Числовые ряды

В ряде прикладных задач возникает необходимость использования математических объектов, формально являющихся суммой чисел с неограниченным числом слагаемых.

Такие объекты, по исторически сложившимися причинам, называемые *числовыми рядами*, можно описать, используя

Определение 7.1	Пусть дана некоторая числовая последовательность $\{a_n\}$. Тогда, формально записанное, выражение вида $$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$ называется *числовым рядом,* а числа $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ – *членами числового ряда.*

А также

Определение 7.2	Суммы первых n членов числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ $$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$ называются *частичными суммами* этого ряда.

и

Определение 7.3	Если существует $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = A$, то числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *сходящимся*, а число A называется *суммой ряда.* В противном случае числовой ряд называется *расходящимся.*

Задача 7.1 *Найти сумму ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k+k^2}$.

Решение. Заметим, что в данном случае $a_k = \dfrac{1}{k+k^2} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, поэтому

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+k^2} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \quad \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty \; .$$

Решение получено. Значит $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k+k^2} = 1$.

Задача 7.2 *Найти сумму ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}$.

Решение. В этой задаче

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}=\frac{1-\dfrac{1}{3^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{3}}\quad\to\quad\frac{3}{2}\qquad\text{при}\qquad n\to\infty\ .$$

Решение получено. То есть, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}=\frac{3}{2}$.

Теорема 7.1 **Если** $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0$, **то ряд** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ **расходится.**

Это — *необходимое* условие сходимости числового ряда. Его иллюстрирует

Задача 7.3 *Исследовать на сходимость ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{3k^3-1}{3k^3+2}\right)^{k^3}$

Решение. Имеем

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{3k^3-1}{3k^3+2}\right)^{k^3} = \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{3}{3k^3+2}\right)^{k^3} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k^3+\dfrac{2}{3}}\right)^{k^3+\frac{2}{3}} \cdot \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k^3+\dfrac{2}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{e} \neq 0\,.$$

Решение получено. Поэтому данный ряд расходится.

Определение 7.3 по сути является частным случаем определения предела числовой последовательности некоторого специального вида. При этом его практическое использование ограничивается тем, что в формулировке этого определения используется значение числа A, которое может оказаться (чаще всего A таковым и является) неизвестным.

Поэтому представляют интерес критерии, позволяющие делать заключение о сходимости (или расходимости) числового ряда, без нахождения значения числа A. Примером такого критерия может служить, скажем, теорема 7.1.

Более общим и практически более эффективным критерием такого рода может служить

Теорема 7.2 (критерий Коши) **Числовой ряд ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность частичных сумм этого ряда $\{S_n\}$ фундаментальна, т.е. $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что для всех натуральных $n \geq N_\varepsilon$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ справедливо**

$$| S_{n+p} - S_n | = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \, .$$

Этот критерий — одновременно *необходимое* и *достаточное* условие сходимости числового ряда. Поэтому для доказательства расходимости числового ряда может быть использована

Теорема 7.3 (отрицание критерия Коши) **Числовой ряд ряд** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **расходится тогда и только тогда, когда** $\exists \varepsilon_0 > 0$ **такое, что** $\forall N \in \mathbb{N}$ **найдутся** $n_0 \geq N$ **и** $p_0 \in \mathbb{N}$, **для которых выполняется неравенство**

$$\left| \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0} a_k \right| \geq \varepsilon_0 \,.$$

Использование критерия Коши и его отрицания иллюстрирует

Задача 7.4

Доказать, что:

$$1)\ \text{ряд} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{сходится} ;$$

$$2)\ \text{ряд} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{расходится} .$$

Решение. 1) Имеем оценку

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Подберем теперь номер N_ε, исходя из величины $\varepsilon > 0$.

Пусть $n \ge N_\varepsilon$, тогда $\dfrac{1}{n} \le \dfrac{1}{N_\varepsilon}$. Нам нужно, чтобы было $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Для чего возьмем N_ε такое, что $\dfrac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon \implies$ $\implies N_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Этому условию удовлетворяет натуральное N_ε, равное, например: $N_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, где $[x]$ — целая часть числа x. В итоге имеем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 \ : \quad \forall n \ge N_\varepsilon \ \text{ и } \ \forall p \in \mathbb{N} \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \right| < \varepsilon \, .$$

Поэтому данный числовой ряд сходится по критерию Коши.

