# Функциональные ряды

Развивая идею аппроксимации одних функций другими, более простыми или удобными, вполне естественно попытаться применить в качестве аппроксимирующего объекта *ряд* (то есть, сумму с неограниченным числом слагаемых), каждый член которого есть некоторая известная функция.

Забегая несколько вперед, можно отметить, что для значительного числа практически важных задач ряд (который логично назвать *функциональным*) оказывается не просто аппроксимацией, а единственной возможной формой представления решений.

Вначале дадим

| | |
|---|---|
| Определение 9.1 | Пусть каждый член некоторого ряда является функций вида $u_k(x)$ от вещественного аргумента $x \in X$. Тогда будем говорить, что задан *функциональный ряд* $$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \qquad (9.1)$$ с областью определения $X \subseteq \mathbb{R}$. |

## Виды сходимости функционального ряда

Понятия суммы ряда, частичной суммы, равно как и понятия поточечной и абсолютной сходимости функционального ряда, введем так же, как эти понятия были определены для числовых рядов.

Например, функцию $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ будем называть $n$-ой *частичной суммой ряда* (9.1),

| | |
|---|---|
| Определение 9.2 | Функция $F(x)$ называется *предельной функцией* функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, если $\forall x_0 \in X$ имеет место $$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = F(x_0)\,.$$ |

Для большей наглядности и простоты формулировок в некоторых случаях мы будем также использовать сумму специального ряда $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$, называемую $n$-м *остатком ряда* (9.1).

| Определение 9.3 | Будем также говорить, что, если $$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = F(x_0) \quad \forall x_0 \in X\,, \qquad (9.2)$$ то функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится поточечно* к $F(x)$ на множестве $X$ . |
|---|---|

Факт поточечной сходимости функционального ряда на множестве $X$ можно обозначить так: $S_n(x) \underset{X}{\to} F(x)$ при $n \to \infty$ . Отсутствие же на этом множестве поточенной сходимости обозначается, соответственно, как $S_n(x) \underset{X}{\not\to} F(x)$ при $n \to \infty$ .

В кванторной форме условие (9.2) формулируется так:

> $\forall x_0 \in X$ и $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ номер $N_{x_0,\,\varepsilon}$ такой, что $\forall n \geq N_{x_0,\,\varepsilon}$ выполняется условие

$$\Big|\, S_n(x_0) - F(x_0) \,\Big| < \varepsilon\,. \qquad (9.3)$$

Отметим также, что функциональный ряд называется *абсолютно сходящимся*, если поточечно сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} \big|\, u_k(x) \,\big|$ .

Как и для функциональных последовательностей, поточечная сходимость функционального ряда не гарантирует совпадения свойств функций $u_k(x)$ и $F(x)$, что иллюстрирует

Задача 9.1 *Найти предельную функцию для функционального ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{\big(1+(k-1)x^2\big)\big(1+kx^2\big)} \quad \textit{на множестве } x \in \mathbb{R}\ .$$

Решение. Заметим, что общий член данного функционального ряда раскладывается на простейшие дроби

$$u_k(x) = \frac{1}{1+(k-1)x^2} - \frac{1}{1+kx^2}\,.$$

Откуда следует, что

$$S_n(x) = \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) + \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+2x^2}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{1+(k-1)x^2} - \frac{1}{1+kx^2}\right)\,,$$

и, в итоге, получим

$$S_n(x) = 1 - \frac{1}{1+nx^2} = \frac{nx^2}{1+nx^2}\,.$$

Нетрудно видеть, что в данном случае

Решение получено.

$$F(x) = \lim_{k\to\infty} S_n(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{nx^2}{1+nx^2} = \operatorname{sgn}^2 x = \left|\operatorname{sgn} x\right|.$$

Сравнение свойств функций $u_k(x)$ и $F(x)$ (см. рис. 1) в задаче 9.1 приводит нас к заключению, аналогичному полученному для функциональных последовательностей. А именно:

> при поточечной сходимости свойства членов функционального ряда могут не совпадать со свойствами предельной функции.

