Определенный интеграл как предел последовательности

До сих пор мы рассматривали свойства функций при помощи их локальных (то есть, относящихся к некоторой небольшой окрестности фиксированной точки) количественных характеристик, таких как: значение, предел, производная и т.п.

Однако, достаточно часто возникают задачи исследования свойств функций, относящихся к *не малым* промежуткам области определения.

К ним можно отнести, например, задачи отыскания числовых характеристик функции, таких как длина ее графика или площадь фигуры ограниченной графиком некоторой функции .

Методы решения подобных задач основаны на использовании специального математического понятия, называемого *определенным интегралом.*

Чтобы разобраться с этим понятием, дадим следующие определения.

Определение 5.1	Пусть дан отрезок $[a,b] \in \mathbb{R}$. Разобъем его на N промежутков точками x_k, удовлетворяющих условиям $$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b\,.$$ Такой набор промежутков назовем *разбиением отрезка* $[a,b]$, а число $\delta_\tau = \max\limits_{k=\overline{1,N}} \left| x_k - x_{k-1} \right|$ *мелкостью* этого разбиения.

Определение 5.2	Для некоторого разбиения выберем $\forall k = \overline{1,N}$ произвольно по одному числу $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Выражение вида $$\sigma_\tau\Big(f, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_N\Big) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k\,, \qquad (5.01)$$ где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, назовем *интегральной суммой Римана для функции* $f(x)$.

Определение 5.3	Если для любого разбиения τ и при любом выборе чисел ξ_k существует конечный $$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = A\,,$$ то этот предел называется *римановским определенным интегралом* для функции $f(x)$ на промежутке $\{\,a, b\,\}$ и обозначается $$\int\limits_a^b f(x)\,dx\,.$$

Если предел, указанный в определении 5.3, существует, то функцию $f(x)$ принято называть *интегрируемой* (или интегрируемой по Риману) на промежутке $\{\,a, b\,\}$.

К описанию понятия определенного интеграла стоит добавить следующий комментарий.

Из определения 5.3 следует, что определенный интеграл можно рассматривать как однозначное сопоставление функции $f(x)$, определенной на $[a, b]$, и числа $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. (Однозначность следует из того факта, что определенный интеграл есть предел. А предел, если существует, то он единственен).

Однозначное сопоставление числа некоторому элементу из множества объектов в математике принято называть *функционалом.*

Примерами функционалов могут служить, например, сопоставление вектору его длины, или детерминанта матрицы самой квадратной матрицы.

Наконец, функцию одной переменной можно считать функционалом на множестве чисел, являющимся ее областью определения. Или наоборот, можно рассматривать функционал как обобщение понятия функции.

Все это дает основание считать определенный интеграл *функционалом*, заданным на множестве функций, интегрируемых на промежутке $\{\, a, b \,\}$.

Использование определения 5.03 для обоснования интегрируемости некоторой функции (или ее неинтегрируемости) может оказаться достаточно сложной процедурой. Это в первую очередь связано с тем, что интегральная сумма Римана не является однозначной. Она зависит как от способа разбиения так и от выбора точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Иными словами, данная зависимость не является, вообще говоря, функцией. Поэтому представляют интерес альтернативные условия интегрируемости.

Чтобы описать их, дадим

Определение 5.4	Пусть $$M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \qquad \text{и} \qquad m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\,.$$ Обозначим $$S_\tau = \sum_{k=1}^{N} M_k \Delta x_k \qquad \text{и} \qquad s_\tau = \sum_{k=1}^{N} m_k \Delta x_k\,.$$ Тогда S_τ и s_τ называются соответственно *верхней и нижней суммами Дарбу функции* $f(x)$.

