рассмотренном выше примере, для $f(x) = x^3$ легко находится, скажем, $F(x) = \frac{x^4}{4}$. Тогда

$$\int_0^1 x^3\,dx = F(1) - F(0) = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}\,.$$

В заключение отметим, что dx в обозначении интеграла следует рассматривать с одной стороны как множитель подынтегрального выражения, а с другой – как дифференциал независимой переменной интегрирования x.

Геометрический смысл определенного интеграла

Выясним теперь *геометрический смысл* определенного интеграла. На рис. 6.1 показаны график функции $y = f(x)$ и разбиение отрезка $[a, b]$ на N частей точками $x_1, x_2, \ldots x_{N-1}$.

Нетрудно заметить, что для показанного на рис. 1, примера интегральная сумма (3.01)

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)\Delta x_k,$$

равна площади "ступенчатой" фигуры, образованной из N прямоугольников, $k-$й из которых имеет длину основания $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и высоту $f(x_k)$.

При предельном переходе $N \to \infty$ эта площадь стремится к S – площади фигуры, ограниченной снизу осью Ox, слева и справа – вертикальными прямыми, проходящими через точки $x = a$ и $x = b$, и ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$. Поэтому в данном случае будет справедливо равенство

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \quad . \tag{3.03}$$

Важно отметить, что, поскольку площадь геометрической фигуры должна быть *неотрицательным* числом, использование приведенной геометрической интерпретации определенного интеграла для подсчета площадей следует производить *с учетом знака* подынтегральной функции $y = f(x)$.

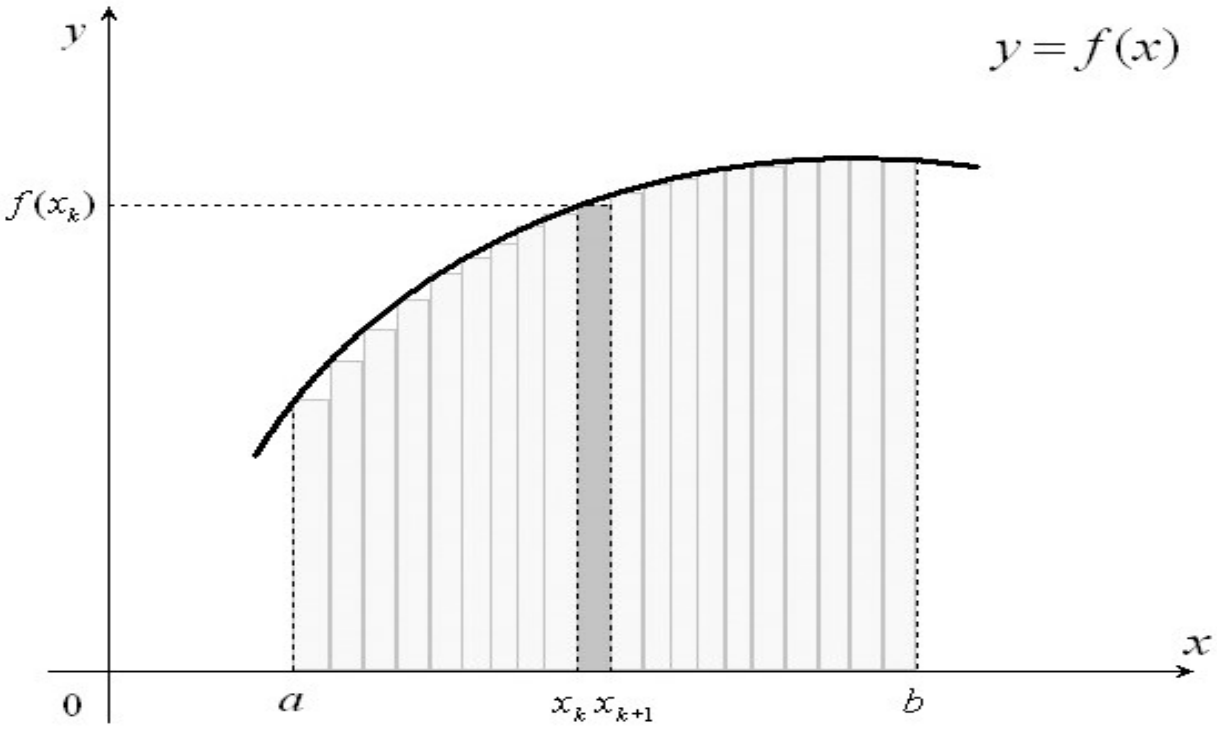

Рис. 1. Геометрический смысл определенного интеграла

Проиллюстрируем данное свойство определенного интеграла следующим примером. Пусть нам необходимо найти площадь фигуры, ограниченной сверху “полуволной” синусоиды и ограниченной снизу отрезком оси Ox в пределах от 0 до π (см. рис. 6.2.)