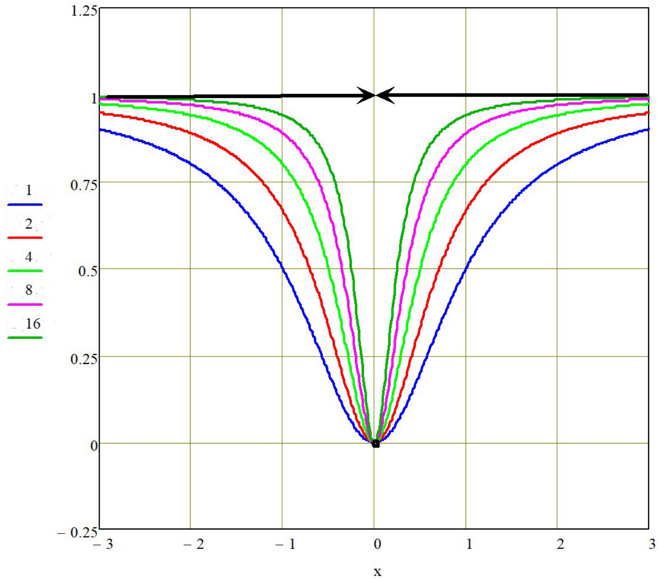


Рис. 1. Графики функций $S_n(x)$ для $n = 1, 2, 4, 8, 16$ в задаче 9.1.

## Равномерная сходимость функционального ряда

В сделанных определениях сходимость функционального ряда отождествляется со сходимостью функциональной последовательности, образованной частичными суммами ряда.

Поэтому естественно ожидать, что условия, обеспечивающие совпадение свойств членов функционального ряда и его предельной функции, могут быть сформулированы с помощью понятия равномерной сходимости.

Внеся соответствующие изменения в формулировку 9.3 — поточечной сходимости на множестве $X$ функциональной последовательности $\{S_n(x)\}$ — получим

| | |
|---|---|
| Определение 9.4 | Скажем, что функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится равномерно на множестве* $X$ к функции $F(x)$, если<br>$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ номер $N_\varepsilon$ такой, что $\forall x \in X$ и $\forall n \geq N_\varepsilon$ выполняется условие<br>$$\Big\| S_n(x) - F(x) \Big\| < \varepsilon \,.$$ |

Что, как и для функциональных последовательностей, будем обозначать символом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} F(x)$ при $n \to \infty$.

Еще раз подчеркнем, что отличие определений 9.4 и 9.3 заключается в том, что в случае равномерной сходимости функционального ряда номер $N_\varepsilon$ находится (выбирается) по одному и тому же правилу *для всех* точек множества аргументов $X$ , в то время, как для поточечной сходимости выбор $N_{x_0,\varepsilon}$ может делаться для каждого $x$ индивидуально.

Как и в случае функциональной последовательности из равномерной сходимости функционального ряда следует поточечная, но не наоборот.

Соответственно случаи отсутствия поточечной или равномерной сходимости функционального ряда будем обозначать символами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \underset{X}{\not\to} F(x)$ . и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)) \underset{X}{\not\rightrightarrows} F(x)$ .

Тогда понятие неравномерной сходимости функционального ряда можно описать, дав

| | |
|---|---|
| Определение 9.5 | Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится неравномерно на множестве* $X$ , если при $n \to \infty$ $$S_n(x) \underset{X}{\to} F(x)\,, \quad \text{но} \quad S_n(x) \underset{X}{\not\rightrightarrows} F(x)\,.$$ |

Сформулируем теперь условия совпадения свойств членов функционального ряда и его предельной функции в виде следующих утверждений.

Теорема 9.1 **Если у функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ все члены — непрерывные на $[\,a,b\,]$ функции, а сам ряд сходится равномерно на $[\,a,b\,]$ к предельной функции $F(x)$, то $F(x)$ непрерывна на $[\,a,b\,]$.**

Теорема 9.2 **Если у функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ все члены — непрерывные на $[\,a,b\,]$ функции, а сам ряд сходится равномерно на $[\,a,b\,]$ к предельной функции $F(x)$, то функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(u)\,du$ сходится равномерно к функции $\int\limits_{x_0}^{x} F(u)\,du$. где $x_0 \in [\,a,b\,]$.**

Теорема 9.3 **Если у функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ все члены — непрерывно дифференцируемые на $[\,a,b\,]$ функции, сам ряд сходится в какой-нибудь точке на $[\,a,b\,]$, а ряд из $u'_k(x)$ сходится равномерно на $[\,a,b\,]$ то**

$$F'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)\,,$$

**где $F(x)$ — непрерывно дифференцируемая предельная сумма исходного функционального ряда. При этом ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ также сходится равномерно.**

## Условия равномерной сходимости функционального ряда

Теоремы 9.1 — 9.3 , основанные на использовании понятия равномерной сходимости функционального ряда, дают *достаточные* условия, при выполнении которых свойства членов функциональных рядов (такие как: непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость) гарантируют наличие этих же свойств и у предельных функций.