Оказываются справедливыми

Теорема 5.1 **Для того, чтобы ограниченная функция $f(x)$ была интегрируема на $[\,a,\,b\,]$ необходимо и достаточно, чтобы**

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \big(S_\tau - s_\tau \big) = 0\,.$$

Дополнительно обозначим $\quad J_* = \sup\limits_{\delta_\tau} s_\tau \quad$ и $\quad J^* = \inf\limits_{\delta_\tau} S_\tau\,.$

Теорема 5.2 **Для того, чтобы ограниченная функция $f(x)$ была интегрируема на $[\,a,\,b\,]$ необходимо и достаточно, чтобы $J_* = J^*$.**

Следствие 5.1 **Для того, чтобы ограниченная функция $f(x)$ была интегрируема на $[\,a,\,b\,]$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall\,\varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение τ, что $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$.**

Использование этих утверждений проиллюстрируем следующими примерами

Задача 5.1 *Исследовать при $x \in [0,1]$ на интегрируемость функцию*

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \sin \dfrac{\pi}{x}, & \textit{если} \quad x \in (0,1], \\ 0\,, & \textit{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

Решение. 1) На указанном множестве функция $f(x)$ ограничена и имеет разрывы первого рода в точках $x_j = \dfrac{1}{j}$.

2) Заметим, что на отрезке $[0,1]$ разность

$$\sup f - \inf f = 1 - (-1) = 2.$$

Разделим отрезок $[0,1]$ точкой x^* так, чтобы внутри правой части оказалось ровно N точек разрыва. Тогда в левой части их будет бесконечно много.

3) Очевидно, что $x^* < \dfrac{1}{N}$ и вклад 'левых' точек разрыва в разность сумм Дарбу не будет превышать $\dfrac{2}{N}$.

4) Для каждой из 'правых' точек выберем, содержащий ее отрезок следующего вида

$$x_j \in \left[x_j - \frac{1}{2N^2}, x_j + \frac{1}{2N^2} \right] .$$

Это гарантирует, что вклад в разность сумм Дарбу за счет каждой 'правой' точки не превысит $\dfrac{2}{N^2}$.

5) Поскольку 'правых' точек N, то оценка разности верхней и нижней сумм Дарбу для всего промежутка интегрирования составит

$$S_\tau - s_\tau < \frac{2}{N} + N \cdot \frac{2}{N^2} = \frac{4}{N}.$$

Построенное разбиение однозначно определяется значением N.

Пусть $N > N_\varepsilon = \left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1$, где $[A]$ обозначает целую часть A, тогда

$$\frac{4}{N} < \frac{4}{N_\varepsilon} = \frac{4}{\left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1} < \frac{4}{\left[\frac{4}{\varepsilon}\right]} = [\,\varepsilon\,] \leq \varepsilon\,.$$

Таким образом, $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon = \left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1$ такое, что $\forall N > N_\varepsilon \; : \quad S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. То есть, по следствию 5.1, функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[0, 1]$.

Решение получено.

Задача 5.2 *Исследовать при $x \in [0,1]$ на интегрируемость функцию*

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \textit{если} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0\,, & \textit{если} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Решение. Построим два разбиения, в первом из которых $x_k \in \mathbb{Q}$, а во втором — $x_k \notin \mathbb{Q}$.

Тогда условие теоремы 5.1 не выполняется и данная функция (называемая функцией Дирихле) неинтегрируема.

Решение получено.

Заметим, что, если функция $f(x)$ интегрируема, то интегрируема и функция $|\,f(x)\,|$. Обратное верно не всегда. В качестве примера рассмотрите на отрезке $[0,1]$ такую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{если} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ -1\,, & \text{если} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Заметим, что также при исследовании на интегрируемость могут оказаться следующие (достаточные) условия

Теорема 5.3 **Если ограниченная функция $f(x)$ непрерывна на $[\,a,\,b\,]$, то она интегрируема.**

Теорема 5.4 **Если ограниченная функция $f(x)$ монотонна на $[\,a,\,b\,]$, то она интегрируема.**

Обратим здесь внимание на следующее.

Во-первых, значение определенного интеграла не зависит от того, как обозначается переменная интегрирования. Например, вместо x можно использовать t. Иначе говоря,

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{и} \qquad \int_a^b f(t)\,dt \qquad \text{– это одно и то же!}$$

Во-вторых, если для функции $f(x)$ удается подобрать первообразную функцию $F(x)$, то вместо предельного перехода в интегральной сумме (5.1) при нахождении определенного интеграла можно пользовать формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

В заключение отметим, что dx в обозначении интеграла следует рассматривать с одной стороны как множитель подынтегрального выражения, а с другой – как дифференциал независимой переменной интегрирования x.