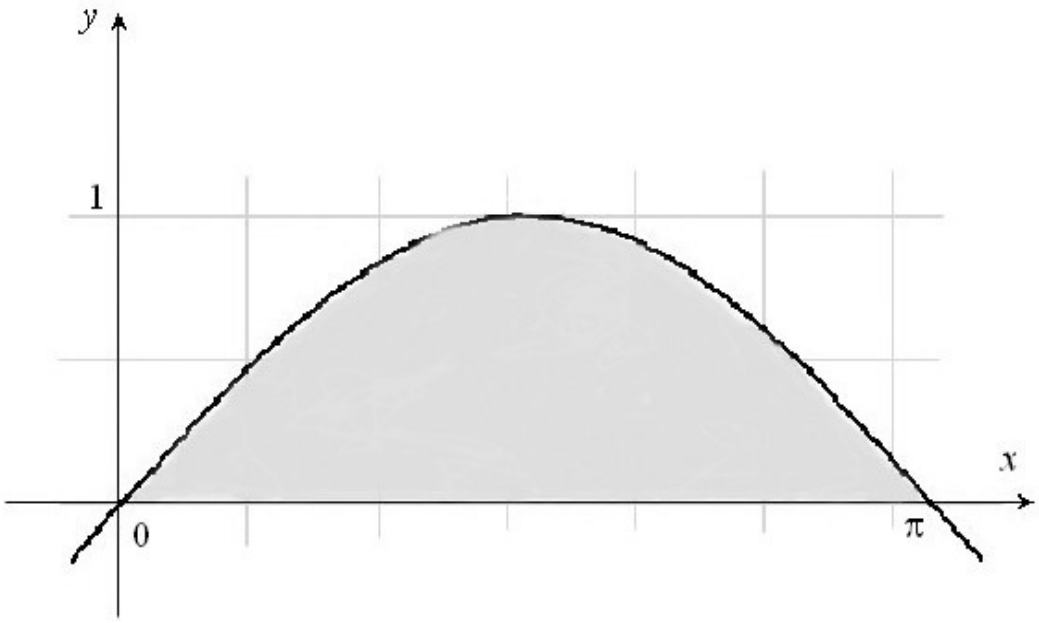

Рис. 2. Площадь фигуры, ограниченной “полуволной” синусоиды

Согласно формуле (3.03) искомая площадь равна

$$S = \int_0^{\pi} \sin x \, dx \ .$$

Вычислим этот интеграл по определению 3.3, по схеме, аналогичной использованной при решении примера 3.1. В данном случае $\Delta x_k = \frac{\pi}{N}$ и $x_k = \frac{\pi k}{N}$. Поэтому интегральная сумма (3.02) будет иметь вид

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\pi}{N} \sin \frac{\pi k}{N}$$

и нам необходимо найти его предел при $N \to \infty$.

По известной из курса тригонометрии формуле

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sin\frac{\pi k}{N} = \frac{\sin\dfrac{\pi(N+1)}{2N}\cdot\sin\dfrac{\pi(N-1)}{2N}}{\sin\dfrac{\pi}{2N}} \ ,$$

поэтому

$$\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx = \lim_{N\to\infty}\frac{\pi}{N}\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi(N+1)}{2N}\cdot\sin\dfrac{\pi(N-1)}{2N}}{\sin\dfrac{\pi}{2N}} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} 2\cdot\left(\frac{\dfrac{\pi}{2N}}{\sin\dfrac{\pi}{2N}}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{N}\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{N}\right)\right) = 2\ .$$

Здесь мы использовали, во-первых непрерывность функции $y = \sin x$, во-вторых равенство $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ и, наконец, "первый замечательный предел", согласно которому

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sin \dfrac{\pi}{2N}}{\dfrac{\pi}{2N}} = 1 \, .$$

Отметим, что данная задача решается и при помощи формулы Ньютона-Лейбница (3.02), если заметить, что в соотношении $F'(x) = f(x)$ при $f(x) = \sin x$ можно использовать $F(x) = -\cos x$. Тогда

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = (-(-1)) - (-1) = 2 \, .$$

Свойства определенного интеграла

Приведем теперь (без доказательства) основные свойства определенного интеграла, вытекающие из его определения.

