Исследование функций многих переменных на дифференцируемость

Метод исследования функций многих переменных на дифференцируемость продемонстрируем на примере решения следующей задачи.

Задача 4.1 *Исследовать на дифференцируемость в начале координат функции* $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2y^2}$ *и* $g(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

Решение. 1. Исследование на дифференцируемость в силу определения 3.3 для функции $f(x,y)$ в точке $\|x_0\, y_0\|$ сводится к получению ответа на вопрос: *справедливо ли равенство*

$$\lim_{\|x\,y\|\to\|x_0\,y_0\|}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-A\big(x-x_0\big)-B\big(y-y_0\big)}{\sqrt{\big(x-x_0\big)^2+\big(y-y_0\big)^2}}=0, \tag{4.01}$$

где $A=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ *и* $B=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$?

2. Рассмотрим функцию $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2y^2}$ в начале координат. Для нее $f(0,0) = 0$.
Вычислять частные производные этой функции в начале координат по правилам дифференцирования очевидно нельзя. Поэтому воспользуемся формулой 3.01. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\big(\,0+t,0\,\big) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{t^2\cdot 0^2} - 0}{t} = 0\ .$$

Аналогично получаем, что $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Заметим также, что в начале координат

$$x - x_0 = x \qquad \text{и} \qquad y - y_0 = y\ .$$

3. Используя полученные результаты, условие (3.06) запишем в виде

$$\lim_{\|x\ y\| \to \|0\ 0\|} \frac{\sqrt[3]{x^2y^2} - 0 - 0 \cdot x - 0 \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

или, окончательно,

$$\lim_{\|x\ y\| \to \|0\ 0\|} \frac{\sqrt[3]{x^2y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \tag{4.02}$$

4. Перейдем в формуле (4.02) к полярной системе координат, сделав замену переменных

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Тогда будет справедлива оценка

$$0 \le \frac{\sqrt[3]{x^2y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt[3]{r^2\cos^2\varphi \cdot r^2\sin^2\varphi}}{r} \le \sqrt[3]{r}\,,$$

из которой по теореме «о двух милиционерах», в силу $r \to 0$, следует справедливость (4.01). Значит, $\sqrt[3]{x^2y^2}$ дифференцируема в начале координат.

5. Рассмотрим функцию $g(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ в начале координат. Для нее $f(0,0)=0$.
Частные производные этой функции в начале координат также придется вычислять по формуле 3.01.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{t^3+0^3}-0}{t} = 1 \;.$$

Аналогично находим $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \;.$

Опять же в начале координат

$$x - x_0 = x \qquad \text{и} \qquad y - y_0 = y\,.$$

6. Условие (4.01) теперь имеет вид

$$\lim_{\|x\ y\| \to \|0\ 0\|} \frac{\sqrt[3]{x^3 + y^3} - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \tag{4.03}$$

Покажем, что равенство (4.03) не верно, использовав отрицание определения предела по Гейне.
Действительно, если в формуле (4.03) выполнять предельный переход с $t \to 0$ по траектории

$$\begin{cases} x(t) = 0, \\ y(t) = t, \end{cases}$$

то мы получаем

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{0^3 + t^3} - 0 - t}{\sqrt{0^2 + t^2}} = 0,$$

В то же время, на траектории

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = t, \end{cases}$$

при $t > 0$ мы будем иметь

$$\lim_{t \to +0} \frac{\sqrt[3]{t^3 + t^3} - t - t}{\sqrt{t^2 + t^2}} = \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}} \neq 0,$$

Значит, равенство (4.03) не верно и функция $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$ недифференцируема в начале координат.

Покажем теперь, что рассмотренная схема исследования функции многих переменных на дифференцируемость может применяться для достаточно широкого класса задач.

Задача 4.2 *Исследовать на дифференцируемость в начале координат функцию*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+xy}-e^{\frac{xy}{2}}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & \textit{если} \quad x^2+y^2\neq 0\,,\\ 0, & \textit{если} \quad x^2+y^2=0\ .\end{cases}$$

Решение. 1. Для функции $f(x,y)$ $f(0,0)=0$ по условию задачи. В этом случае также, как и раньше, в начале координат

$$x-x_0=x \qquad \text{и} \qquad y-y_0=y\,.$$

Вычислим частные производные этой функции в начале координат по определению 2.01. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+t\cdot 0}-e^{\frac{t\cdot 0}{2}}}{t(t^2+0^2)^{\frac{3}{2}}}=0\ .$$

Аналогично $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0\ .$

2. Согласно определению дифференцируемости (4.02) и оценкам, полученным на предыдущем шаге решения должно быть справедливым равенство

$$\lim_{\|x\,y\|\to\|0\,0\|} \frac{\sqrt{1+xy}-e^{\frac{xy}{2}}}{(x^2+y^2)^2} = 0\,, \qquad (4.04)$$

из которого следует, что при стремлении в начало координат по любой траектории, значение предела будет равно нулю.