2) Здесь используем другую оценку

$$\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0} \left| \frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \ldots + \frac{1}{n_0+p_0} \right| \geq \frac{p_0}{n_0+p_0}.$$

Поскольку p_0 любое натуральное, то возьмем $p_0 = n_0$, а это дает $\dfrac{p_0}{n_0+p_0} = \dfrac{1}{2}$.

В итоге получаем, что

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2} \quad : \qquad \exists n_0 = N+1 \text{ и } p_0 = n_0 \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad \left| \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0} \frac{1}{k} \right| \geq \frac{1}{2} = \varepsilon_0 \, .$$

`Решение получено.` Следовательно, данный числовой ряд расходится.

Рассмотрим еще один пример использования критерия Коши

Задача 7.5 *Доказать, что ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ *сходится ;*

Решение. 1) Имеем

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{(-1)^k}{k+1} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots - \frac{(-1)^{n+(p-2)}}{n+(p-1)} + \frac{(-1)^{n+(p-1)}}{n+p} \right| \leq$$

(уменьшим знаменатель каждого положительного слагаемого на 1)

$$\leq \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+5} + \frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+7} + \ldots \right|$$

Заметим, что, если последнее слагаемое имеет положительный знак, то оно уничтожается с предыдущим. В противном случае мы его, просто, отбрасываем, увеличивая оценку «сверху».
В итоге получаем, что

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{(-1)^k}{k+1} \right| \leq \frac{1}{n+1} \quad \forall p \in \mathbb{N}\,.$$

Проводя рассуждения, как в 1) задачи 7.4, приходим к заключению, что данный числовой ряд по критерию Коши сходится.

Решение получено.

Обратим внимание на свойство числовых рядов, заключающееся в том, что сумма слагаемых с неограниченным числом слагаемых не обладает, вообще говоря, свойством *ассоциативности.*

Проиллюстрируем этот факт следующими примерами.

Задача 7.6 *Показать неприменимость сочетательного свойства для суммы вида*

$$A = 1+2-3+1+2-3+1+2-3+1+2-3+1+2-3+\ldots$$

Решение. 1) Заметим предварительно, что ряд, все члены которого суть нули, сходится и его сумма равна нулю. Это следует из того, что любая последовательность частичных сумм этого ряда есть нулевая.

2) Попробуем подсчитать сумму рассматриваемого ряда, сгруппировав слагаемые сначала как

$$A = (1+2-3)+(1+2-3)+(1+2-3)+(1+2-3)+(1+2-3)+\ldots .$$

В этом случае мы приходим к заключению, что $A = 0$, поскольку каждая сумма в скобках дает ноль.

Однако, при другом способе группировки

$$A = 1+(2-3+1)+(2-3+1)+(2-3+1)+(2-3+1)+(2-3+\ldots$$

получаем $A = 1$. Это и означает неприменимость сочетательного правила для сумм с неограниченным числом слагаемых.

Решение получено.

Задача 7.6 может показаться не очень убедительным примером, поскольку рассмотренный в ней рад не является сходящимся. Действительно, для него не выполнено *необходимое* условие сходимости ряда $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Поэтому рассмотрим еще раз числовой ряд из задачи 7.5.

Задача 7.7 *Показать, что сумма ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k+1}$ *зависит от способа группировки его членов.*

Решение. 1) Поскольку ряд сходится (более того, можно показать, что $A = \ln 2$), то мы имеем

$$A = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \ldots$$

Перегруппируем слагаемые ряда следующим образом

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)+\ldots$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\ldots\right)=\frac{A}{2}.$$

Решение получено.

Это означает, что изменение способа группировки слагаемых в данном случае не нарушает сходимости, но меняет сумму ряда.

Числовые ряды с неотрицательными членами

Если $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, то для числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ имеются дополнительные возможности исследования его на сходимость. Приведем основные из них.

Теорема 7.4 **Ряд с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.**

Последовательность частичных сумм числового ряда с неотрицательными членами очевидно монотонно возрастающая, поскольку

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n \leq S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k = S_n + a_{n+1}\,.$$

С другой стороны. монотонно возрастающая и ограниченная сверху числовая последовательность сходится по теореме Вейерштрасса.

Теорема 7.5 (1-й признак сравнения) **Если для числовых рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ существует номер N такой, что $\forall k \geq N \quad 0 \leq a_k \leq b_k$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, а из расходимости рада $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, следует расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.**

Теорема 7.6 (2-й признак сравнения) **Числовые ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно, если существуют:**

1) номер N такой, что $\forall k \geq N \; 0 < a_k$ и $0 \leq b_k$, и

2) конечный ненулевой предел $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{b_k}{a_k}$.