1°. *Интегрирование суммы функций*:

$$\int_a^b \Big(f(x) + g(x) \Big)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx \quad .$$

2°. *Интегрирование произведения числа на функцию*:

$$\int_a^b \Big(k \cdot f(x) \Big)\, dx = k \cdot \int_a^b f(x)\, dx \quad .$$

3°. *Аддитивность интегрирования, то есть интегрирование функции по объединению отрезков интегрирования*:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \;=\; \int_a^c f(x)\,dx \;\;.$$

4°. *По определению также считается, что справедливы равенства*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad \text{и} \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0\;.$$

5°. *Интегрирование по частям*:

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx \quad .$$

6°. *Замена переменной интегрирования*:

$$\int_a^b f\Big(g(x)\Big)g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(u)\,du,$$

где $u = g(x)$ и $\alpha = g(a)\,,\ \beta = g(b)$.

Для решения задач могут оказаться полезными свойства определенного интеграла, связанные с неравенствами.

7°. Если $\forall x \in [a,b]$: $\quad f(x) \geq g(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq \int\limits_a^b g(x)\,dx \quad .$$

8°. Для любой интегрируемой функции $f(x)$

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int\limits_a^b \big|f(x)\big|\,dx\,.$$

9°. Если $\quad \forall x \in [a,b]$: $\quad m \leq f(x) \leq M$, то

$$m \int\limits_a^b g(x)\,dx \quad \leq \quad \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx \quad \leq \quad M \int\limits_a^b g(x)\,dx\ ..$$

Связь первообразной и производной функций

Как уже было отмечено, в случае $f(x) = F'(x)$ функция $f(x)$ называется *производной функцией от функции* $F(x)$, а функция $F(x)$ – *первообразной функцией для функции* $f(x)$.

Соотношение $f(x) = F'(x)$ выражает производную через первообразную, и естественно возникает вопрос о том, как выразить первообразную через производную.

Ответ дается следующей формулой

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\ , \tag{3.04}$$

где a – любое фиксированное число из области определения функции $f(x)$. Определенный интеграл в правой части равенства (3.04) называют *определенным интегралом с переменным верхним пределом.*

Убедимся, что из равенства (3.04) следует $F'(x) = f(x)$ для случая, когда функция $f(x)$ непрерывна. Действительно, для любой фиксированной точки x_0 из области определения $f(x)$ справедливы соотношения

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{F(x_0+\Delta) - F(x_0)}{\Delta} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} \cdot \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta} f(t)\,dt =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x_0)}{\Delta} \cdot \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta} 1 \cdot dt = \lim_{\Delta\to 0} f(x_0) \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta = f(x_0) \ \ ,$$

в силу формулы Ньютона-Лейбница и по свойствам 2° и 3° для определенного интеграла. (Фактически мы допустили, что на малом промежутке $[x_0, x_0+\Delta]$ функция $f(x)$ имеет постоянное значение $f(x_0)$.) Таким образом, приходим к выводу, что каждая функция вида

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$$

является первообразной для функции $f(x)$ и каждая первообразная для $f(x)$ представима в этом виде.

Попробуем теперь найти способ описания множества *всех* первообразных для непрерывной функции $f(x)$. Как мы убедились, интеграл (3.04) является (при фиксированном a) функцией от переменной x, которая также будет и одной из первообразных для $f(x)$ функций. Если изменить значение нижнего предела интегрирования, положив вместо a некоторое b, то мы получим *другую* первообразную функцию.

Обозначим эту новую первообразную как $F_1(x)$ и найдем связь между $F_1(x)$ и $F(x)$. По свойствам определенного интеграла

$$F_1(x) = \int\limits_b^x f(t)\,dt = \int\limits_b^a f(t)\,dt \; + \; \int\limits_a^x f(t)\,dt = F(x) + C \;,$$

где $C = \int\limits_b^a f(t)\,dt$ – некоторая константа. Следовательно, все первообразные непрерывной функции $f(x)$ могут отличаться друг от друга лишь на произвольную постоянную.

