Функциональные последовательности

Решая прикладные задачи, нередко приходится сталкиваться с необходимостью аппроксимации одних функций (например, сложных или неудобных в представлении) другими, более простыми или удобными, допуская при этом, что данная аппроксимация выполняется с некоторой погрешностью.

Примером подобной аппроксимации является, например, формула Тейлора. Однако возможны и другие подходы к реализации этой идеи. Рассмотрим, один из них.

Дадим

Определение 65.1

Набор функций $f_k(x)\ \forall k \in \mathbb{N}$, определенных $\forall x \in X \subseteq \mathbb{R}$

Поточечная сходимость функциональной последовательности

Определение 6.2 Функцию $F(x)$ назовем *предельной функцией* для функциональной последовательности $\{f_k(x)\}$, если для каждой числовой последовательности вида $\{f_k(x_0)\}$ $\forall x_0 \in X$ имеет место

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x_0) = F(x_0)\,.$$

Заметим, что, если предел числовой последовательности существует, то он единственный. Поэтому зависимость $F(x)$ очевидно является *функцией*.

Тогда можно дать

Определение 6.3	Будем говорить, что, если $$\lim_{k\to\infty} f_k(x_0) = F(x_0) \quad \forall x_0 \in X\,, \tag{65.1}$$ то функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$ *сходится поточечно* к $F(x)$ на множестве X .

Напомним, что в кванторной форме условие (65.1) формулируется так:

$\forall x_0 \in X$ и $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ номер $N_{x_0,\,\varepsilon}$ такой, что $\forall n \geq N_{x_0,\,\varepsilon}$ выполняется условие

$$\Big|\, f_n(x_0) - F(x_0) \,\Big| < \varepsilon\,. \tag{65.2}$$

Здесь отметим что символ $N_{x_0,\,\varepsilon}$ означает возможность выбора номера N (по значению ε) для каждого x_0 по-своему, независимо от того, как этот выбор делался для других x_0.

Поскольку условие (65.2) выполняется для всех $x_0 \in X$, в случае, когда нас интересуют лишь значения функции $F(x)$, использование $f_k(x)$ как аппроксимации $F(x)$ при достаточно больших значениях k может быть вполне оправданым.

Однако не так просто обстоит дело в ситуации, когда нам важны не только близость значений, но также совпадение каких-то свойств у $F(x)$ и аппроксимирующей функции. Скажем, свойств непрерывности, или дифференцируемости.

Типичную для поточной сходимости ситуацию представляет

Задача 65.1 *Найти предельную функцию для функциональной последовательности* $f_k(x) = x^k$ *на множестве* $x \in [0,1]$.

Решение. Нетрудно видеть, что в данном случае

$$\lim_{k\to\infty} x^k = 0, \quad \text{если} \quad x \in [0,1)\,,$$

и

$$\lim_{k\to\infty} x^k = 1, \quad \text{если} \quad x = 1\,.$$

То есть,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \in [0,1), \\ 1, & \text{при} \quad x = 1. \end{cases}$$

Сравнение свойств функций $F(x)$ и x^k на отрезке $[0,1]$ показывает, что первая из них не является непрерывной, в то время как, вторая не только непрерывна, но и имеет производную любого порядка на этом отрезке. Рис. 1 иллюстрирует этот факт.

С другой стороны, нетрудно показать, что для данной функциональной последовательности на множестве $[0, \frac{1}{2}]$ предельная функция будет бесконечно дифференцируемой.

Вывод: при поточечной сходимости свойства членов функциональной последовательности необязательно совпадают со свойствами предельной функции.

Решение получено.