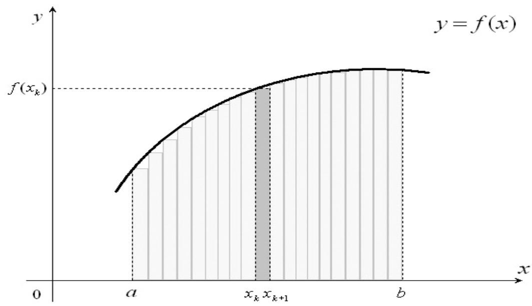

Рис. 1. Геометрический смысл определенного интеграла

Геометрический смысл определенного интеграла

Выясним теперь *геометрический смысл* определенного интеграла функции, имеющей неотрицательные значения на $[a,b]$.

На рис. 6.1 показаны график функции $y = f(x)$ и разбиение отрезка $[a,b]$ на N частей точками $x_1, x_2, \ldots x_{N-1}$. Нетрудно заметить, что для показанного на рис. 1, примера интегральная сумма (5.01)

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)\Delta x_k,$$

равна площади «ступенчатой» фигуры, образованной из N прямоугольников, $k-$й из которых имеет длину основания $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и высоту $f(x_k)$.

При предельном переходе $N \to \infty$ эта площадь стремится к S – площади фигуры, ограниченной снизу осью Ox, слева и справа – вертикальными прямыми, проходящими через точки $x = a$ и $x = b$, и ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$. Поэтому в данном случае будет справедливо равенство

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx \quad . \tag{5.03}$$

Поскольку площадь геометрической фигуры должна быть *неотрицательным* числом, использование приведенной геометрической интерпретации определенного интеграла в общем случае следует производить *с учетом знака* подынтегральной функции $y = f(x)$.

Свойства определенного интеграла

Приведем теперь (без доказательства) основные свойства определенного интеграла, вытекающие из его определения.

1°. *Интегрирование суммы функций*:

$$\int\limits_a^b \Big(\; f(x) + g(x) \; \Big) \, dx = \int\limits_a^b f(x) \; dx + \int\limits_a^b g(x) \, dx \quad .$$

2°. *Интегрирование произведения числа на функцию*:

$$\int\limits_a^b \Big(k \cdot f(x) \Big) \, dx = k \cdot \int\limits_a^b f(x) \, dx \quad .$$

3°. *Аддитивность интегрирования, то есть интегрирование функции по объединению отрезков интегрирования*:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx \;=\; \int\limits_a^c f(x)\,dx \;.$$

4°. *По определению также считается, что справедливы равенства*:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^a f(x)\,dx = 0\;.$$

5°. *Интегрирование по частям*:

$$\int\limits_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)\,g(x)\,dx \ .$$

6°. *Замена переменной интегрирования*:

$$\int\limits_a^b f\Big(g(x)\Big)g'(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(u)\,du,$$

где $u = g(x)$ и $\alpha = g(a)\,,\ \beta = g(b)$

Для решения задач могут оказаться полезными свойства определенного интеграла, связанные с неравенствами.

7°. Если $\forall x \in [a,b]: \quad f(x) \geq g(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq \int\limits_a^b g(x)\,dx \quad .$$

8°. Для любой интегрируемой функции $f(x)$

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int\limits_a^b \big|f(x)\big|\,dx\,.$$

9°. Если $\quad \forall x \in [a,b]: \quad m \leq f(x) \leq M$, то

$$m\int\limits_a^b g(x)\,dx \quad \leq \quad \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx \quad \leq \quad M\int\limits_a^b g(x)\,dx\,..$$

Связь первообразной и производной функций

Как уже было отмечено, в случае $f(x) = F'(x)$ функция $f(x)$ называется *производной функцией от функции* $F(x)$, а функция $F(x)$ – *первообразной функцией для функции* $f(x)$.

Соотношение $f(x) = F'(x)$ выражает производную через первообразную, и естественно возникает вопрос о том, как выразить первообразную через производную.