Для практических целей удобно ввести специальное обозначение для всех первообразных функции $f(x)$ и обозначается как $\int f(x)\,dx$. Иными словами, в использованных нами обозначениях

$$\int f(x)\,dx \quad \equiv \quad \{\, F(x)+C\ ,\ \forall C\,\} \quad .$$

Заметьте также, что подсчет значений определенных интегралов иногда можно упростить, использовав равенства

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx \ = \ 2\cdot\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx\ , \tag{3.05}$$

если функция $f(x)$ – четная, и

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx \ = \ 0,$$

в случае нечетной $f(x)$. Проверьте справедливость этих равенств самостоятельно.

Примеры решения прикладных задач

Рассмотрим теперь , решение которых сводится к нахождению значения некоторого определенного интеграла.

Пример 3.2. Какую работу надо совершить, чтобы вытащить цилиндрическую пробку из горлышка бутылки (рис. 3)? Длина пробки равна L, сила трения пробки о поверхность горлышка, когда пробка целиком находится внутри горлышка, равна F и пропорциональна площади соприкосновения поверхностей пробки и горлышка, когда пробка вытащена лишь частично.

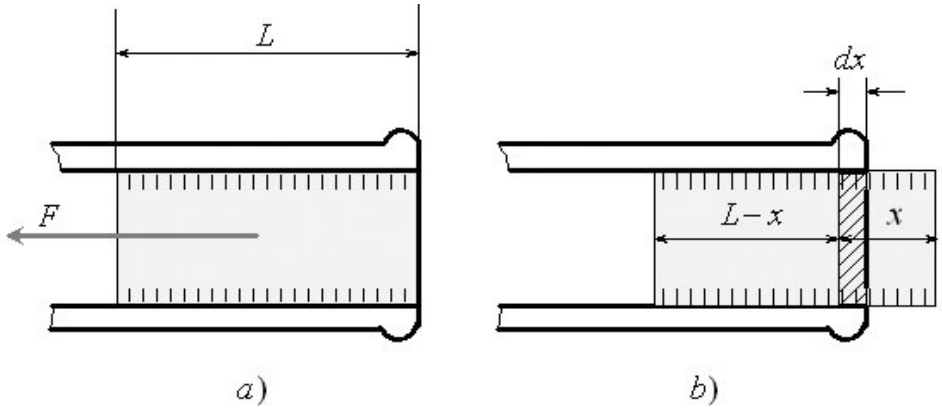

Рис. 3. Какую работу надо совершить, чтобы вытащить пробку?

Решение. Сила сопротивления движению (сила трения) максимальна в начальном положении пробки (см. рис. 3*a*.) По мере извлечения пробки из горлышка величина этой силы уменьшается, так как уменьшается площадь соприкосновения поверхностей пробки и горлышка.

Пусть пробка вытащена на длину x, тогда (см. рис. 3*b*) согласно условию задачи величина силы трения будет $F(x) = F \cdot \frac{L-x}{L}$, а работа по вытаскиванию пробки на малом перемещении dx равна $dA = F(x)\,dx$. Пробка будет вытащена, когда x станет равным L, поэтому полная работа равняется определенному интегралу $A = \int\limits_0^L F(x)\,dx$. Подставляя, получаем

$$A = \int\limits_0^L \left(F \cdot \frac{L-x}{L} \right) dx \;=\; F \int\limits_0^L 1 \cdot dx \;- \frac{F}{L} \int\limits_0^L x\,dx \;=$$

$$= F \left(x \Big|_0^L \right) - \frac{F}{L} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^L \right) = FL - \frac{F}{L} \cdot \frac{L^2}{2} = \frac{1}{2} FL\,.$$

Пример 3.3. За какое время опорожнится заполненная водой цилиндрическая бочка (рис. 4) высоты $H = 1.5$м и радиуса $R = 0.5$м через отверстие в ее основании радиуса $r = 1$см?

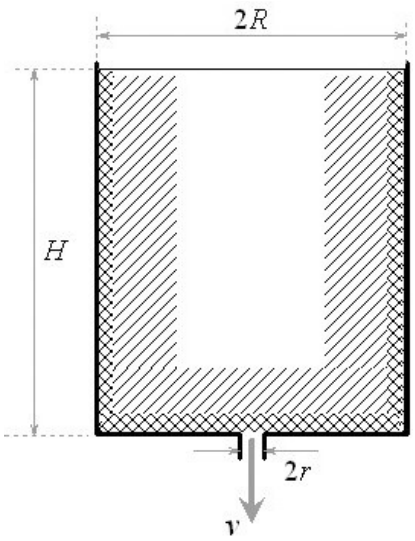

Рис. 4. За какое время вытечет вся вода из бочки?