Для радов с неотрицательными членами может оказаться применимым, основанный на использовании формулы Тейлора, метод *выделения главной части.*

Теорема 7.7 (интегральный признак) **Если функция $f(x)$ неотрицательная и убывающая на $[1, +\infty)$, то числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ и несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.**

Задача 7.8 *Исследовать на сходимость ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\lambda}}$.

Решение. Из интегрального признака следует, что данный ряд сходится и расходится одновременно с несобственным интегралом

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}}.$$

Решение получено. Поэтому исследуемый ряд сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda \le 1$.

Наконец, приведем важные для практики признаки Далембера и Коши.

Теорема 7.9 (признак Даламбера) **Если** $a_k > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ **и существует** $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lambda$, **то ряд** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **сходится при** $\lambda < 1$ **и расходится при** $\lambda > 1$. **В случае** $\lambda = 1$ **ряд может как сходиться, так и расходиться.**

Теорема 7.10 (признак Коши) **Если** $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ **и существует** $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lambda$, **то ряд** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **сходится при** $\lambda < 1$ **и расходится при** $\lambda > 1$. **В случае** $\lambda = 1$ **ряд может как сходиться, так и расходиться.**

Задача 7.9 *Исследовать на сходимость ряды*

1) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}\,,$$

2) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}\,.$$

Решение. 1) Применим 1-й признак сравнения

$$\frac{k!}{k^k} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots k}{k\cdot k\cdot k\cdot k\ldots k} \le \frac{1\cdot 2\cdot k\cdot k\ldots k}{k\cdot k\cdot k\cdot k\ldots k} = \frac{1\cdot 2}{k\cdot k} = \frac{2}{k^2}$$

Использовав решение задачи 7.8, получим, что ряд сходится.

2) Воспользуемся равенством $\ln k = k^{\log_k(\ln k)} = k^{\frac{\ln\ln k}{\ln k}}$. Тогда общий член ряда примет вид $\frac{1}{k^{\ln\ln k}}$. Поскольку при достаточно больших k верно, что $\ln\ln k > 2$, мы получаем оценку

$$\frac{1}{(\ln k)^{\ln k}} = \frac{1}{k^{\ln\ln k}} < \frac{1}{k^2}\,.$$

Решение получено. Значит, по 1-му признаку сравнения ряд сходится.

Задача 7.10 *Исследовать на сходимость ряды*

$$1)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{\lambda^k k!}\,, \quad \lambda > 0\,,$$

$$2)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \left(\frac{2k+1}{3k+2} \right)^k \,.$$

Решение. 1) Применим признак Даламбера, имеем при $k \to \infty$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^{k+1} \cdot \lambda^k \cdot k!}{\lambda^{k+1} \cdot (k+1)! \cdot k^k} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \longrightarrow \frac{e}{\lambda}.$$

получаем, что ряд расходится при $\lambda < e$ и сходится при $\lambda > e$.

2) Воспользуемся признаком Коши, имеем при $k \to \infty$

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{k^3 \left(\frac{2k+1}{3k+2}\right)^k} = \sqrt[k]{k^3}\,\frac{2k+1}{3k+2} =$$

$$= \left(\sqrt[k]{k}\right)^3 \frac{2k+1}{3k+2} \Longrightarrow \frac{2}{3} < 1\,.$$

Значит, по признаку Коши рассматриваемый ряд сходится.

3) В заключение (ради любопытства) попробуем использовать для исследования первого ряда признак Коши. Иначе говоря, попытаемся оценить $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\dfrac{k^k}{\lambda^k k!}}$.
Здесь можно применить метод выделения главной части, использовав формулу Стирлинга $k! \sim \sqrt{2\pi k}\left(\dfrac{k}{e}\right)^k$, которая дает ожидаемое

Решение получено.

$$\sqrt[k]{\frac{k^k}{\lambda^k k!}} = \frac{k}{\lambda \sqrt[k]{k!}} \sim \frac{k}{\lambda}\cdot\frac{e}{k}\sqrt{\frac{1}{\sqrt[k]{2\pi k}}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{e}{\lambda}\,.$$

В завершение темы приведем еще один пример использования метода выделения главной части.