Ответ дается следующей формулой

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt\ , \tag{5.04}$$

где a – любое фиксированное число из области определения функции $f(x)$. Определенный интеграл в правой части равенства (5.04) называют *определенным интегралом с переменным верхним пределом.*

Убедимся, что из равенства (5.04) следует $F'(x) = f(x)$ для случая, когда функция $f(x)$ непрерывна. Действительно, для любой фиксированной точки x_0 из области определения $f(x)$ справедливы соотношения

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{F(x_0+\Delta) - F(x_0)}{\Delta} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} \cdot \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta} f(t)\,dt =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x_0)}{\Delta} \cdot \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta} 1 \cdot dt = \lim_{\Delta\to 0} f(x_0) \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta = f(x_0) \ ,$$

в силу формулы Ньютона-Лейбница и по свойствам 2° и 3° для определенного интеграла. (Фактически мы допустили, что на малом промежутке $[x_0, x_0+\Delta]$ функция $f(x)$ имеет постоянное значение $f(x_0)$.) Таким образом, приходим к выводу, что каждая функция вида

$$F(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt$$

является первообразной для функции $f(x)$ и каждая первообразная для $f(x)$ представима в этом виде.

Попробуем теперь найти способ описания множества *всех* первообразных для непрерывной функции $f(x)$. Как мы убедились, интеграл (5.04) является (при фиксированном a) функцией от переменной x, которая также будет и одной из первообразных для $f(x)$ функций. Если изменить значение нижнего предела интегрирования, положив вместо a некоторое b, то мы получим *другую* первообразную функцию.

Обозначим эту новую первообразную как $F_1(x)$ и найдем связь между $F_1(x)$ и $F(x)$. По свойствам определенного интеграла

$$F_1(x) = \int\limits_b^x f(t)\,dt = \int\limits_b^a f(t)\,dt \ + \ \int\limits_a^x f(t)\,dt = F(x) + C \ ,$$

где $C = \int\limits_b^a f(t)\,dt$ – некоторая константа. Следовательно, все первообразные непрерывной функции $f(x)$ могут отличаться друг от друга лишь на произвольную постоянную.

Криволинейные интегралы

Пусть в R^3 параметрически задана гладкая линия Γ .

$$\| \vec{r}(t) \| = \left\| \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{matrix} \right\| \quad t \in [t_0, t_1] \,, \tag{5.06}$$

где $x(t), y(t), z(t)$ непрерывно дифференцируемые функции.

И пусть также каждой точке в R^3 , имеющей координатное представление $\| \vec{r} \| = \left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\|$, поставлено в соответствие единственное число $f(x, y, z)$.

Тогда дадим

Определение 5.5	Число, обозначаемое как $$\int\limits_{\Gamma} f(x,y,z)\,dl$$ и равное $$\int\limits_{t_0}^{t_1} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt\,,$$ называется *криволинейным интегралом 1-го рода* функции $f(x,y,z)$ по линии Γ.

Пусть в R^3 (также, как и предыдущем случае) параметрически задана гладкая линия Γ .

И пусть также каждой точке в R^3 , имеющей координатное представление $\| \vec{r} \| = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}$, поставлен в соответствие единственный вектор $\vec{F}(x,y,z)$, имеющий координатное представление

$$\| \vec{F} \| = \begin{Vmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{Vmatrix} ,$$

где функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам.

В этом случае дадим

Определение 5.6 Число, обозначаемое как

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

и равное

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)\,x'(t) +$$

$$+\,Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)\,y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)\,z'(t)\Big)\,dt,$$

называется *криволинейным интегралом 2-го рода* вектор-функции $\vec{F}(x,y,z)$ по линии Г.

При вычислении криволинейных интегралов могут оказаться полезными их некоторые специфические свойства.

Свойство 5.1 Значение интеграла 1-го рода не зависит от того, какая из точек $\vec{r}(t_0)$ и $\vec{r}(t_1)$ будет являеться началом и концом линии Г.

Свойство 5.2 Значение интеграла 2-го рода меняет свой знак на противоположный при изменении направления обхода линии.