Решение. Площадь горизонтального сечения воды в бочке $S = \pi R^2$, а площадь отверстия слива $s = \pi r^2$. Пусть за малое время dt понижение уровня воды в бочке составит dh, при этом $S\,dh = sv\,dt$, поскольку количество вытекшей жидкости очевидно равно уменьшению объема воды в бочке.

С другой стороны, по закону Торричелли, скорость истечения жидкости из сосуда, когда ее уровень в нем равен h, определяется формулой $v = \sqrt{2gh}$. Поэтому

$$dt = \frac{S}{sv}\,dh = \frac{1}{\sqrt{2g}}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot \frac{dh}{\sqrt{h}}\ .$$

Бочка опустеет, когда понижение уровня станет равным H, то есть, за время T, равное определенному интегралу,

$$T = \int\limits_0^H \frac{1}{\sqrt{2g}}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot \int\limits_0^H \frac{dh}{\sqrt{h}} =$$

значение которого найдем по формуле 1° таблицы 6.2.1 при $a = -\frac{1}{2}$,

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot \left(2\sqrt{h}\Big|_0^H\right) = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sqrt{\frac{2H}{g}}\ .$$

При $H = 1.5$м, $R = 0.5$м, $r = 1$см и, приняв $g \approx 10\frac{\text{м}}{c^2}$, получим $T \approx 1370c$ или, примерно, 23мин.

Пример 3.4. (“Задача Коши”) Найти функцию $F(x)$ такую, что

$$F'(x) = e^{2x} + \cos 3x \quad \text{и} \quad F(0) = \frac{3}{2} \, .$$

Решение. Множество всех функций $F(x)$, для которых $F'(x) = e^{2x} + \cos 3x$, является неопределенным интегралом

$$\int \left(e^{2x} + \cos 3x\right) \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{3} \sin 3x + C \, .$$

Если в эту формулу подставить значение $x = 0$ и приравнять полученную величину $\frac{3}{2}$, то получим равенство

$$\frac{1}{2} e^{2 \cdot 0} + \frac{1}{3} \sin(3 \cdot 0) + C = \frac{3}{2} \, ,$$

из которого находим, что $C = 1$. Значит искомая функция имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{3} \sin 3x + 1 \, .$$

Завершая рассмотрение практического использования определенных интегралов, приведем пример геометрической задачи.

Пример 3.5. Пусть требуется найти площадь криволинейной фигуры, координаты точек которой в прямоугольной декартовой системе координат удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} 0 \le y \le x(x-3)^2, \\ 0 \le x \le 3\ . \end{cases}$$

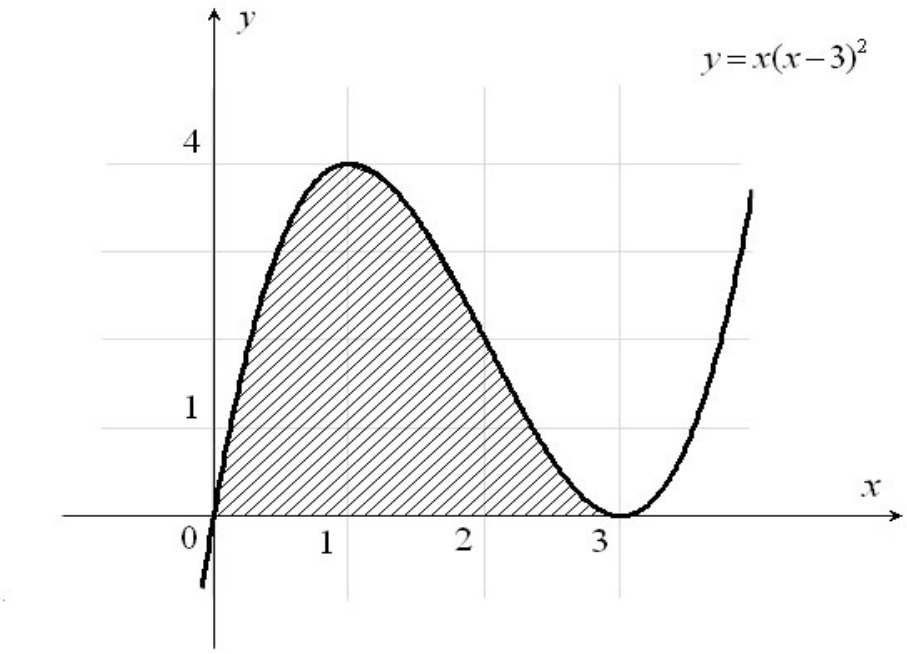

Рис. 5. Чему равна площадь криволинейной фигуры?