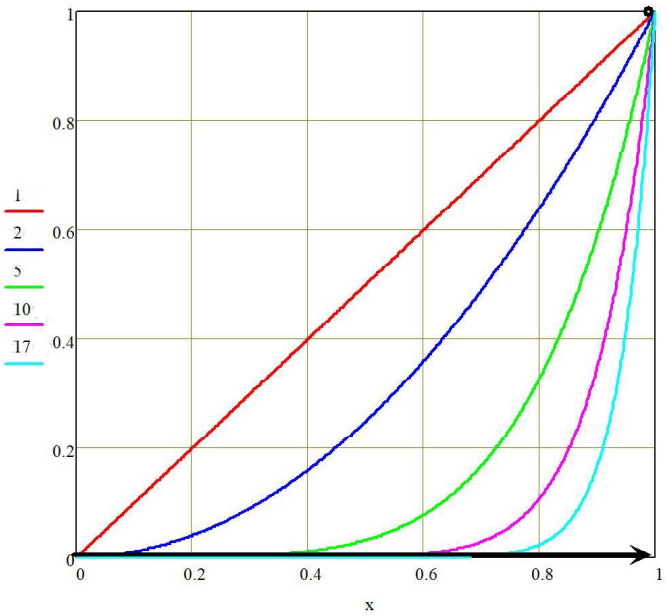

Рис. 1. Графики функций $f_k(x) = x^k$ для $k = 1, 2, 5, 10, 17$. для задачи 65.1.

Равномерная сходимость функциональной последовательности

Проблема формулировки условий, гарантирующих совпадение свойств членов функциональной последовательности и ее предельной функции, решается введением специального вида сходимости, называемого *равномерной сходимостью* на множестве X.

Изменим немного вариант кванторной формулировки определения 6.3 поточечной сходимости на множестве X функциональной последовательности $\{f_k(x)\}$, а именно, дадим

Определение 6.4	Будем говорить, что функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$ *сходится равномерно на множестве* X, если $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists$ номер N_ε такой, что $\forall x \in X$ и $\forall n \geq N_\varepsilon$ выполняется условие $$\Big\vert\, f_n(x) - F(x) \,\Big\vert < \varepsilon\,.$$

Основное отличие определения 6.4 от записи (6.2) заключается в том, что в случае равномерной сходимости функционального ряда номер N_ε находится (выбирается) по одному и тому же правилу *для всех* точек множества X.

Кроме того, из равномерной сходимости следует поточечная, но не наоборот!

Договоримся также о следующих обозначениях.

Поточечную сходимость функциональной последовательности $\{f_k(x)\}$ на множестве X к предельной функции $F(x)$ будем обозначать так $f_k(x) \underset{X}{\to} F(x)$. А для равномерной сходимости $\{f_k(x)\}$ на множестве X будем использовать обозначение $f_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} F(x)$.

Соответственно случаи отсутствия поточечной или равномерной сходимости обозначим символами $f_k(x) \underset{X}{\not\to} F(x)$. и $f_k(x) \underset{X}{\not\rightrightarrows} F(x)$.

Примером использования этих обозначений может служить

Определение 6.5	Будем говорить, что функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$ *сходится неравномерно на множестве* X, если $f_k(x) \underset{X}{\to} F(x)$, но $f_k(x) \underset{X}{\not\rightrightarrows} F(x)$.

Возникает естественный вопрос: в чем заключается полезность свойства равномерной сходимости?

Ответ на этот вопрос дают следующие теоретические факты.

Теорема 6.1 **Если функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$ непрерывных на $[a,b]$ функций сходится равномерно на $[a,b]$ к предельной функции $F(x)$, то $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$.**

Теорема 6.2 **Если функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$ непрерывных на $[a,b]$ функций сходится равномерно на $[a,b]$ к предельной функции $F(x)$, то функциональная последовательность $\left\{\int\limits_{x_0}^{x} f_k(u)\,du\right\}$ сходится равномерно к функции $\int\limits_{x_0}^{x} F(u)\,du$, где $x_0 \in [a,b]$.**

Теорема 6.3 **Если функциональная последовательность дифференцируемых на $[a,b]$ функций $\{f_k(x)\}$**

— сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a,b]$,

— а последовательность $\{f'_k(x)\}$ сходится равномерно на $[a,b]$,

то последовательность $\{f_k(x)\}$ будет сходится равномерно на $[a,b]$ к непрерывно дифференцируемой на $[a,b]$ функции $F(x)$ такой, что

$$F'(x) = \lim_{k\to\infty} f'_k(x) \quad \forall x \in [a,b]\,.$$

Для полноты описания также покажем, что функциональная последовательность $f_k(x) = x^k$, рассмотренная в задаче 6.1, не сходится равномерно на множестве $x \in [0,1]$.