Задача 7.11 *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\sqrt{\frac{k^2-1}{k^2+1}}\right)^{\lambda}.$$

Решение. 1) Дважды применим формулы Тейлора для биномиальной функции, чтобы выделить главную часть выражения в круглых скобках:

$$1-\sqrt{\frac{k^2-1}{k^2+1}}=1-\sqrt{\frac{1-\dfrac{1}{k^2}}{1+\dfrac{1}{k^2}}}=1-\sqrt{\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^{-1}}=$$

$$=1-\sqrt{1-\frac{2}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)}=1-\left(1-\frac{1}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\sim\frac{1}{k^2}.$$

2) По 2-му признаку сравнения исследуемый ряд будет сходиться и расходиться одновременно с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\lambda}}\,.$$

Решение получено.

Применяя еще раз решение задачи 7.8, получаем, что исследуемый ряд сходится при $\quad 2\lambda > 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda > \dfrac{1}{2}\,.$

Знакопеременные числовые ряды

Рассмотрим некоторые виды числовых рядов, когда знак члена числового ряда может меняться при изменении его номера,

Абсолютно сходящиеся ряды

Вначале дадим

Определение 7.4	Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lvert a_k \rvert$.

Важность класса абсолютно сходящихся рядов, в первую очередь, следует из утверждения

Теорема 7.11 **Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(a_k + b_k\right)$ сходится (или расходится) одновременно с рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.**

Укажем основные свойства абсолютно сходящихся рядов.

Теорема 7.12 **Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\,a_k|$ сходится и его сумма равна S. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ также сходится. Если он имеет сумму σ, то справедлив оценка $|\sigma| \le S$.**

Теорема 7.13 **Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно и его сумма равна S. Тогда ряд, получаемый из $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ произвольной перестановкой его слагаемых, также сходится абсолютно и его сумма равна S.**

Заметим, что перестановка слагаемых в числовом ряде дает *новый* ряд поскольку возникает иная числовая последовательность, ряд порождающая. Однако, в условиях теоремы 7.13 при этом *сумма ряда* не меняется.

Теорема 7.14 **Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся абсолютно, то при любых λ и μ ряд вида**

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\lambda a_k + \mu b_k\Big)$$

также сходится абсолютно .

Знакочередующиеся ряды

Определение 7.5	*Знакочередующимся* называется числовой ряд вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$, в котором $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Опишем некоторые свойства знакочередующихся рядов.

Теорема 7.15 (признак Лейбница) **Если** $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ **и** $\forall k \in \mathbb{N}\ :\quad a_k \geq a_{k+1} \geq 0$, **то ряд** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ **сходится.**

Теорема 7.16 **Если выполнены все условия теоремы 7.17 и** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k = S$, **а** $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k = S_n$, **то справедлива оценка** $\Big| S - S_n \Big| \leq a_{n+1}$.

Задача 7.12 *Исследовать на сходимость ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\lambda}}$.

Решение. В данном примере $a_k = \frac{1}{k^{\lambda}}$. Эта числовая последовательность с положительными членами и она будет бесконечно малой, причем монотонно убывающей, при $\lambda > 0$.

Решение получено. Тогда по признаку Лейбница рассматриваемый ряд будет сходиться при $\lambda > 0$.

Условие монотонности $a_k \geq a_{k+1}$ в признаке Лейбница существенно, что иллюстрирует

Задача 7.13 *Исследовать на сходимость ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k} - (-1)^k}$.

Решение. Применим метод выделения главной части

$$\frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k} - (-1)^k} = \frac{\dfrac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k}}}{1 - \dfrac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k}}} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k}} \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k}} + \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}} \right) \right) =$$

$$= \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k}} + \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}} + \frac{(-1)^k}{k\sqrt[3]{k}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}} \right) \ .$$

Тогда исследуемый ряд примет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k}} + \sum_{k}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}} + \sum_{k}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{k\sqrt[3]{k}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}\right)\right] .$$

Ряд с общим членом, стоящим в квадратных скобках, сходится абсолютно. Поэтому (в силу теоремы 7.11) условия сходимости исследуемого ряда будут такими же, что и для суммы рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}} ,$$

первый из которых сходится по признаку Лейбница, а второй расходится (см решение задачи 7.8).

Решение получено.

Значит, расходится и исследуемый ряд.

Для исследования сходимости рядов более сложной структуры можно попытаться воспользоваться достаточными признаками Дирихле и Абеля.