Поэтому представляют практический интерес критерии, (альтернативные определению 9.4), на основании которых можно делать заключение о наличии (или отсутствии) у функционального ряда свойства равномерной сходимости.

Сформулируем некоторые из таких критериев, заметив предварительно, что для $n$-го остатка функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ справедливо равенство

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = F(x) - S_n(x)\,.$$

Теорема 9.4

**Для того, чтобы функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ определенный на множестве $X$ равномерно сходился на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы**

$$\sup_{x\in X} \left|\, r_n(x) \,\right| \to 0 \qquad \textbf{при } n \to \infty\,.$$

Следствие 9.1 **Для равномерной сходимости функционального ряда** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ **определенного на множестве** $X$, **необходимо, чтобы** $u_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$.

Теорема 9.5 (признак Вейерштрасса) **Если для функционального ряда** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ **определенного на множестве** $X$, **существует** *сходящийся числовой* **ряд** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **такой, что** $\forall k \geq k_0$ **и** $\forall x \in X$ **справедливы неравенства**

$$\left| u_k(x) \right| \leq a_k ,$$

**то исходный функциональный ряд равномерно сходится на множестве** $X$.

Теорема 9.6 (критерий Коши) **Для** *равномерной сходимости* **функционального ряда** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ **определенного на множестве** $X$, **необходимо и достаточно,**

**чтобы**

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ **номер** $N_\varepsilon$ **такой, что**
$\forall k \geq N_\varepsilon\,, \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X$

**выполнялось условие**

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon\,.$$

Теорема 9.7 (отрицание критерия Коши) **Для того, чтобы функциональный ряд** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, **определенный на множестве** $X$, *не сходился равномерно*, **необходимо и достаточно,**

**чтобы для любого** $N \in \mathbb{N}$ **нашлись**

$\varepsilon_0 > 0\,, \quad k_0 \geq N\,, \quad p_0 \in \mathbb{N}$ **и** $x_0 \in X$

**такие, что выполнено неравенство**

$$\left| \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0} u_k(x_0) \right| \geq \varepsilon_0\,.$$

Критерий Коши (равно как и его отрицание) целесообразно применять в тех случаях, когда предельная функция $F(x)$ не известна, или не представима в удобной для использования форме.

Теорема 9.8 (признак Дирихле)

**Функциональный ряд** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ , **определенный на множестве** $X$ , *равномерно сходится* **на этом множестве, если**

1) **последовательность частичных сумм ряда** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ **ограничена на** $X$ ,
2) **функциональная последовательность** $\{\, b_k(x) \,\}$ **монотонна** $\forall x \in X$ **и** $b_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ .

Теорема 9.9 (признак Абеля)

**Функциональный ряд** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ , **определенный на множестве** $X$ , *равномерно сходится* **на этом множестве, если**

1) **функциональный ряд** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ **равномерно сходится на** $X$ ,
2) **функциональная последовательность** $\{\, b_k(x) \,\}$ **монотонна** $\forall x \in X$ **и ограничена на множестве** $X$ .

## Примеры исследования функционального ряда на сходимость

Задача 9.2 *Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(kx)}{x^4 + k\sqrt[3]{k}} \qquad x \in (-\infty, +\infty)\ .$$

Решение. 1) При любом фиксированном $x$ данный ряд по признакам сравнения сходится поточечно (проверьте это!).

2) В силу неравенств $\left|\operatorname{arctg} x\right| \le \dfrac{\pi}{2}$ и $x^4 + k\sqrt[3]{k} \ge k\sqrt[3]{k}$, которые верны при $\forall x \in R$ и $\forall k \in \mathbb{N}$, для общего члена ряда будет справедлива оценка

$$\left| \frac{\operatorname{arctg}(kx)}{x^4 + k\sqrt[3]{k}} \right| \le \frac{\pi}{2} \frac{1}{k\sqrt[3]{k}},$$

Поскольку построенный мажорирующий числовой ряд $\dfrac{\pi}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k\sqrt[3]{k}}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса (теорема 9.5) исследуемый функциональный ряд будет сходиться равномерно.