Решение. Глядя на рисунок 6.5, нетрудно заметить, что точки, координаты которых удовлетворяют данным ограничениям, принадлежат заштрихованной криволинейной фигуре, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, а снизу – графиком функции $y = 0$, то есть, просто, осью Ox.
Найдем величину площади этой фигуры. Согласно формуле (3.03) имеем

$$S = \int_0^3 x(x-3)^2 d\,x\ .$$

Приведем вначале подинтегральную функцию к виду, удобному для интегрирования

$$\int x(x-3)^2 d\,x = \int \left(x^3 - 6x^2 + 9x\right) d\,x.$$

Затем находим неопределенный интеграл

$$\int \left(x^3 - 6x^2 + 9x\right) d\,x = \int x^3 d\,x - 6\int x^2 d\,x + 9\int x d\,x =$$

$$= \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2} + C\ .$$

Наконец, используем формулу Ньютона-Лейбница

$$S = \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \left(\frac{3^4}{4} - 2\cdot 3^3 + \frac{9\cdot 3^2}{2}\right) - \left(\frac{0^4}{4} - 2\cdot 0^3 + \frac{9\cdot 0^2}{2}\right)\ .$$

И окончательно

$$S = \frac{81}{4} - 2\cdot 27 + \frac{81}{2} = \frac{27}{4}\ .$$

Криволинейные интегралы

Пусть в R^3 параметрически задана гладкая линия Γ .

$$\| \vec{r}(t) \| = \left\| \begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{array} \right\| \quad t \in [t_0, t_1] \,, \tag{3.06}$$

где $x(t), y(t), z(t)$ непрерывно дифференцируемые функции.

И пусть также каждой точке в R^3 , имеющей координатное представление $\| \vec{r} \| = \left\| \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right\|$, поставлено в соответствие единственное число $f(x, y, z)$.

Тогда дадим

Определение 3.5

Число, обозначаемое как

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y,z)\,dl$$

и равное

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt\,,$$

называется *криволинейным интегралом 1-го рода* функции $f(x,y,z)$ по линии Γ.

Пусть в R^3 (также, как и предыдущем случае) параметрически задана гладкая линия Γ .

И пусть также каждой точке в R^3, имеющей координатное представление $\| \vec{r} \| = \left\| \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right\|$, поставлен в соответствие единственный вектор $\vec{F}(x,y,z)$, имеющий координатное представление

$$\| \vec{F} \| = \left\| \begin{array}{c} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{array} \right\| ,$$

где функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам.

В этом случае дадим

Определение 3.6

Число, обозначаемое как

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

и равное

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)\,x'(t) +$$

$$+ Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)\,y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)\,z'(t) \Big)\,dt,$$

называется *криволинейным интегралом 2-го рода* вектор-функции $\vec{F}(x,y,z)$ по линии Γ.

Если ввести обозначения $\| d\vec{r} \| = \left\| \begin{array}{c} dx \\ dy \\ zz \end{array} \right\|$, то для функций $f(x,y,z)$ и $\vec{F}(x,y,z)$, часто называемых соответственно *скалярным* и *векторным полем*, возможно использование векторной формы для криволинейных интегралов как 1-го, так и 2-го рода:

$$\int\limits_{\Gamma} f(\vec{r})\, dl \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{\Gamma} \left(\vec{F}(\vec{r}), d\vec{r} \right).$$

Казалось бы, согласно определениям 3.5 и 3.6, вычисление криволинейного интеграла сводится, просто, к вычислению определенного интеграла специального вида. Однако, это не совсем так.

Дело в том, что в прикладных геометрических или физических задачах, требующих вычисления криволинейного интеграла, описание линии Г часто имеет геометрическую или физическую форму, а не параметрическое представление (3.06). В подобных случаях в процессе вычисления криволинейного интеграла предварительно потребуется выполнить параметризацию линии.