Проверим выполнение этого условия на траектории

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = t, \end{cases}$$

где мы будем иметь по формулам Тейлора

$$\lim_{t\to+0} \frac{\sqrt{1+t^2}-e^{\frac{t^2}{2}}}{4t^4} =$$

$$= \lim_{t\to+0} \frac{1+\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{8}t^4-1-\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{8}t^4+o(t^4)}{4\,t^4} = -\frac{1}{16} \neq 0\,.$$

Но это означает, что равенство (4.04) не выполняется в силу отрицания определения предела по Гейне и рассматриваемая функция недифференцируема в начале координат.

Задача 4.3 *Исследовать на дифференцируемость в начале координат функцию*

$$f(x,y) = \sin\left(3 + x^{\frac{2}{9}} y^{\frac{6}{7}}\right) .$$

Решение. 1. Для данной функции очевидно, что $f(0,0) = \sin 3$. Кроме того, опять-таки будет

$$x - x_0 = x \qquad \text{и} \qquad y - y_0 = y .$$

Нетрудно убедиться, что значения частных производных данной функции в начале координат нулевые. Действительно, по определению 2.01 имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin\left(3 + t^{\frac{2}{9}} \cdot 0^{\frac{6}{7}}\right) - \sin 3}{t} = 0 .$$

Ясно, что и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Заметим, что использование правил дифференцирования здесь также не возможно.

2. Из определения дифференцируемости (4.02) и полученных оценок следует, что нам необходимо проверить выполнение равенства

$$\lim_{\|x\,y\|\to\|0\,0\|} \frac{\sin\left(3+x^{\frac{2}{9}}y^{\frac{6}{7}}\right)-\sin 3}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\,. \tag{4.05}$$

Преобразуем условие (4.05) следующим образом

$$\lim_{\|x\,y\|\to\|0\,0\|} \frac{2\sin\dfrac{x^{\frac{2}{9}}y^{\frac{6}{7}}}{2}\cdot\cos\dfrac{6+x^{\frac{2}{9}}y^{\frac{6}{7}}}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

и заметим, что справедлива оценка

$$\left|\frac{2\sin\dfrac{x^{\frac{2}{9}}y^{\frac{6}{7}}}{2}\cdot\cos\dfrac{6+x^{\frac{2}{9}}y^{\frac{6}{7}}}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\frac{x^{\frac{2}{9}}y^{\frac{6}{7}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,. \tag{4.06}$$

3. Перейдем в правой части неравенства (2.11) к полярной системе координат, сделав замену переменных

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Тогда будет справедлива оценка

$$\frac{x^{\frac{2}{9}}y^{\frac{6}{7}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r^{\frac{2}{9}}\cos^{\frac{2}{9}}\varphi \cdot r^{\frac{6}{7}}\sin^{\frac{6}{7}}\varphi}{r} \le r^{\frac{5}{63}} \,,$$

из которой (поскольку $r \to 0$) следует справедливость (4.05).

Таким образом, мы приходим к заключению, что функция $\sin\left(3 + x^{\frac{2}{9}}y^{\frac{6}{7}}\right)$ дифференцируема в начале координат.

Решение получено.

Задача 4.4 *Исследовать на дифференцируемость в начале координат функцию*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x^2+y^2=0, \\ e^{\dfrac{-2}{x^2+y^2-\frac{5}{4}xy}} & \text{при} \quad x^2+y^2\neq 0. \end{cases} .$$

Решение. 1. Для данной функции $f(0,0)=0$, поэтому

$$x-x_0=x \qquad \text{и} \qquad y-y_0=y\,.$$

Значения частных производных данной функции в начале координат нулевые. Это следует из определения 3.01. Например, по правилу Лопиталя

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{e^{\dfrac{-2}{t^2+0^2-\frac{5}{4}t\cdot 0}}}{t} = \lim_{u\to\infty}\frac{u}{e^{2u^2}} = 0\,.$$

Здесь мы положили $u=\dfrac{1}{t}$. Аналогично и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Заметим, что использование правил дифференцирования в этой задаче также невозможно.