Решение получено.

Задача 9.3 *Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^k \sin\frac{x}{4^k} \qquad x \in [\,0,+\infty)\ .$$

Решение. 1) Исследуемый ряд сходится поточечно, поскольку $\sin\dfrac{x}{4^k} \sim \dfrac{x}{4^k}$ и справедливо неравенство

$$\left|3^k \sin\frac{x}{4^k}\right| \leq x\left(\frac{3}{4}\right)^k \ .$$

2) Для $n_0$-го остатка данного функционального ряда в некоторой точке $x_0 \in (0,+\infty)$ имеем

$$r_{n_0}(x_0) = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} 3^k \sin\frac{x_0}{4^k} \geq 3^{n_0+1}\sin\frac{x_0}{4^{n_0+1}} \geq 3\sin\frac{x_0}{4^{n_0+1}}\,.$$

3) Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ на $(0, +\infty)$ существуют

$$n_0 = N, \quad x_0 = 4^{n_0+1}, \quad \varepsilon_0 = 3\sin 1$$

такие, что $\quad r_{n_0}(x_0) \geq 3\sin 1 = \varepsilon_0$ .

Это означает, что

$$\sup_{x \in X} \left| r_n(x) \right| \not\to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

Решение получено. и в силу теоремы 9.4 исследуемый ряд сходится неравномерно.

Задача 9.4 *Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{1+k^3x^3}$$

*на множествах:* 1) $E_1 : \; x \in [\,0,1\,]$,

2) $E_2 : \; x \in [\,1,+\infty)$ .

Решение. 1) Исследуемый ряд сходится поточечно на $E_1$ и $E_2$, в силу признака сравнения и сходимости числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^3}$.

2) Производная от общего члена ряда

$$u_k'(x) = \frac{1 - 2k^3x^3}{(1 + k^3x^3)^2} < 0 \qquad \forall x \in E_2 \, .$$

Поэтому у непрерывной $u_k(x)$ имеется на $E_2$ максимум в точке $x = 1$ , и будет верно неравенство

$$\frac{x}{1 + k^3x^3} \leq \frac{1}{1 + k^3} \qquad \forall x \in E_2 \, .$$

Из сходимости мажорирующего ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{1 + k^3}$. и признака Вейерштрасса получаем равномерную сходимость исследуемого ряда на $E_2$ .

3) Исследование на равномерную сходимость при $x \in E_1$ выполним при помощи отрицания критерия Коши. Для любого натурального $N$ можно взять

$$k_0 = N \geq N\,, \quad p_0 = N \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad x_0 = \frac{1}{N} \in E_1\,,$$

такие, что выполнено неравенство

$$\left| \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0} \frac{x_0}{1+k^3x_0^3} \right| = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{\dfrac{1}{N}}{1+\dfrac{k^3}{N^3}} \geq$$

(здесь сделаем все слагаемые одинаковыми, заменив каждое из них наименьшим)

$$\geq \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{N} \frac{1}{1+\dfrac{(2N)^3}{N^3}} = N\frac{1}{N}\,\frac{1}{1+8} = \frac{1}{9} = \varepsilon_0\,,$$

то есть, в итоге

$$\left| \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0} \frac{x_0}{1+k^3x_0^3} \right| \geq \varepsilon_0\,.$$

Последнее неравенство означает, что на $E_1$ в силу 1) и теоремы 9.7 исследуемый функциональный ряд сходится неравномерно.

Решение получено.

Задача 9.5 *Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+x^2}} \operatorname{arctg} x^k$$

*на множестве* $X:\ x \in [\,1, +\infty)\,.$

Решение. 1) Рассмотрим вначале ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+x^2}}$. Пусть последовательности $a_k(x) = (-1)^k$ и $b_k(x) = \frac{1}{\sqrt{k+x^2}}$.