Сложность задачи параметризации линии Г обусловлена очевидной неоднозначностью ее решения. Следующие примеры демонстрируют, что в некоторых случаях параметризация может быть построена без особых усилий, но нередко для построения параметризации, приводящей задаче вычисления интеграла *с приемлемым уровнем затрат вычислительных ресурсов*, приходится использовать некоторые специальные свойства линии, такие как, например, ее осевая или точечная симметрия.

При вычислении криволинейных интегралов могут оказаться полезными их некоторые специфические свойства.

Свойство 3.1 Значение интеграла 1-го рода не зависит от того, какая из точек $\vec{r}(t_0)$ и $\vec{r}(t_1)$ будет являться началом и концом линии Γ.

Свойство 3.2 Значение интеграла 2-го рода меняет свой знак на противоположный при изменении направления обхода линии.

Свойство 3.3 Если для интеграла 2-го рода

$$J = \int\limits_{\Gamma} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

найдется непрерывно дифференцируемая функция $u(x,y,z)$ такая, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y,z), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y,z), \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = R(x,y,z),$$

то значение интеграла будет равно

$$J = u(x_1,y_1,z_1) - u(x_0,y_0,z_0)\,.$$

В этом случае подынтегральное выражение является *полным дифференциалом* функции $u(x,y,z)$, необходимым условием чего будет выполнение системы равенств

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}. \end{cases} \tag{3.07}$$

Несложно проверить, что, например, первое равенство этой системы во введенных выше обозначениях имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Задача 3.3 *Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода*

$$J = \oint_{\Gamma} (x + y)\, dl\,,$$

где Γ *замкнутый контур (на что указывает кружок на символе интеграла) — линия лежащая на плоскости* Oxy*, которая есть прямоугольный треугольник* OAB *с вершинами в точках* $O(0,\,0)$, $A(1,\,0)$, $B(0,\,1)$. *Контур* Γ *ориентирован против часовой стрелки, начало обхода контура — начало координат.*

Решение. Выполним параметризацию следующим незатейливым способом

$$x(t) = \begin{cases} t & \text{при} \quad t \in [0,\,1), \\ 2 - t & \text{при} \quad t \in [1,\,2), \\ 0 & \text{при} \quad t \in [2,\,3) \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \in [0,\,1), \\ t - 1 & \text{при} \quad t \in [1,\,2), \\ 3 - t & \text{при} \quad t \in [2,\,3) \end{cases}$$

Функция $z(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 3)$.

В силу свойства аддитивности определенного интеграла и определения 3.5

$$J = J_{OA} + J_{AB} + J_{BO},$$

$$\begin{aligned}
\text{причем для } OA: &\quad \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} = \quad 1, \\
\text{для } AB: &\quad \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} = \sqrt{2}, \\
\text{для } BO: &\quad \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} = \quad 1\,.
\end{aligned}$$

Поэтому

Решение получено.

$$J = \int_0^1 t \cdot 1\, dt + \int_1^2 1 \cdot \sqrt{2}\, dt + \int_2^3 (3-t) \cdot 1\, dt = 1 + \sqrt{2}\,.$$

Следующие задачи будем решать не «в лоб», а проявляя некоторую наблюдательность.

Задача 3.4

Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода

$$J = \oint\limits_{\Gamma} e^{-y}\,dx - \Big(xe^{-y} + 2y\Big)\,dy\,,$$

где Γ *тот же самый контур и с той же ориентацией, что и в задаче 3.3 .*

Решение.

Заметим, что, поскольку в данной задаче

$$P(x,y,z) = e^{-y}\,, \quad Q(x,y,z) = -xe^{-y} - 2y\,, \quad R(x,y,z) = 0\,,$$

то все равенства в системе (3.07) выполнены.
Действительно, здесь достаточно проверить, что

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^{-y}\,.$$

Тогда $u(x,y,z) = xe^{-y} - y^2\,.$

Решение получено.

По свойству 3.3 имеем $J = u(x_1,y_1,z_1) - u(x_0,y_0,z_0)\,,$ но в нашем случае контур замкнутый и, следовательно,

$$\begin{cases} x_0 = x_1, \\ y_0 = y_1, \\ z_0 = z_1, \end{cases} \quad \text{значит, } J = 0\,.$$

Задача 3.5 *Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода*

$$J = \int\limits_{\Gamma} x^2 \, dl \, ,$$

где Γ *линия пересечения плоскости* $x + y + z = 0$ *и сферы радиусом* a *и с центром в начале координат.*

Решение. Из курса аналитической геометрии известно, что в ортонормированной системе координат, координаты линии Γ должны удовлетворять следующей системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 + z^2 & = & a^2, \\ x + y + z & = & 0. \end{array} \right.$$

«Наивный» способ параметризации (скажем, если положить $z(t) = t$ и найти $x(t)$ с $y(t)$ из системы) приводит к вычислениям, мягко говоря, весьма большой сложности. Убедитесь в этом самостоятельно.