2. Проверим выполнение равенства

$$\lim_{\|x\,y\|\to\|0\,0\|} \frac{e^{\dfrac{-\,2}{x^2+y^2-\frac{5}{4}xy}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Сделаем следующую замену переменных (где $r>0$)

$$\begin{cases} x = \dfrac{\cos\varphi}{r}, \\ y = \dfrac{\sin\varphi}{r}. \end{cases}$$

Тогда проверяемое равенство примет вид

$$\lim_{\|r\,\forall\varphi(r)\|\to\|\infty\,\forall\varphi\|} r\,e^{\dfrac{-\,2r^2}{1-\dfrac{5}{8}\sin 2\varphi}} = 0\,.$$

Оно справедливо в силу оценки

$$\frac{3}{8} \le 1-\frac{5}{8}\sin 2\varphi \le \frac{13}{8}$$

Решение получено. и правила Лопиталя. Значит, рассматриваемая функция $f(x,y)$ дифференцируема в начале координат.

Дифференциалы функции многих переменных

Из определения 4.02 и теоремы 3.1 вытекает, что разность значений дифференцируемой функции $f(x,y)$ для близких точек $\|x\,y\|$ и $\|x_0\,y_0\|$ в первую очередь определяется суммой

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\big(x-x_0\big)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\big(y-y_0\big)\,,$$

которая произвольно зависит от $\|x_0\,y_0\|$, но линейно — от разностей $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = y - y_0$.

Поскольку точка $\|x\,y\|$ выбирается независимо от $\|x_0\,y_0\|$, то Δx и Δy также являются *независимыми* от $\|x_0\,y_0\|$ переменными. Это позволяет нам право ввести в рассмотрение новую *функцию* от четырех переменных $x_0, y_0, \Delta x$ и Δy следующего вида

$$df\big(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y\big)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,\Delta y\,.$$

Заметим, что здесь df является не произведением, а символом обозначающим эту новую функцию.

Обе точки $\|x\,y\|$ и $\|x_0\,y_0\|$ произвольные, поэтому в случаях, когда они не входят в одну формулу одновременно, для них можно использовать одинаковое обозначение $\|x\,y\|$.

Если обозначить $\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0)$ и опустить нулевые индексы, то формула (3.06) для дифференцируемой функции $f(x,y)$ запишется так

$$\Delta f = df\big(x, y, \Delta x, \Delta y\big) + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right) .$$

При этом для независимых переменных x и y будем считать по определению, что $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$.

Тогда можно дать

Определение 4.1	Функция четырех переменных, произвольно зависящая от x и y, и линейная по dx и dy $$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy\,. \qquad (4.07)$$ называется *первым дифференциалом* или, просто, *дифференциалом* функции $f(x,y)$ в точке $\|x\,y\|$.

Если зафиксировать значения dx и dy, то df можно считать обычной функций двух переменных и построить первый дифференциал для нее.

Другими словами,

$$d(df) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy\right)\delta x +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy\right)\delta y\ ,$$

где δx и δy дифференциалы независимых переменных при втором дифференцировании.

Поскольку можно (по определению) считать $\delta x = dx$ и $\delta y = dy$, то формула для $d(df)$ и, согласно правилам дифференцирования, принимает вид

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2\ . \tag{4.08}$$

Здесь мы предположили, что вторые смешанные производные для функции $f(x,y)$ непрерывны в рассматриваемой точке $\|x\,y\|$ и ввели обозначение $d(df) = d^2 f$.

Здесь дадим

Определение 4.2	Функция четырех переменных $d^2 f$, произвольно зависящая от x и y и являющаяся *квадратичной формой* от dx и dy, называется *вторым дифференциалом* функции $f(x,y)$ в точке $\|x\ y\|$.

Рассуждая аналогично, в условиях существования непрерывных частных производных соответствующего порядка, можно определить дифференциалы более высоких порядков, чем второй. Так для функции $f(x,y)$ дифференциал порядка m имеет вид

$$d^m f = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k} \partial y^k} dx^{m-k} dy^k \,.$$

Задача 4.5 *Найти первый и второй дифференциалs функции* $f(x,y) = \sin\big(x^2 + \ln y\big)$ *в точке* $\|\,0\ 1\|$.

