Функциональные последовательности

Решая прикладные задачи, нередко приходится сталкиваться с необходимостью аппроксимации одних функций (например, сложных или неудобных в представлении) другими, более простыми или удобными, допуская при этом, что данная аппроксимация выполняется с некоторой погрешностью.

Примером подобной аппроксимации является, например, формула Тейлора. Однако возможны и другие подходы к реализации этой идеи. Рассмотрим, один из них.

Дадим

Определение 8.1	Набор функций $f_k(x)$ $\forall k \in \mathbb{N}$, определенных $\forall x \in X \subseteq \mathbb{R}$, будем называть *функциональной последовательностью* и обозначать как $\{f_k(x)\}$.

Поточечная сходимость функциональной последовательности

Определение 8.2	Функцию $F(x)$ назовем *предельной функцией* для функциональной последовательности $\{f_k(x)\}$, если для каждой числовой последовательности вида $\{f_k(x_0)\}\ \forall x_0 \in X$ имеет место $$\lim_{k\to\infty} f_k(x_0) = F(x_0)\,.$$

Заметим, что, если предел числовой последовательности существует, то он единственный. Поэтому зависимость $F(x)$ очевидно является *функцией.*

Тогда можно дать

Определение 8.3	Будем говорить, что, если $$\lim_{k\to\infty} f_k(x_0) = F(x_0) \quad \forall x_0 \in X\,, \qquad (8.1)$$ то функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$ *сходится поточечно* к $F(x)$ на множестве X .

Напомним, что в кванторной форме условие (8.1) формулируется так:

$\forall x_0 \in X$ и $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ номер $N_{x_0,\,\varepsilon}$ такой, что $\forall n \geq N_{x_0,\,\varepsilon}$ выполняется условие

$$\Big|\, f_n(x_0) - F(x_0) \,\Big| < \varepsilon\,. \qquad (8.2)$$

Здесь отметим что символ $N_{x_0,\,\varepsilon}$ означает возможность выбора номера N (по значению ε) для каждого x_0 по-своему, независимо от того, как этот выбор делался для других x_0.

Поскольку условие (8.2) выполняется для всех $x_0 \in X$, в случае, когда нас интересуют лишь значения функции $F(x)$, использование $f_k(x)$ как аппроксимации $F(x)$ при достаточно больших значениях k может быть вполне оправданым.

Однако не так просто обстоит дело в ситуации, когда нам важны не только близость значений, но также совпадение каких-то свойств у $F(x)$ и аппроксимирующей функции. Скажем, свойств непрерывности, или дифференцируемости.

Типичную для поточной сходимости ситуацию представляет

Задача 8.1 *Найти предельную функцию для функциональной последовательности* $f_k(x) = x^k$ *на множестве* $x \in [0,1]$.

Решение. Нетрудно видеть, что в данном случае

$$\lim_{k\to\infty} x^k = 0, \quad \text{если} \quad x \in [0,1)\,,$$

и

$$\lim_{k\to\infty} x^k = 1, \quad \text{если} \quad x = 1\,.$$

То есть,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \in [0,1), \\ 1, & \text{при} \quad x = 1. \end{cases}$$

Сравнение свойств функций $F(x)$ и x^k на отрезке $[0,1]$ показывает, что первая из них не является непрерывной, в то время как, вторая не только непрерывна, но и имеет производную любого порядка на этом отрезке. Рис. 1 иллюстрирует этот факт.

С другой стороны, нетрудно показать, что для данной функциональной последовательности на множестве $[0,\frac{1}{2}]$ предельная функция будет бесконечно дифференцируемой.

Вывод: при поточечной сходимости свойства членов функциональной последовательности необязательно совпадают со свойствами предельной функции.

Решение получено.

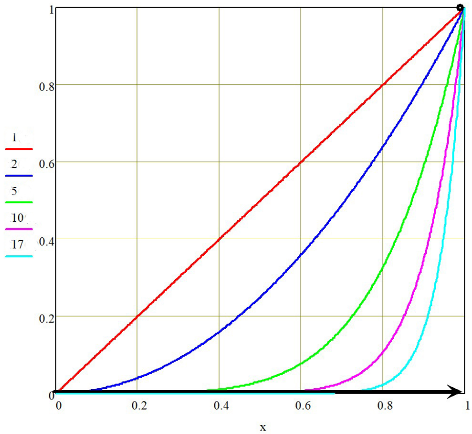

Рис. 1. Графики функций $f_k(x) = x^k$ для $k = 1, 2, 5, 10, 17.$ для задачи 8.1.