Имеет смысл поступить иначе. Пусть $\left\{O\,,\ \vec{e}_1\,,\ \vec{e}_2\,,\ \vec{e}_3\right\}$ — исходная ортонормированная система координат, Попробуем найти новую ортонормированную систему координат, в которой линия Γ (являющаяся очевидно окружностью) имела бы *канонический*, то есть, наиболее простой, вид.

Воспользуемся тем, что эта линия обладает не только точечной (относительно своего центра) симметрией, но и имеет ось симметрии — прямую, проходящую через центр окружности перпендикулярно ее плоскости.

Поэтому за один (с номером 3) из новых базисных векторов примем нормальный (но пока *ненормированный*) вектор плоскости $x + y + z = 0$, например, вектор

$$\| \vec{e}\,'_3 \| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\| .$$

Пусть два других базисных вектора лежат в плоскости $x+y+z=0$ и перпендикулярны друг другу.

Будем считать, что начала этих векторов находятся в центре окружности O. Тогда, чтобы найти эти векторы, достаточно получить пару решений данного уравнения, которые будут координатами их концов.

Для этого рассмотрим уравнение $x+y+z=0$ как *однородную систему линейных уравнений*, состоящую из одного уравнения с тремя неизвестными.

Запишем ее в виде $x=-y-z$, считая x *основным* неизвестным, y и z *свободными*. Тогда (это показано в курсе линейной алгебры) множество *всех* решений можно, например, записать как

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \lambda \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + \mu \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \quad \forall \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}\,.$$

Покажите самостоятельно, что при $\lambda = 1$ и $\mu = 0$ мы имеем частное решение, определяющее вектор вида

$$\| \vec{e}\,'_1 \| = \left\| \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\|,$$

а при $\lambda = 1$ и $\mu = -2$ частное решение — вектор

$$\| \vec{e}\,'_2 \| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -2 \end{array} \right\|,$$

причем эти два вектора ортогональны и, следовательно, линейно независимы.

После нормировки векторов $\left\{\vec{e}\,'_1\,,\ \vec{e}\,'_2\,,\ \vec{e}\,'_3\right\}$ получаем новый ортонормированный базис $\left\{\vec{e}\,''_1\,,\ \vec{e}\,''_2\,,\ \vec{e}\,''_3\right\}$, *формулы перехода* к которому (при неизменном начале координат) имеют вид

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x' &=& -\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'' &+& \dfrac{1}{\sqrt{6}}y'' &+& \dfrac{1}{\sqrt{3}}z''\,, \\ y' &=& \dfrac{1}{\sqrt{2}}x'' &+& \dfrac{1}{\sqrt{6}}y'' &+& \dfrac{1}{\sqrt{3}}z''\,, \\ z' &=& 0\cdot x'' &-& \dfrac{2}{\sqrt{6}}y'' &+& \dfrac{1}{\sqrt{3}}z''\,. \end{array}\right.$$

Теперь уравнение окружности Γ запишется так

$$\left\{\begin{array}{rcl} x''^2+y''^2 &=& a^2, \\ z'' &=& 0 \end{array}\right.$$

и параметризацию Γ можно выполнить, перейдя в *цилиндрическую* систему координат

$$\left\{\begin{array}{rcll} x''(t) &=& a\cos t\,, & \\ y''(t) &=& a\sin t\,, & t\in[\,0,2\pi)\,. \\ z''(t) &=& 0 & \end{array}\right.$$

При такой параметризации

$$\sqrt{x''^2(t)+y''^2(t)+z''^2(t)}=a\,.$$

А подынтегральная функция (скалярное поле) примет вид

$$z^2=\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}y''+\frac{1}{\sqrt{3}}z''\right)^2=\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 a^2\sin^2 t\,,$$

что приводит к

Решение получено.

$$J=\frac{2}{3}a^3\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt=\frac{2a^3}{3}\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\Big(1-\cos 2t\Big)\,dt=\frac{2\pi a^3}{3}\,.$$