Нетрудно заметить, что последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ ограничена, а последовательность с общим членом $\{b_k(x)\}$ монотонна по $k$ и равномерно сходится на $X:\ x \in [\,1, +\infty)\,.$ к нулевой функции в силу неравенства $\frac{1}{\sqrt{k+x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+x^2}}$. сходится на $X$ равномерно по признаку Дирихле (теорема 9.8).

2) С другой стороны, последовательность $\operatorname{arctg} x^k$ монотонна по $k$ и ограничена на $X$ . Следовательно, исходный функциональный ряд будет сходиться на $X$ равномерно по признаку Абеля (теорема 9.9).

Решение получено.

Задача 9.6 *Верно ли, что*

A) *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{k^2}$ *можно почленно дифференцировать на* $\mathbb{R}$ ?

B) *Этот ряд сходится равномерно на* $\mathbb{R}$ ?

Решение. 1) Исследуемый ряд очевидно сходится в точке $x = 0$ .

2) Рассмотрим ряд, общий член которого есть производная от общего члена исследуемого ряда. Имеем

$$u'_k(x) = \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{k^2}\right)' = \frac{k^2}{k^4 + x^2} \le \frac{1}{k^2} \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)\,.$$

Откуда следует, что ряд составленный из производных будет равномерно сходится на любом отрезке вида $[-C, C]$ , где $C \in (0, +\infty)$ по признаку Вейерштрасса.

Тогда по теореме 9.3, исходный функциональный ряд можно почленно дифференцировать $\forall C \in (0, +\infty)$ . *На отрезке* $[-C, C]$ этот ряд будет равномерно сходиться к дифференцируемой (в силу произвольности $C \in (0, +\infty)$) на всей вещественной оси предельной функции.

Следовательно, ответ на вопрос A) утвердительный.

3) Рассмотрим вопрос В).

Функциональная последовательность $\{u_k(x)\}$ сходится поточечно к функции, тождественно равной нулю на всей вещественной оси.

С другой стороны, мы имеем

$$\sup_{x\in X}\Big|\,u_k(x)\,\Big| \not\to 0 \qquad \text{при } k\to\infty\,.$$

Действительно, для функциональной последовательности $\left\{\operatorname{arctg}\dfrac{x}{k^2}\right\}$ всегда можно найти пару чисел $k_0\in\mathbb{N}$ и $x_0\in\mathbb{R}$ таких, что $x_0=k_0^2$. А это дает

$$u_{k_0}(x_0)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}>0\,.$$

То есть, не выполнено (следствие 9.1) — необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$, имеющее вид $u_k(x)\underset{X}{\rightrightarrows}0$.

Решение получено.

Значит, ответ на вопрос В) отрицательный.

Задача 9.7 *Вычислить*

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 kx}{k(k+1)} \right) dx\,.$$

Решение. 1) Члены подынтегрального ряда непрерывные на $[0, 2\pi]$ функции. При этом $\forall x \in [0, 2\pi]$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{\sin^2 kx}{k(k+1)} \right| \leq \frac{1}{k^2}\,.$$

Тогда подынтегральный ряд сходится на $[0, 2\pi]$ равномерно и его можно почленно интегрировать.

2) Поскольку

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 kx\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos 2kx)\; dx = \pi\,,$$

то (проверьте это самостоятельно!)

Решение получено.

$$I = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \pi\,.$$

Задача 9.8 *Представить функцию* $\operatorname{arctg} x$ *в виде функционального ряда и оценить отрезок, на котором он сходится.*

Решение. 1) Воспользуемся тем, что функция $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ представима на $x \in (-1,1)$ как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{2(k-1)}\,. \tag{9.4}$$

2) Поскольку функциональный ряд в правой части равенства (9.4) мажорируется числовым рядом вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} r^{2(k-1)}$ , сходящимся $\forall r \in (-1,1)$ , то функциональный ряд (9.4) будет равномерно сходиться на отрезке $[-r, r]$ и равенство (9.4) можно почленно интегрировать.

3) В результате мы приходим к равенству

$$\operatorname{arctg} x + C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{2k-1}.$$

Константа интегрирования $C = 0$, поскольку $\operatorname{arctg} 0 = 0$.

Таким образом, функция $\operatorname{arctg} x$ представляется функциональным рядом

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k} x^{2k+1}}{2k+1},$$

Решение получено.

который сходится равномерно на $[-r, r]\ \ \forall r \in [\,0, 1)$.