Теорема 7.17 (признак Дирихле)	**Если частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ограничены, а последовательность $\{b_k\}$ монотонная и бесконечно малая, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.**

Теорема 7.18 (признак Абеля)	**Если последовательность $\{b_k\}$ монотонна и ограничена, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.**

Для более точного описания условий сходимости числовых рядов также может оказаться полезным

Определение 7.6	Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, но при этом расходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lvert a_k \rvert$.

Задача 7.14 *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\dfrac{\pi k}{4}}{(k+2)\sqrt{\ln^3(k+3)}}\,.$$

Решение. Используем оценку

$$\left|\frac{\cos\dfrac{\pi k}{4}}{(k+2)\sqrt{\ln^3(k+3)}}\right| \leq \frac{1}{k\ln^{3/2}k}\,.$$

Следовательно, исследуемый ряд сходится абсолютно по признакум сравнения и интегрального признака, поскольку сходится несобственный интеграл от знакопостоянной функции $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{dx}{x\,\ln^{3/2}x}$.

Решение получено.

Задача 7.15 *Исследовать при* $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ *на сходимость ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^{\lambda}}\,.$$

Решение. 1) При $\lambda \le 0$ ряд расходится, поскольку

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sin k}{k^{\lambda}} \ne 0\,,$$

то есть, не выполнено необходимое условие сходимости числового ряда.

2) При $\lambda > 1$ ряд сходится по признаку сравнения, поскольку справедлива оценка

$$\left| \frac{\sin k}{k^{\lambda}} \right| \le \frac{1}{k^{\lambda}}\,,$$

3) При $0 < \lambda \leq 1$ ряд сходится неабсолютно по признаку Дирихле.

Действительно, пусть $a_k = \sin k$ и $b_k = \dfrac{1}{k^\lambda}$. В этом случае последовательность $\{b_k\}$ бесконечно малая и монотонная, а последовательность частичных сумм вида (согласно известным из тригонометрии формулам)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \sin k = \frac{\sin\dfrac{n}{2}\,\sin\dfrac{n+1}{2}}{\sin\dfrac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sin\dfrac{1}{2}}$$

ограничена.

4) При $0 < \lambda \leq 1$ ряд абсолютно не сходится по призкаку сравнения в силу оценок

$$\left|\frac{\sin k}{k^\lambda}\right| \geq \frac{\sin^2 k}{k^\lambda} = \frac{1}{2k^\lambda} + \frac{\cos 2k}{2k^\lambda},$$

поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos 2k}{2k^\lambda}$ сходится условно (см. выше, п. 3)), а ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k^\lambda}$ расходится.

Решение получено.

В заключение рассмотрим примеры использования метода выделения главной части, признака Лейбница и признака Абеля.

Задача 7.16 *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right).$$

Решение. Применив формулу Тейлора, получим

$$(-1)^k\left(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right)=(-1)^k\frac{\pi^2}{k}-\left[\frac{1}{2}\frac{\pi^4}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^3}\right)\right].$$

Ряд с общим членом, стоящим в квадратных скобках, сходится абсолютно, в то время как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\pi^2}{k}$ сходится условно по признаку Лейбница. Значит, исходный ряд также сходится, но неабсолютно.

Решение получено.

Задача 7.17 *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k \cdot \operatorname{arctg} k}{\ln(k+1)} .$$

Решение. Обозначим $a_k = \dfrac{\cos k}{\ln(k+1)}$ и $b_k = \operatorname{arctg} k$. При этом ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по признаку Дирихле, а последовательность $\{b_k\}$ — монотонна и ограничена.

Решение получено. Тогда исследуемый ряд сходится по признаку Абеля.

Задача 7.18 *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k^2+\frac{k}{2}}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^{k^2}.$$

Решение. Попробуем применить признак Коши для знакопостоянного ряда. То есть, нам надо оценить $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}$. Имеем

$$\sqrt[k]{a_k}=\left[\sqrt{k^2+\frac{k}{2}}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]^k=$$

$$=\left[k\sqrt{1+\frac{1}{2k}}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]^k=$$

$$=\left[k\left(1+\frac{1}{4k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\right]^k=$$

$$=\left[1-\frac{1}{4k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right]^k\to\quad e^{-\frac{1}{4}}<1\quad\text{при}\quad k\to\infty\,.$$

Значит, исследуемый ряд сходится по признаку Коши.

Решение получено. Обратите внимание на, потребовавшееся при выделении главной части, число членов в разложении логарифма.