Свойство 5.3 Если для интеграла 2-го рода

$$J = \int\limits_{\Gamma} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

найдется непрерывно дифференцируемая функция $u(x,y,z)$ такая, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y,z), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y,z), \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = R(x,y,z),$$

то значение интеграла будет равно

$$J = u(x_1, y_1, z_1) - u(x_0, y_0, z_0)\,.$$

В этом случае подынтегральное выражение является *полным дифференциалом* функции $u(x,y,z)$, необходимым условием чего будет выполнение системы равенств

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}. \end{cases} \tag{5.07}$$

Несложно проверить, что, например, первое равенство этой системы во введенных выше обозначениях имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\,.$$

Задача 5.3 *Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода*

$$J = \oint\limits_{\Gamma} (x+y)\,dl\,,$$

где Γ *замкнутый контур (на что указывает кружок на символе интеграла) — линия лежащая на плоскости* Oxy, *которая есть прямоугольный треугольник* OAB *с вершинами в точках* $O(0,\,0)$, $A(1,\,0)$, $B(0,\,1)$. *Контур* Γ *ориентирован против часовой стрелки, начало обхода контура — начало координат.*

Решение. Выполним параметризацию следующим незатейливым способом

$$x(t) = \begin{cases} t & \text{при} \quad t \in [0,\,1), \\ 2-t & \text{при} \quad t \in [1,\,2), \\ 0 & \text{при} \quad t \in [2,\,3) \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \in [0,\,1), \\ t-1 & \text{при} \quad t \in [1,\,2), \\ 3-t & \text{при} \quad t \in [2,\,3) \end{cases}$$

Функция $z(t) = 0 \quad \forall t \in [0,3)$.

В силу свойства аддитивности определенного интеграла и определения 5.5

$$J = J_{OA} + J_{AB} + J_{BO},$$

$$\begin{aligned} \text{причем для } OA: &\quad \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)} = 1, \\ \text{для } AB: &\quad \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)} = \sqrt{2}, \\ \text{для } BO: &\quad \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)} = 1\,. \end{aligned}$$

Поэтому

$$J = \int\limits_0^1 t\cdot 1\,dt + \int\limits_1^2 1\cdot\sqrt{2}\,dt + \int\limits_2^3 (3-t)\cdot 1\,dt = 1+\sqrt{2}\,.$$

Решение получено.

Задача 5.4 *Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода*

$$J = \oint\limits_{\Gamma} e^{-y}\,dx - \Big(xe^{-y} + 2y\Big)\,dy\,,$$

где Γ *тот же самый контур и с той же ориентацией, что и в задаче 5.3 .*

Решение. Заметим, что, поскольку в данной задаче

$$P(x,y,z) = e^{-y}\,, \quad Q(x,y,z) = -xe^{-y} - 2y\,, \quad R(x,y,z) = 0\,,$$

то все равенства в системе (5.07) выполнены.
Действительно, здесь достаточно проверить, что

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^{-y}\,.$$

Тогда $u(x,y,z) = xe^{-y} - y^2$.

По свойству 5.3 имеем $J = u(x_1,y_1,z_1) - u(x_0,y_0,z_0)$, но в нашем случае контур замкнутый и, следовательно,

$$\begin{cases} x_0 = x_1, \\ y_0 = y_1, \\ z_0 = z_1, \end{cases} \quad \text{значит, } J = 0\,.$$

Решение получено.

Задача 5.5 *Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода*

$$J = \int\limits_{\Gamma} z^2\, dl\,,$$

где Γ *линия пересечения плоскости* $x+y+z=0$ *и сферы радиусом а и с центром в начале координат.*

Решение. Из курса аналитической геометрии известно, что в ортонормированной системе координат, координаты линии Γ должны удовлетворять следующей системе уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccc} x^2+y^2+z^2 & = & a^2, \\ x+y+z & = & 0. \end{array}\right.$$

«Наивный» способ параметризации (скажем, если положить $z(t)=t$ и найти $x(t)$ с $y(t)$ из системы) приводит к вычислениям, мягко говоря, весьма большой сложности. Убедитесь в этом самостоятельно.