Решение. 1. Найдем частные производные в точке $\| \, 0 \; 1 \|$. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\bigl(x^2+\ln y\bigr)\cdot 2x = 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos\bigl(x^2+\ln y\bigr)\cdot\frac{1}{y} = 1\,.$$

Для вторых производных находим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\sin\bigl(x^2+\ln y\bigr)\cdot 4x^2 + 2\cos\bigl(x^2+\ln y\bigr)\cdot 2x = 2\,,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -2x\left(\sin\bigl(x^2+\ln y\bigr)\cdot\frac{1}{y}\right) = 0\,,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\frac{1}{y}\bigl(\sin\bigl(x^2+\ln y\bigr)\bigr) - \cos\bigl(x^2+\ln y\bigr)\frac{1}{y^2} = -1\,.
\end{aligned}$$

2. Откуда согласно (4.07) и (4.08) получаем

$$df = dy \qquad \text{и} \qquad d^2 f = 2dx^2 - dy^2\,.$$

Решение получено.

В некоторых случаях, например когда функция $f(x,y)$ задана неявно, можно искать дифференциалы по правилам дифференцирования, не находя частных производных. Это демонстрирует

Задача 4.6 *Найти первый и второй дифференциалы функции $f(x,y)$ заданной уравнением*

$$\frac{\pi}{4} + f(x,y) - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \operatorname{arctg} f(x,y) = 0 \tag{4.09}$$

в точке $\|\,1\;1\|$, *если известно, что* $f(1,1) = 1$.

Решение. 1. Вначале необходимо проверить, что в зананной точке искомая функция имеет значение 1. Действительно,

$$\frac{\pi}{4}+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}1=0\,.$$

2. Первый дифференциал найдем формально дифференцируя (4.09). Имеем в заданной точке

$$df-xdx-ydy-\frac{df}{1+f^2}=0 \tag{4.10}$$

или

$$df-dx-dy-\frac{df}{2}=0 \qquad \Longrightarrow \qquad df=2dx+2dy\,.$$

3. Второй дифференциал находим, дифференцируя (4.10) и считая (согласно определению второго дифференциала), что dx и dy (но не df !) — константы. Получаем

$$d(df) - dx \cdot dx - x \cdot d(dx) - dy \cdot dy - y \cdot d(dy) -$$

$$-\frac{d(df) \cdot (1+f^2) - df \cdot 2f df}{(1+f^2)^2} = 0\,.$$

Поскольку $d(dx) = 0$ и $d(dy) = 0$, то

$$d^2 f - dx^2 - dy^2 - \frac{d^2 f}{1+f^2} + \frac{2f(df)^2}{(1+f^2)^2} = 0\,.$$

Первый дифференциал равен $df = 2dx + 2dy$, тогда

$$d^2 f - dx^2 - dy^2 - \frac{1}{2} d^2 f + 2(dx + dy)^2 = 0\,,$$

Решение получено.

что дает

$$d^2 f = 2dx^2 - 8dxdy - 2dy^2$$

Формула Тейлора для функции многих переменных

Можно показать, что в предположении существования в окрестности точки $\|x_0\, y_0\|$ непрерывных частных производных порядка N справедлива формула (называемая обычно *формулой Тейлора N-го порядка*)

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m!}\, d^m f + o\left(\left(\sqrt{dx^2+dy^2}\right)^N\right) .$$

Частный вид этой формулы

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + o\left(\sqrt{dx^2+dy^2}\right) .$$

или

$$\begin{gathered} f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + o\left(dx^2+dy^2\right) \end{gathered} \tag{4.11}$$

нередко используется в приложениях для локальной аппроксимации функций многих переменных степенными функциями первого и второго порядков. Обычно эта аппроксимация имеет своей целью исследование свойств функции $f(x,y)$ в малой окрестности точки $\|x_0\, y_0\|$.

Примером использования формулы Тейлора служит

Задача 4.7 *Представить формулой Тейлора порядка $N = 2$ функцию*

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

в окрестностях точек A) $\|0\,0\|$ и B) $\|1\,1\|$.

Решение. 1. Данную задачу можно решать двумя методами. В первом из них найдем частные производные до второго порядка включительно. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x\,.$$

Откуда находим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y\ .$$

Тогда, согласно (4.07) и (4.08), получаем для случая А), положив $\Delta x = x$, $\Delta y = y$ и учтя, что $f(0,0) = 0$ аппроксимацию

$$f\big(x,y\big) = -3\Delta x\Delta y + o\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right) \ .$$

Аналогично, для случая В), положив

$$\Delta x = x - 1, \qquad \Delta y = y - 1$$

и приняв во внимание, что $f(1,1) = -1$, находим

$$f\big(x,y\big) = -1 + 6\Delta x^2 - 3\Delta x\Delta y + 6\Delta y^2 + o\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right) \ .$$