Равномерная сходимость функциональной последовательности

Проблема формулировки условий, гарантирующих совпадение свойств членов функциональной последовательности и ее предельной функции, решается введением специального вида сходимости, называемого *равномерной сходимостью* на множестве X.

Изменим немного вариант кванторной формулировки определения 8.3 поточечной сходимости на множестве X функциональной последовательности $\{f_k(x)\}$, а именно, дадим

Определение 8.4	Будем говорить, что функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$ *сходится равномерно на множестве* X, если $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists$ номер N_ε такой, что $\forall x \in X$ и $\forall n \geq N_\varepsilon$ выполняется условие $$\Big| f_n(x) - F(x) \Big| < \varepsilon\,.$$

Основное отличие определения 8.4 от записи (8.2) заключается в том, что в случае равномерной сходимости функционального ряда номер N_ε находится (выбирается) по одному и тому же правилу *для всех* точек множества X.

Кроме того, из равномерной сходимости следует поточечная, но не наоборот!

Договоримся также о следующих обозначениях.

Поточечную сходимость функциональной последовательности $\{f_k(x)\}$ на множестве X к предельной функции $F(x)$ будем обозначать так $f_k(x) \underset{X}{\to} F(x)$. А для равномерной сходимости $\{f_k(x)\}$ на множестве X будем использовать обозначение $f_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} F(x)$.

Соответственно случаи отсутствия поточечной или равномерной сходимости обозначим символами $f_k(x) \underset{X}{\not\to} F(x)$. и $f_k(x) \underset{X}{\not\rightrightarrows} F(x)$.

Примером использования этих обозначений может служить

Определение 8.5	Будем говорить, что функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$ *сходится неравномерно на множестве* X, если $f_k(x) \underset{X}{\to} F(x)$, но $f_k(x) \underset{X}{\not\rightrightarrows} F(x)$.

Возникает естественный вопрос: в чем заключается полезность свойства равномерной сходимости?

Ответ на этот вопрос дают следующие теоретические факты.

Теорема 8.1 **Если функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$ непрерывных на $[a,b]$ функций сходится равномерно на $[a,b]$ к предельной функции $F(x)$, то $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$.**

Теорема 8.2 **Если функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$ непрерывных на $[a,b]$ функций сходится равномерно на $[a,b]$ к предельной функции $F(x)$, то функциональная последовательность $\left\{\int\limits_{x_0}^{x} f_k(u)\,du\right\}$ сходится равномерно к функции $\int\limits_{x_0}^{x} F(u)\,du$, где $x_0 \in [a,b]$.**

Теорема 8.3 **Если функциональная последовательность дифференцируемых на $[a,b]$ функций $\{f_k(x)\}$**

— сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a,b]$,

— а последовательность $\{f'_k(x)\}$ сходится равномерно на $[a,b]$,

то последовательность $\{f_k(x)\}$ будет сходится равномерно на $[a,b]$ к непрерывно дифференцируемой на $[a,b]$ функции $F(x)$ такой, что

$$F'(x) = \lim_{k\to\infty} f'_k(x) \quad \forall x \in [a,b]\,.$$

Для полноты описания также покажем, что функциональная последовательность $f_k(x) = x^k$, рассмотренная в задаче 8.1, не сходится равномерно на множестве $x \in [0,1]$.

С этой целью сформулируем предварительно в кванторной форме *отрицание* определений 8.4 и 8.5.

Определение 8.6	Будем говорить, что функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$ *сходится неравномерно на множестве* X , если $f_k(x) \underset{X}{\to} F(x)$ и $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall N \quad \exists x_0 \in X$ и $\exists n_0 \geq N$, при которых выполняется условие $$\left\vert\, f_{n_0}(x_0) - F(x_0) \,\right\vert \geq \varepsilon_0 \,.$$

Заметим, что для функциональной последовательности $\{x^k\}$, на отрезке $[0,1]$ $\exists\,\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$ такое, что $\forall N \quad \exists\, n_0 = N$ и $\exists\, x_0 = \dfrac{1}{\sqrt[n_0]{2}} < 1$, для которых выполняется условие

$$\Big|\ f_{n_0}(x_0) - F(x_0)\ \Big| = \Big|\ x_0^{n_0} - 0\ \Big| = \left(\frac{1}{\sqrt[N]{2}}\right)^N = \frac{1}{2} \geq \varepsilon_0\,.$$

А это, согласно определению 8.6, и доказывает отсутствие равномерной сходимости.