С этой целью сформулируем предварительно в кванторной форме *отрицание* определений 6.4 и 6.5.

Определение 6.6	Будем говорить, что функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$ *сходится неравномерно на множестве* X , если $f_k(x) \underset{X}{\to} F(x)$ и $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall N \quad \exists x_0 \in X$ и $\exists n_0 \geq N$, при которых выполняется условие $$\Big\vert\, f_{n_0}(x_0) - F(x_0) \,\Big\vert \geq \varepsilon_0 \,.$$

Заметим, что для функциональной последовательности $\{x^k\}$, на отрезке $[0,1]$ $\exists\,\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$ такое, что $\forall N$ $\exists\, n_0 = N$ и $\exists\, x_0 = \dfrac{1}{\sqrt[n_0]{2}} < 1$, для которых выполняется условие

$$\Big|\, f_{n_0}(x_0) - F(x_0) \,\Big| = \Big|\, x_0^{n_0} - 0 \,\Big| = \left(\frac{1}{\sqrt[N]{2}}\right)^N = \frac{1}{2} \geq \varepsilon_0\,.$$

А это, согласно определению 6.6, и доказывает отсутствие равномерной сходимости.

Наконец, принимая во внимание решение задачи 6.1, делаем заключение, что рассматриваемая функциональная последовательность сходится неравномерно на отрезке $[0,1]$.

Условия равномерной сходимости функциональной последовательности

Теоремы 6.1 — 6.3 формулируют *достаточные* (но не необходимые!) условия, при которых такие свойства, как непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость у членов функциональных последовательностей гарантируют аналогичные свойства для предельных функций.

Поэтому представляют практический интерес критерии, на основании которых можно делать заключение о наличии или отсутствии у функциональной последовательности свойства равномерной сходимости.

Сформулируем основные их них.

Теорема 6.4 **Для того, чтобы функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$, определенная на множестве X, равномерно сходилась на этом множестве к $F(x)$, необходимо и достаточно, чтобы**

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in X}\Big|\, f_k(x) - F(x)\,\Big| = 0\,.$$

Следствие 6.1 **Если существует** *бесконечно малая* **числовая последовательность $\{A_k\}$ и номер N такие, что**

$$\forall k \geq N \qquad \Big|\, f_k(x) - F(x)\,\Big| \leq A_k\,,$$

то $\quad f_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} F(x)\,.$

Теорема 6.5 (критерий Коши)

Для того, чтобы функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$ **, определенная на множестве** X **, равномерно сходилась на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы**

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ номер } N_\varepsilon \text{ такой, что}$$
$$\forall k \geq N_\varepsilon\,, \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X$$

выполнялось условие $\left| f_{k+p}(x) - f_k(x) \right| < \varepsilon\,.$

Теорема 6.6 (отрицание критерия Коши)

Для того, чтобы функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$ **, определенная на множестве** X **, не сходилась равномерно на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы**

$$\forall \text{ номера } N \in \mathbb{N},$$
$$\text{нашлись } \varepsilon_0 > 0,\ k_0 \geq N,\ x_0 \in X \text{ и } p_0 \in \mathbb{N}$$

такие, чтобы выполнялось условие

$$\left| f_{k_0+p_0}(x_0) - f_{k_0}(x_0) \right| \geq \varepsilon_0\,.$$

Критерием Коши (равно как и его отрицанием) удобно пользоваться в тех случаях, когда предельная функция $F(x)$ не известна, или не представима в удобной для использования форме.

В качестве примера рассмотрим снова задачу 6.1 и докажем с помощью теоремы 6.6 отсутствие равномерной сходимости для функциональной последовательности $\{x^k\}$, на отрезке $[0,1]$.