2. Второй способ решения задачи основан на том факте, что если представление функции формулой Тейлора существует, то оно единственно.
Тогда, при замене переменных $\Delta x = x$ и $\Delta y = y$ и использовании равенства

$$\Delta x^3 + \Delta y^3 = o\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right)$$

в случае A) имеем

$$f(x,y) = -3xy + x^3 + y^3 = -3\Delta x \Delta y + o\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right) .$$

В случае B) используем замену переменных другого вида $\Delta x = x - 1$ и $\Delta y = y - 1$. В итоге это нам дает $x = \Delta x + 1, \quad y = \Delta y + 1$ и, соответственно,

$$f(x,y) = \left(\Delta x + 1\right)^3 + \left(\Delta yx + 1\right)^3 - 3\left(\Delta x + 1\right)\left(\Delta y + 1\right) =$$

после раскрытия скобок и приведения подобных членов

$$= -1 + 6\Delta x^2 - 3\Delta x\Delta y + 6\Delta y^2 + o\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right) .$$

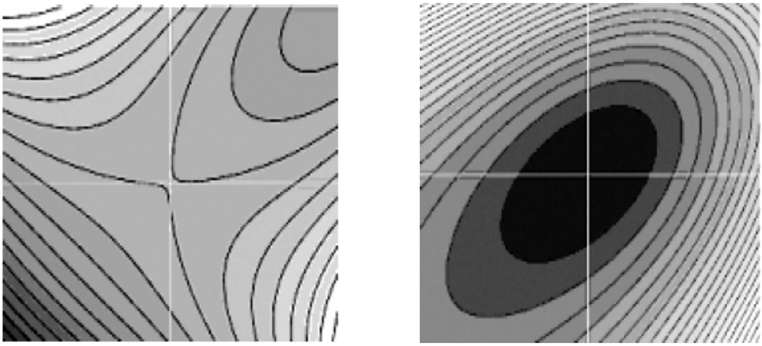

Рис. 1

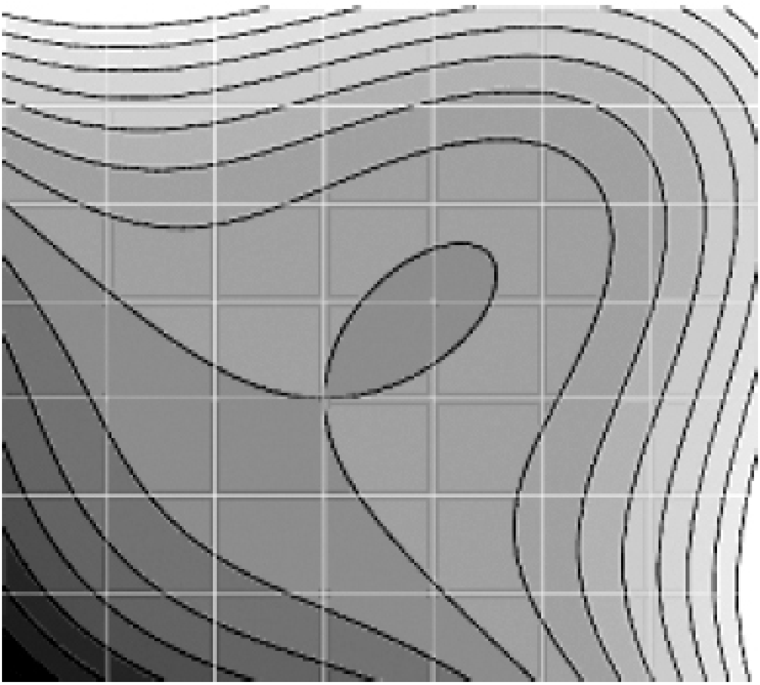

Рис. 2

3. Воспользуемся теперь полученными аппроксимациями для выяснения характера поведения в малых окрестностях точек а) и В).

Заметим, что графики аппроксимаций в координатах $\|\Delta x\,\Delta y\|$ (с точностью до величин порядка малости $o\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right)$) являются поверхностями второго порядка.

Причем в случае А) эта поверхность есть гиперболический параболоид, точка $\|0\,0\|$ седловая, вектор градиента в ней нулевой, но экстремума здесь нет.

В случае В) поверхность второго порядка также параболоид, но только эллиптический. В точке $\|1\,1\|$ вектор градиента нулевой и здесь есть локальый минимум.

Отмеченные свойства иллюстрируют рис. 2А и 2В. На рис. 3 показана общая картина изолиний рассматриваемой функции $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение получено.