Наконец, принимая во внимание решение задачи 8.1, делаем заключение, что рассматриваемая функциональная последовательность сходится неравномерно на отрезке $[0,1]$.

Условия равномерной сходимости функциональной последовательности

Теоремы 8.1 — 8.3 формулируют *достаточные* (но не необходимые!) условия, при которых такие свойства, как непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость у членов функциональных последовательностей гарантируют аналогичные свойства для предельных функций.

Поэтому представляют практический интерес критерии, на основании которых можно делать заключение о наличии или отсутствии у функциональной последовательности свойства равномерной сходимости.

Сформулируем основные их них.

Теорема 8.4 **Для того, чтобы функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$, определенная на множестве X, равномерно сходилась на этом множестве к $F(x)$, необходимо и достаточно, чтобы**

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in X}\Big|\ f_k(x)-F(x)\ \Big| = 0\,.$$

Следствие 8.1 **Если существует** *бесконечно малая* **числовая последовательность $\{A_k\}$ и номер N такие, что**

$$\forall k \geq N \qquad \Big|\ f_k(x)-F(x)\ \Big| \leq A_k\,,$$

то $\quad f_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} F(x)\,.$

Теорема 8.5 (критерий Коши) **Для того, чтобы функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$, определенная на множестве X , равномерно сходилась на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы**

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ **номер** N_ε **такой, что**
$\forall k \geq N_\varepsilon \,, \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X$

выполнялось условие $\Big| \, f_{k+p}(x) - f_k(x) \, \Big| < \varepsilon \,.$

Теорема 8.6 (отрицание критерия Коши) **Для того, чтобы функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$, определенная на множестве X , не сходилась равномерно на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы**

$\forall$ **номера** $N \in \mathbb{N}$,
нашлись $\varepsilon_0 > 0, \; k_0 \geq N, \; x_0 \in X$ **и** $p_0 \in \mathbb{N}$

такие, чтобы выполнялось условие

$$\Big| \, f_{k_0+p_0}(x_0) - f_{k_0}(x_0) \, \Big| \geq \varepsilon_0 \,.$$

Критерием Коши (равно как и его отрицанием) удобно пользоваться в тех случаях, когда предельная функция $F(x)$ не известна, или не представима в удобной для использования форме.

В качестве примера рассмотрим снова задачу 8.1 и докажем с помощью теоремы 8.6 отсутствие равномерной сходимости для функциональной последовательности $\{x^k\}$, на отрезке $[0,1]$.

Заметим, что $\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists\, n_0 = N \geq N$, $p_0 = N$ и $\exists\, x_0 = \dfrac{1}{\sqrt[n_0]{2}} < 1$, для которых справедливы соотношения

$$\left|\, f_{n_0+p_0}(x_0) - f_{n_0}(x_0) \,\right| = \left|\, x_0^{n_0+p_0} - x_0^{n_0} \,\right| =$$

$$= \left| \left(\frac{1}{\sqrt[N]{2}} \right)^{2N} - \left(\frac{1}{\sqrt[N]{2}} \right)^{N} \right| = \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4} = \varepsilon_0 > 0\,.$$

которые, в силу теоремы 8.6, доказывают отсутствие равномерной сходимости.

Примеры исследования функциональной последовательности на сходимость

Задача 8.2 *Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность*

$$f_k(x) = \frac{k\sin^2 kx}{x^2+k^2} \qquad x \in [\,0, +\infty)\ .$$

Решение. 1) Найдем вначале $F(x)$ — предельную функцию, то есть, при фиксированном неотрицательном x вычислим

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k\sin^2 kx}{x^2+k^2}\,.$$

Имеем оценки

$$\left|\,\frac{k\sin^2 kx}{x^2+k^2}\,\right| \le \frac{k}{x^2+k^2} = \frac{1}{k+\dfrac{x^2}{k}} \quad \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0\,.$$