Заметим, что $\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists\, n_0 = N \geq N$, $p_0 = N$ и $\exists\, x_0 = \dfrac{1}{\sqrt[n_0]{2}} < 1$, для которых справедливы соотношения

$$\left| f_{n_0+p_0}(x_0) - f_{n_0}(x_0) \right| = \left| x_0^{n_0+p_0} - x_0^{n_0} \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{1}{\sqrt[N]{2}}\right)^{2N} - \left(\frac{1}{\sqrt[N]{2}}\right)^{N} \right| = \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4} = \varepsilon_0 > 0\,.$$

которые, в силу теоремы 6.6, доказывают отсутствие равномерной сходимости.

Примеры исследования функциональной последовательности на сходимость

Задача 6.2 *Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность*

$$f_k(x) = \frac{k \sin^2 kx}{x^2 + k^2} \qquad x \in [\,0, +\infty)\ .$$

Решение. 1) Найдем вначале $F(x)$ — предельную функцию, то есть, при фиксированном неотрицательном x вычислим

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k \sin^2 kx}{x^2 + k^2}\,.$$

Имеем оценки

$$\left| \frac{k \sin^2 kx}{x^2 + k^2} \right| \le \frac{k}{x^2 + k^2} = \frac{1}{k + \dfrac{x^2}{k}} \quad \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0\,.$$

Откуда $F(x) \equiv 0\,.$

2) Теперь *сразу на всем* множестве $[\,0,+\infty)$ оценим

$$\left|\, f_k(x) - F(x) \,\right| = \left| \frac{k\sin^2 kx}{x^2+k^2} - 0 \right| \le \frac{k}{x^2+k^2} \le \frac{1}{k}.$$

Следовательно, в силу теоремы 6.4, исследуемая последовательность сходится на множестве $[\,0,+\infty)$ равномерно, поскольку

Решение получено.

$$0 \;\le\; \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in X} \left|\, f_k(x) - F(x) \,\right| \;\le\; \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \;=\; 0\,.$$

Задача 6.3 *Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность*

$$f_k(x) = \frac{kx^2}{1+k^2x^4}\,.$$

на: *1)* $E_1:\ x\in[0,1]$ *и* *2)* $E_2:\ x\in[1,+\infty)$.

Решение. 1) Легко видеть, что $F(x)\equiv 0$ — предельная функция на обоих множествах.
При этом

$$f_k'(x) = \frac{2kx(1-k^2x^4)}{(1+k^2x^4)^2} = 0$$

в точке $x_{0k} = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \in E_1$, в которой $f_k(x_{0k}) = \dfrac{1}{2}$.
Откуда следует, что все $f_k(x)$ монотонно убывают на E_2 и на всем этом множестве справедливы оценки

$$\left|\ f_k(x) - F(x)\ \right| = \left|\ \frac{kx^2}{1+k^2x^4} - 0\ \right| \le \frac{k}{1+k^2} < \frac{1}{k} \quad \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0\,.$$

Откуда следует равномерная сходимость исследуемой функциональной последовательности на E_2.

2) Поскольку $\forall k$ на E_1 есть точка $x_{0k} = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \in E_1$, в которой $f_k(x_{0k}) = \dfrac{1}{2}$, то

$$\frac{1}{2} \leq \sup_{x \in E_1} \Big| \, f_k(x) - F(x) \, \Big| \quad \underset{k \to \infty}{\not\to} \quad 0 \, .$$

Решение получено.

То есть, исследуемая функциональная последовательность не сходится равномерно на E_1, а сходится на этом множестве неравномерно (см. рис.2).