Имеет смысл поступить иначе. Пусть $\left\{ O\,,\ \vec{e}_1\,,\ \vec{e}_2\,,\ \vec{e}_3 \right\}$ — исходная ортонормированная система координат, Попробуем найти новую ортонормированную систему координат, в которой линия Γ (являющаяся очевидно окружностью) имела бы *канонический*, то есть, наиболее простой, вид.

Воспользуемся тем, что эта линия обладает не только точечной (относительно своего центра) симметрией, но и имеет ось симметрии — прямую, проходящую через центр окружности перпендикулярно ее плоскости.

Поэтому за один (с номером 3) из новых базисных векторов примем нормальный (но пока *ненормированный*) вектор плоскости $x + y + z = 0$, например, вектор

$$\| \vec{e}\,'_3 \| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\| .$$

Пусть два других базисных вектора лежат в плоскости $x+y+z=0$ и перпендикулярны друг другу.

Будем считать, что начала этих векторов находятся в центре окружности O. Тогда, чтобы найти эти векторы, достаточно получить пару решений данного уравнения, которые будут координатами их концов.

Для этого рассмотрим уравнение $x+y+z=0$ как *однородную систему линейных уравнений*, состоящую из одного уравнения с тремя неизвестными.

Запишем ее в виде $x=-y-z$, считая x *основным* неизвестным, y и z *свободными*. Тогда (это показано в курсе линейной алгебры) множество *всех* решений можно, например, записать как

$$\left\|\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right\| = \lambda \left\|\begin{array}{r} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right\| + \mu \left\|\begin{array}{r} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right\| \quad \forall \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}\,.$$

Покажите самостоятельно, что при $\lambda = 1$ и $\mu = 0$ мы имеем частное решение, определяющее вектор вида

$$\| \vec{e}\,'_1 \| = \left\| \begin{array}{r} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\| ,$$

а при $\lambda = 1$ и $\mu = -2$ частное решение — вектор

$$\| \vec{e}\,'_2 \| = \left\| \begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ -2 \end{array} \right\| ,$$

причем эти два вектора ортогональны и, следовательно, линейно независимы.

После нормировки векторов $\left\{\vec{e}\,'_1\,,\ \vec{e}\,'_2\,,\ \vec{e}\,'_3\right\}$ получаем новый ортонормированный базис $\left\{\vec{e}\,''_1\,,\ \vec{e}\,''_2\,,\ \vec{e}\,''_3\right\}$, *формулы перехода* к которому (при неизменном начале координат) имеют вид

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & = & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'' & + & \dfrac{1}{\sqrt{6}}y'' & + & \dfrac{1}{\sqrt{3}}z''\,, \\ y & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}}x'' & + & \dfrac{1}{\sqrt{6}}y'' & + & \dfrac{1}{\sqrt{3}}z''\,, \\ z & = & 0\cdot x'' & - & \dfrac{2}{\sqrt{6}}y'' & + & \dfrac{1}{\sqrt{3}}z''\,. \end{array}\right.$$

Теперь уравнение окружности Γ запишется так

$$\left\{\begin{array}{ccc} x''^2+y''^2 & = & a^2, \\ z'' & = & 0 \end{array}\right.$$

и параметризацию Γ можно выполнить, перейдя в *цилиндрическую* систему координат

$$\left\{\begin{array}{ccl} x''(t) & = & a\cos t\,, \\ y''(t) & = & a\sin t\,, \qquad t\in[\,0,2\pi)\,. \\ z''(t) & = & 0 \end{array}\right.$$

При такой параметризации

$$\sqrt{x''^2(t) + y''^2(t) + z''^2(t)} = a\,.$$

А подынтегральная функция (скалярное поле) примет вид

$$z^2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}y'' + \frac{1}{\sqrt{3}}z''\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 a^2 \sin^2 t\ ,$$

что приводит к

Решение получено.

$$J = \frac{2}{3}a^3 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = \frac{2a^3}{3}\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\Big(1 - \cos 2t\Big)\, dt = \frac{2\pi a^3}{3}\,.$$