Откуда $F(x) \equiv 0\,.$

2) Теперь *сразу на всем* множестве $[\,0,+\infty)$ оценим

$$\left|\, f_k(x) - F(x) \,\right| = \left|\, \frac{k\sin^2 kx}{x^2+k^2} - 0 \,\right| \leq \frac{k}{x^2+k^2} \leq \frac{1}{k}\,.$$

Следовательно, в силу теоремы 8.4, исследуемая последовательность сходится на множестве $[\,0,+\infty)$ равномерно, поскольку

Решение получено.

$$0 \;\leq\; \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in X} \left|\, f_k(x) - F(x) \,\right| \;\leq\; \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \;=\; 0\,.$$

Задача 8.3 *Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность*

$$f_k(x) = \frac{kx^2}{1+k^2x^4}\,.$$

на: *1)* $E_1 :\ x \in [0,1]$ *и* *2)* $E_2 :\ x \in [1,+\infty)$.

Решение. 1) Легко видеть, что $F(x) \equiv 0$ — предельная функция на обоих множествах.
При этом

$$f_k'(x) = \frac{2kx(1-k^2x^4)}{(1+k^2x^4)^2} = 0$$

в точке $x_{0k} = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \in E_1$, в которой $f_k(x_{0k}) = \dfrac{1}{2}$.
Откуда следует, что все $f_k(x)$ монотонно убывают на E_2 и на всем этом множестве справедливы оценки

$$\left|\, f_k(x) - F(x)\, \right| = \left| \frac{kx^2}{1+k^2x^4} - 0 \right| \le \frac{k}{1+k^2} < \frac{1}{k} \quad \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0\,.$$

Откуда следует равномерная сходимость исследуемой функциональной последовательности на E_2.

2) Поскольку $\forall k$ на E_1 есть точка $x_{0k} = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \in E_1$, в которой $f_k(x_{0k}) = \dfrac{1}{2}$, то

$$\frac{1}{2} \leq \sup_{x \in E_1} \Big| \, f_k(x) - F(x) \, \Big| \quad \underset{k \to \infty}{\not\to} \quad 0 \, .$$

Решение получено.

То есть, исследуемая функциональная последовательность не сходится равномерно на E_1, а сходится на этом множестве неравномерно (см. рис.2).

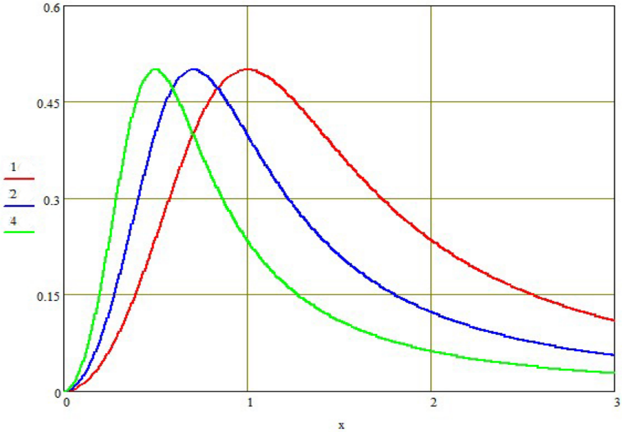

Рис. 2. Графики функций $f_k(x)$ для $k = 1, 2, 4$ в задаче 8.3.

Задача 8.4 *Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность*

$$f_k(x) = \frac{kx^2}{k^3 + x^3}\,.$$

на: 1) $E_1:\ x \in [0,1]$ *и* 2) $E_2:\ x \in [1,+\infty)$.

Решение. 1) Легко видеть, что $F(x) \equiv 0$ — предельная функция на обоих множествах.

При этом производная $f'_k(x) = \dfrac{kx(2k^3 - x^3)}{(k^3+x^3)^2} = 0$ в точке

$x^*_k = k\sqrt[3]{2} \in E_2$, в которой $f_k(x^*_k) = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}\quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Это означает, что все $f_k(x)$ монотонно возрастают на E_1 и на всем этом множестве справедливы оценки

$$\big|\, f_k(x) - F(x)\,\big| = \left|\, \frac{kx^2}{k^3+x^3} - 0 \,\right| \le \frac{k}{1+k^3} < \frac{1}{k^2} \quad \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0\,.$$

Откуда следует равномерная сходимость исследуемой функциональной последовательности на E_1.