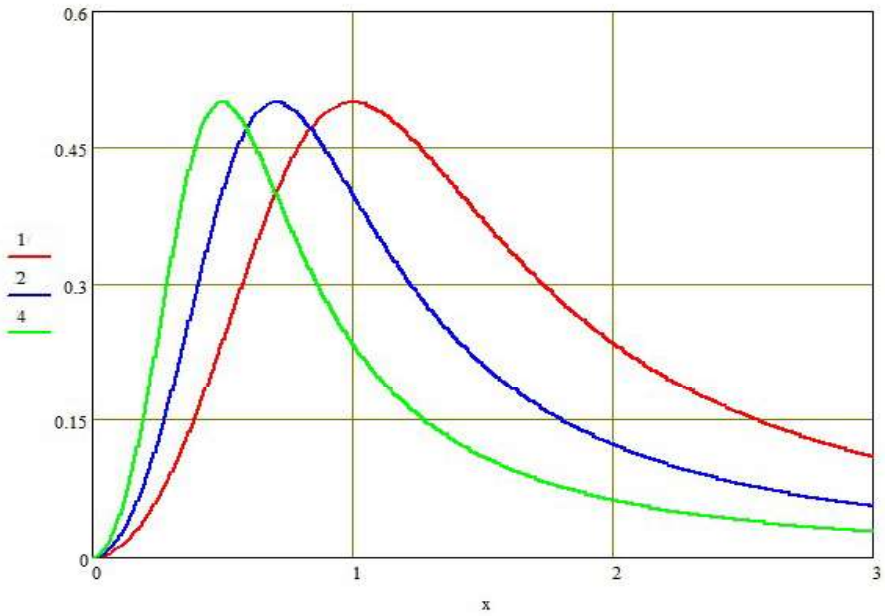

Рис. 2. Графики функций $f_k(x)$ для $k = 1, 2, 4$ в задаче 6.3.

Задача 6.4 *Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность*

$$f_k(x) = \frac{kx^2}{k^3 + x^3}\,.$$

на: *1)* $E_1 :\ x \in [0,1]$ *и* *2)* $E_2 :\ x \in [1, +\infty)$.

Решение. 1) Легко видеть, что $F(x) \equiv 0$ — предельная функция на обоих множествах.

При этом производная $f_k'(x) = \dfrac{kx(2k^3 - x^3)}{(k^3 + x^3)^2} = 0$ в точке $x_k^* = k\sqrt[3]{2} \in E_2$, в которой $f_k(x_k^*) = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{3} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Это означает, что все $f_k(x)$ монотонно возрастают на E_1 и на всем этом множестве справедливы оценки

$$\left|\, f_k(x) - F(x) \,\right| = \left| \frac{kx^2}{k^3 + x^3} - 0 \right| \le \frac{k}{1 + k^2} < \frac{1}{k} \quad \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0\,.$$

Откуда следует равномерная сходимость исследуемой функциональной последовательности на E_1.

2) Поскольку при любом k на E_2 имеется экстремальная точка $x_k^* = k\sqrt[3]{2}$, в которой $f_k(x_k^*) = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{3} \leq \sup_{x \in E_1} \Big| \, f_k(x) - F(x) \, \Big| \quad \underset{k\to\infty}{\not\to} \quad 0\,.$$

Решение получено.

Значит, исследуемая функциональная последовательность не сходится равномерно на E_2, а сходится на этом множестве неравномерно (см. рис.3).

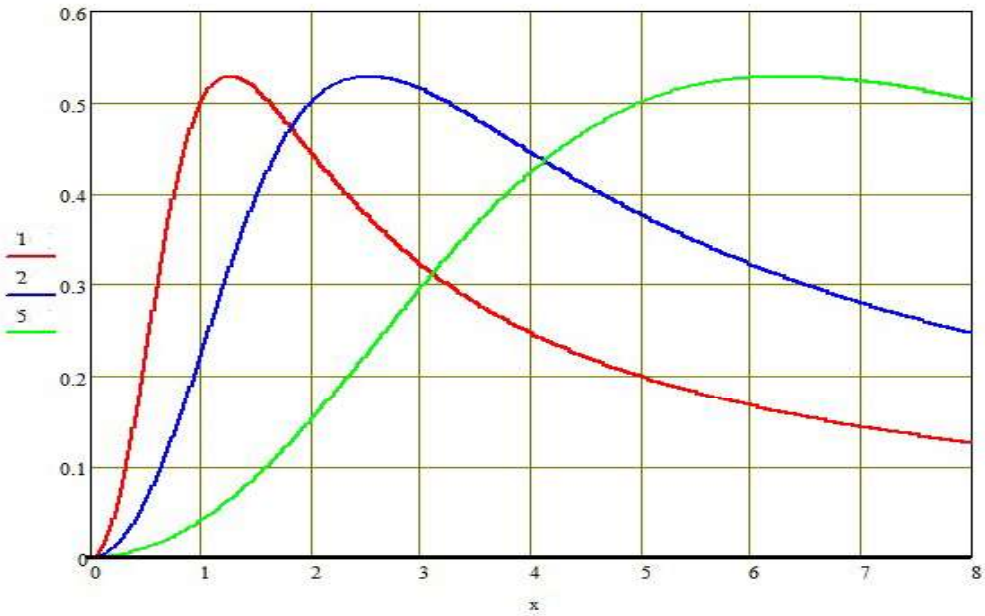

Рис. 3. Графики функций $f_k(x)$ для $k = 1, 2, 5$ в задаче 6.4.