2) Поскольку при любом k на E_2 имеется экстремальная точка $x_k^* = k\sqrt[3]{2}$, в которой $f_k(x_k^*) = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{3} \leq \sup_{x \in E_1} \Big| \, f_k(x) - F(x) \, \Big| \quad \underset{k \to \infty}{\not\to} \quad 0\,.$$

Значит, исследуемая функциональная последовательность не сходится равномерно на E_2, а сходится на этом множестве неравномерно (см. рис.3).

Решение получено.

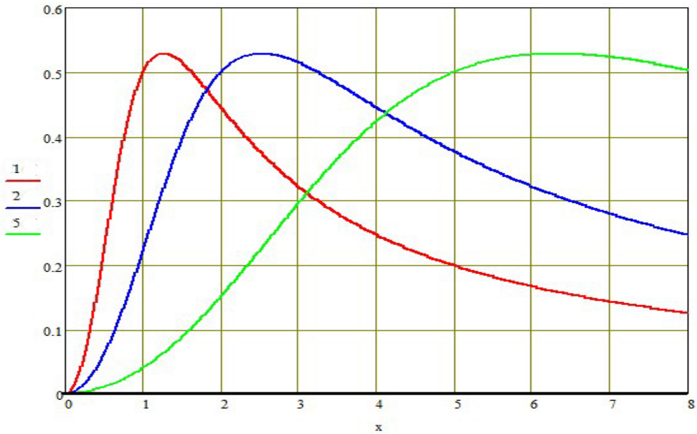

Рис. 3. Графики функций $f_k(x)$ для $k = 1, 2, 5$ в задаче 8.4.

Для решения следующей задачи нам потребуется дополнительный теоретический факт, связанный с использованием формулы Тейлора.

Известно, что, если функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные до порядка $n-1$ включительно, а в точке имеет призводную порядка n, то справедлива формула Тейлора с остаточным членом *в форме Пеано*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\big((x-x_0)^n\big)\,.$$

Если же дополнительно потребовать, чтобы функция $f(x)$ имела в некоторой окрестности точки x_0 производные до порядка $n+1$ включительно, то для любого x из этой окрестности найдется точка $\xi \in (x-x_0, x_0)\bigcup(x_0, x+x_0)$ такая, что оказывается справедливой формула Тейлора с остаточным членом *в форме Лагранжа*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,. \qquad (8.3)$$

Эта формула позволяет получать полезные оценки для значений функций.

Например, для функции $f(x) = \sin x$ при $n = 1$ в силу (8.3) мы имеем, что

$$\exists \xi \in \mathbb{R}\,, \quad \text{для которой} \quad \sin x = x + \frac{x^2}{2!}\left(\sin^{(2)} x \Big|_{x=\xi} \right).$$

Откуда следует, что

$$\left| \sin x - x \right| \leq \frac{x^2}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Задача 8.5 *Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность*

$$f_k(x) = k \operatorname{arctg} \frac{1}{kx} \, .$$

на: *1)* $E_1 : \ x \in (0,1)$ *и* *2)* $E_2 : \ x \in (1,+\infty)$.

Решение. 1) Для исследуемой функциональной последовательности предельная функция при фиксированном x на обоих множествах есть $F(x) = \dfrac{1}{x}$, поскольку

$$\lim_{k\to\infty} k \operatorname{arctg} \frac{1}{kx} = \frac{1}{x} \left(\lim_{k\to\infty} kx \operatorname{arctg} \frac{1}{kx} \right) = \frac{1}{x} \, .$$

2) На множестве E_1 для каждого номера k найдется точка $x_{0k} = \dfrac{1}{k}$, для которой, в силу $k \geq 1$, справедлива оценка

$$\left| \, k \operatorname{arctg} \frac{1}{kx_{0k}} - \frac{1}{x_{0k}} \, \right| = \left| \, k \operatorname{arctg} 1 - k \, \right| \geq \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) > 0 \, .$$

А это означает, что

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in X} \left| \, f_k(x) - F(x) \, \right| \neq 0$$

и исследуемая последовательность сходится на E_1 неравномерно.

3) Рассмотрим теперь исследуемую последовательность на интервале E_2 .
Функция $\operatorname{arctg} x$ имеет производную любого порядка на всей вещественной оси. Поэтому для нее будет справедлив следующий вариант формулы Тейлорпа с остаточным членом в форме Лагранжа (8.3)

$$\operatorname{arctg} x = x + \frac{(\operatorname{arctg} x)''_{x=\xi}}{2!} x^2 .$$

Проверьте самостоятельно, что значение $\operatorname{arctg}^{(2)} x$ на множестве E_2 не превосходит $1/2$. Поэтому для этого множества справедлива оценка $\left|\operatorname{arctg} x - x\right| \leq \dfrac{x^2}{4}$, в силу которой

$$\Big| \; f_k(x) - F(x) \; \Big| = \left| k \operatorname{arctg} \frac{1}{kx} - \frac{1}{x} \right| = k \left| \operatorname{arctg} \frac{1}{kx} - \frac{1}{kx} \right| \leq$$

Решение получено.

$$\leq \quad k \, \frac{1}{4k^2 x^2} \quad \leq \quad \frac{1}{4k} \quad \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \quad 0 \, .$$

В заключение обсуждения свойств функциональных последовательностей обратим внимание на следующие важные детали.

Во-первых, от сутствие равномерной сходимости может не являться причиной наличия 'хороших' свойств у предельной функции. Рассмотрим

Пример 8.1. Пусть (см. рис. 4)

$$f_k(x) = \begin{cases} k^2 x & \text{при} \quad x \in [0, \dfrac{1}{k}\,], \\ k^2 \left(\dfrac{2}{k} - x \right) & \text{при} \quad x \in (\dfrac{1}{k}, \dfrac{2}{k}\,], \\ 0 & \text{при} \quad x \in (\dfrac{2}{k}, 1]. \end{cases}$$

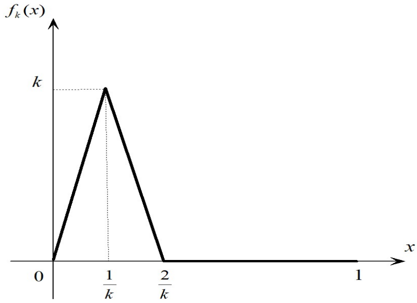

Рис. 4. График функции $f_k(x)$ для примера 8.1.

В данном примере предельная функция $F(x) \equiv 0$, ибо $\forall x^* \in (0,1]$ $\exists k$ такое, что $\dfrac{2}{k} < x^*$. А $f_k(0) = 0$ при каждом k.

Все функции $f_k(x)$ $x[\in [0,1]$ непрерывны, но недифференцируемы. И, кроме того, функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$ неограниченна, из чего следует, что сходимость неравномерная.

При этом предельная функция имеет производные любого порядка.

Во-вторых, условие равномерной сходимости функциональной последовательности, образованной непрерывно дифференцируемыми функциями, к непрерывно диффреренцируемой предельной функции не гарантирует возможности изменения порядка операций дифференцирования и предельного перехода.

Этот факт иллюстрирует

Пример 8.2. Рассмотрим для $x \in [0,1]$ функциональную последовательность с общим членом $f_k(x) = \dfrac{x^k}{k}$.
В силу оценки $\left|\dfrac{x^k}{k} - 0\right| \le \dfrac{1}{k}$ данная последовательность сходится равномерно к функции. $F(x) \equiv 0$, для которой $F'(x) \equiv 0$.
С другой стороны,

$$f'_k(x) = x^{k-1} \quad \Longrightarrow \quad f'_k(1) \to 1 \neq F(1) = 0 .$$

Напомним, что для функционалшьной последовательности условие перестановочности операций предельного перехода и дифференцирования дает теорема 8.3.

Наконец, отметим, что метод замены исследуемой функциональной последовательности на эквивалентную при предельном переходе вида $k \to \infty$ следует применять крайне осмотрительно, поскольку отбрасываемые o-малые члены могут оказаться сходящимися неравномерно. Рассмотрим

Пример 8.3. Функциональная последовательность $f_k(x) = \dfrac{1}{k} + \dfrac{x}{k^2}$ сходится на $[0, \infty)$ к $F(x) \equiv 0$ неравномерно, поскольку из существования $x_0 = k^2$ следует (проверьте это самостоятельно)

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in X} \left| f_k(x) - F(x) \right| \neq 0\,.$$

При этом, хотя $\dfrac{x}{k^2} = o\left(\dfrac{1}{k}\right)$, отбрасывание данного слагаемого приведет к ошибке при определении вида сходимости, в силу того, что функциональная последовательность $\phi_k(x) = \dfrac{1}{k}$ оказывается равномерно сходящейся.