Для решения следующей задачи нам потребуется дополнительный теоретический факт, связанный с использованием формулы Тейлора.

Известно, что, если функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные до порядка $n-1$ включительно, а в точке имеет призводную порядка n, то справедлива формула Тейлора с остаточным членом *в форме Пеано*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\big((x-x_0)^n\big)\,.$$

Если же дополнительно потребовать, чтобы функция $f(x)$ имела в некоторой окрестности точки x_0 производные до порядка $n+1$ включительно, то для любого x из этой окрестности найдется точка $\xi \in (x-x_0, x_0)\bigcup(x_0, x+x_0)$ такая, что оказывается справедливой формула Тейлора с остаточным членом *в форме Лагранжа*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,. \qquad (6.3)$$

Эта формула позволяет получать полезные оценки для значений функций.

Например, для функции $f(x) = \sin x$ при $n = 1$ в силу (6.3) мы имеем, что

$$\exists \xi \in \mathbb{R}\,, \quad \text{для которой} \quad \sin x = x + \frac{x^2}{2!}\left(\sin^{(2)} x\Big|_{x=\xi}\right).$$

Откуда следует, что

$$\left|\, \sin x - x \,\right| \leq \frac{x^2}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Задача 6.5 *Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность*

$$f_k(x) = k \operatorname{arctg} \frac{1}{kx}\,.$$

на: *1)* $E_1 :\ x \in (0,1)$ *и* *2)* $E_2 :\ x \in (1,+\infty)$.

Решение. 1) Для исследуемой функциональной последовательности предельная функция при фиксированном x на обоих множествах есть $F(x) = \dfrac{1}{x}$, поскольку

$$\lim_{k\to\infty} k \operatorname{arctg} \frac{1}{kx} = \frac{1}{x}\left(\lim_{k\to\infty} kx \operatorname{arctg} \frac{1}{kx}\right) = \frac{1}{x}\,.$$

2) На множестве E_1 для каждого номера k найдется точка $x_{0k} = \dfrac{1}{k}$, для которой, в силу $k \geq 1$, справедлива оценка

$$\left| k \operatorname{arctg} \frac{1}{kx_{0k}} - \frac{1}{x_{0k}} \right| = \left| k \operatorname{arctg} 1 - k \right| \geq \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) > 0\,.$$

А это означает, что

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in X} \left| f_k(x) - F(x) \right| \neq 0$$

и исследуемая последовательность сходится на E_1 неравномерно.

3) Рассмотрим теперь исследуемую последовательность на интервале E_2.
Функция $\operatorname{arctg} x$ имеет производную любого порядка на всей вещественной оси. Поэтому для нее будет справедлив следующий вариант формулы Тейлорпа с остаточным членом в форме Лагранжа (6.3)

$$\operatorname{arctg} x = x + \frac{(\operatorname{arctg} x)''_{x=\xi}}{2!} x^2 .$$

Проверьте самостоятельно, что значение $\operatorname{arctg}^{(2)} x$ на множестве E_2 не превосходит $1/2$. Поэтому для этого множества справедлива оценка $\left|\operatorname{arctg} x - x\right| \le \dfrac{x^2}{4}$, в силу которой

$$\Big|\, f_k(x) - F(x) \,\Big| = \left| k \operatorname{arctg} \frac{1}{kx} - \frac{1}{x} \right| = k \left| \operatorname{arctg} \frac{1}{kx} - \frac{1}{kx} \right| \le$$

Решение получено.

$$\le \quad k \frac{1}{4k^2x^2} \quad \le \quad \frac{1}{4k} \quad \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0 .$$

В заключение обсуждения свойств функциональных последовательностей обратим внимание на следующие важные детали.

Во-первых, от сутствие равномерной сходимости может не являться причиной наличия 'хороших' свойств у предельной функции. Рассмотрим

Пример 6.1. Пусть (см. рис. 4)

$$f_k(x) = \begin{cases} k^2 x & \text{при} \quad x \in [0, \dfrac{1}{k}], \\ k^2 \left(\dfrac{2}{k} - x \right) & \text{при} \quad x \in (\dfrac{1}{k}, \dfrac{2}{k}], \\ 0 & \text{при} \quad x \in (\dfrac{2}{k}, 1]. \end{cases}$$

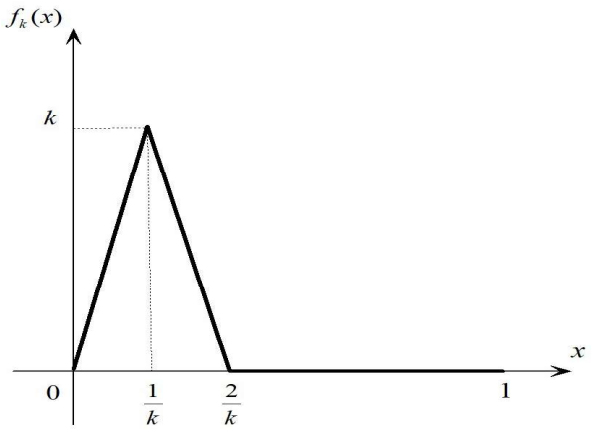

Рис. 4. График функции $f_k(x)$ для примера 6.1.

В данном примере предельная функция $F(x) \equiv 0$, ибо $\forall x^* \in (0,1]$ $\exists k$ такое, что $\dfrac{2}{k} < x^*$. А $f_k(0) = 0$ при каждом k.

Все функции $f_k(x)$ $x[\in [0,1]$ непрерывны, но недифференцируемы. И, кроме того, функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$ неограниченна, из чего следует, что сходимость неравномерная.

При этом предельная функция имеет производные любого порядка.

Во-вторых, условие равномерной сходимости функционального ряда, образованного непрерывно дифференцируемыми функциями, к непрерывно диффреренцируемой предельной функции не гарантирует возможности изменения порядка операций дифференцирования и предельного перехода.

Этот факт иллюстрирует

Пример 6.2. Рассмотрим для $x \in [0,1]$ функциональную последовательность с общим членом $f_k(x) = \dfrac{x^k}{k}$.

В силу оценки $\left|\dfrac{x^k}{k} - 0\right| \leq \dfrac{1}{k}$ данная последовательность сходится равномерно к функции. $F(x) \equiv 0$, для которой $F'(x) \equiv 0$.

С другой стороны,

$$f_k'(x) = x^{k-1} \quad \Longrightarrow \quad f_k'(1) \to 1 \neq F(1) = 0\,.$$

Напомним, что для функционалшьной последовательности условие перестановочности операций предельного перехода и дифференцирования дает теорема 6.3.

Наконец, отметим, что метод замены исследуемой функциональной последовательности на эквивалентную при предельном переходе вида $k \to \infty$ следует применять крайне осмотрительно, поскольку отбрасываемые o-малые члены могут оказаться сходящимися неравномерно. Рассмотрим

Пример 6.3. Функциональная последовательность $f_k(x) = \dfrac{1}{k} + \dfrac{x}{k^2}$ сходится на $[0, \infty)$ к $F(x) \equiv 0$ неравномерно, поскольку из существования $x_0 = k^2$ следует (проверьте это самостоятельно)

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in X} \Big| \, f_k(x) - F(x) \, \Big| \neq 0 \, .$$

При этом, хотя $\dfrac{x}{k^2} = o\left(\dfrac{1}{k}\right)$, отбрасывание данного слагаемого приведет к ошибке при определении вида сходимости, в силу того, что функциональная последовательность $\phi_k(x) = \dfrac{1}{k}$ оказывается равномерно сходящейся.