Степенные ряды

При использовании функциональных рядов в качестве средства аппроксимации исследуемых функций, естественно в первую очередь обратить внимание на наиболее простые по форме представления и свойствам функции.

Использовать, например, ряды, общие члены которых суть степенные алгебраические одночлены.

Дадим

Определение 10.1	Функциональный ряд вида $$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k , \qquad (10.1)$$ в котором z_0 и c_k — заданные комплексные константы, а z — комплексная независимая переменная, называется *степенным рядом*.

Напомним, что комплексное число обычно записывается в стандартном виде как $z = a+ib$, где вещественные числа a и b называются соответственно *вещественной* и *мнимой* частями комплексного числа z и обозначаются как $a = \mathrm{Re}z$ и $b = \mathrm{Im}z$.

Вещественное неотрицательное число $\sqrt{a^2 + b^2}$ называется *модулем* комплексного числа z и обозначается $|z|$.

Множество чисел $\mathrm{Re}z \ \ \forall a \in \mathbb{R}$ очевидно совпадает с множеством вещественных чисел. В частном случае, когда z вещественное число, справедливо равенство $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$, то есть модуль z совпадает с абсолютной величиной числа a.

Это позволяет считать некоторые свойства рядов (10.1) верными и для вещественных степенных рядов вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \,, \tag{10.2}$$

в котором x_0 и a_k — заданные вещественные константы, а — вещественная независимая переменная.

Далее, в большом числе случаев мы можем считать, что $z_0 = 0$, и исследовать, без ограничения общности, степенные ряды вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \,. \tag{10.3}$$

Наконец, комплеснозначный ряд (10.1) естественно называть *абсолютно сходящимся*, если поточечно сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left| \, c_k (z - z_0)^k \right|$.

Свойства степенных рядов

Нетрудно заметить, что любой степенной ряд (10.1) всегда сходящийся, поскольку при $z = z_0$ у него есть предельная функция, тождественно равная нулю.

Представление о виде множества сходимости степенного ряда (10.3) можно составить путем использования следующих теоретических утверждений.

Теорема 10.1 (1-я теорема Абеля) **Если степенной ряд (10.3) поточечно сходится при некотором** $z^* \neq 0$**, то он** *поточечно и абсолютно сходится* **для любого** z **такого, что** $|z| < |z^*|$, **а, если расходится при** $z^* \neq 0$**, то он** *расходится* **для любого** z**, такого, что** $|z| > |z^*|$.

Теорема 10.2 **Для каждого степенного ряда (10.3) существует R (R это — неотрицательное число или $+\infty$) такое, что этот ряд абсолютно сходится на множестве $|z| < R$.**

Определение 10.2	Множество $\{z : \ |z| < R\}$ называется *кругом сходимости*, а R — *радиусом сходимости* ряда (10.3) .

Множество сходимости ряда (10.3) состоит из его круга сходимости и, быть может, некоторых граничных точек этого круга.

Теорема 10.3 **В $\{z : \ |z| \leq r < R\}$ — любом** *замкнутом* **круге радиуса r степенной ряд (10.3) сходится** *абсолютно и равномерно.*

Для оценки радиуса сходимости ряда (10.3) может оказаться полезной

Теорема 10.4

1) Если существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{c_k}{c_{k+1}}\right|$, **то** $R=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{c_k}{c_{k+1}}\right|$.

2) Если существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}$, **то** $\dfrac{1}{R}=\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}$.

Утверждения теорем 10.1 — 10.4 очевидным образом переносятся на случай рядов вида (10.1) и (10.2). Заметим только, что для вещественных рядов (10.2) принято использовать вместо *круга сходимости* термин *интервал сходимости.*

Задача 10.1 *Найти радиус сходимости интервал сходимости и исследовать на сходимость в концах интервала сходимости для степенного ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \, .$$

Решение. 1) По теореме 10.4 имеем либо

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| -\frac{k+1}{k} \right| = 1 \, ,$$

либо

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right|} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}} = 1 \, .$$

Откуда следует, что $R_{cx} = 1$, а интервал сходимости $(-1, 1)$.

2) На границе интервала сходимости при $x = -1$ имеем числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (-1)^k = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

который расходится по интегральному признаку сравнения.

На другом конце, при $x = 1$, имеем знакочередующийся числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$, который сходится по признаку Лейбница.

Решение получено.

Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Поскольку степенные ряды вида (10.2), то есть,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k\,, \tag{10.2}$$

в котором x_0 и a_k — заданные вещественные константы, а x — вещественная независимая переменная, сходятся равномерно на любом отрезке, содержащем x_0 и принадлежащем *строгой внутренности* интервала сходимости, то оказывается справедливой важная

Теорема 10.5

1) На интервале сходимости (x_0-R, x_0+R) предельная функция ряда (10.2) имеет производные любого порядка, которые можно найти почленным дифференцированием этого ряда.

2) На интервале сходимости (x_0-R, x_0+R) интеграл предельной функции ряда (10.2) можно найти почленным интегрированием этого ряда.

3) При почленном дифференцировании или интегрировании степенного ряда (10.2) радиус сходимости *не меняется***.**

Почленное дифференцирование и интегрирование позволяет в ряде случаев получать представления в виде степенных рядов одних функций, используя подобное представление для других.

Напомним, что такой подход был нами уже применен при решении задачи 9.8.

Рассмотрим другие примеры, основанные на использовании формулы для суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, которая рассматриваться как выражение предельной функции степенного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}. \tag{10.4}$$

Заметим, что радиус сходимости этого степенного ряда $R = 1$.

Нетрудно видеть, что почленное дифференцирование равенства (10.4) дает

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \longrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \tag{10.5}$$

а почленное интегрирование

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) \qquad \longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \ln\frac{1}{1-x}. \tag{10.6}$$

Если в левом равенстве (10.6) заменить x на $-x$, то при $x = 1$ мы получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} = \ln(1+x) \qquad \longrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$$

— сумму числового ряда, использованного нами в задаче 7.7.

Рассмотрим не столь очевидный пример.

Задача 10.2 *Найти предельную функцию и радиус сходимости ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1} .$$

Решение. 1) Введем обозначение $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1}$. Тогда

$$\int S(x)\,dx = C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} k x^k = C_1 + x \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} ,$$

где, в свою очередь, обозначим $Q(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}$.

2) Теперь воспользуемся тем, что

$$\int Q(x)\,dx = C_2 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k = C_2 + \frac{1}{1-x} - 1\,.$$

Заметим, что радиус сходимости этого ряда нам известен. Он равен 1 и не меняется ни при дифференцтровании, ни при интегрировании степенных рядов.

Продифференцировав последнее равенство найдем, что

$$Q(x) = \frac{d}{dx}\left(C_2 + \frac{1}{1-x} - 1 \right) = \frac{1}{(1-x)^2}\,.$$

Окончательно получаем, что

$$S(x) = \frac{d}{dx}\left(C_1 + \frac{x}{(1-x)^2} \right) = \frac{1+x}{(1-x)^3}\,,$$

Решение получено.

причем $R_{cx} = 1$.

Ряд Тейлора

До сих пор мы решали задачу отыскания предельной функции $f(x)$ (или определения некоторых свойств этой функции) для степенного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \,, \tag{10.2}$$

по известным коэффициентам $a_k \;\; \forall k \in \mathbb{N}$ этого ряда.

Рассмотрим теперь обратную задачу: задачу построения степенного ряда, имеющего в окрестности точки x_0 заданную предельную функцию $f(x)$.

Условие решения этой задачи дает

Теорема 10.6

Пусть функция $f(x)$ является предельной для степенного ряда (10.2) в некоторой окрестности точки x_0 (или, как иногда говорят, является в x_0 *регулярной*).
Тогда $f(x)$ имеет в этой окрестности производные любого порядка и коэффициенты ряда (10.2) определяются формулами

$$a_0 = f(x_0), \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

Определение 10.3	Для функции $f(x)$, имеющей в точке x_0 производные любого порядка, степенной ряд вида $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \,, \qquad (10.7)$$ называется *рядом Тейлора* этой функции.

Утверждение, обратное теореме 10.6, неверно. Не любая бесконечно дифференцируемая функция является предельной для своего ряда Тейлора. Такова, например, функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \end{cases} \qquad (10.8)$$

имеющая при $x = 0$ нулевые производные любого порядка и, следовательно, ряд Тейлора с нулевой предельной функцией.

Можно показать, что порождающая ряд Тейлора функция является предельной для этого ряда, если сама функция и *все* ее производные *разом ограничены* на интервале сходимости.

Пример с функцией (10.8) также показывает, что, несмотря на внешнее сходство *ряда* Тейлора с *формулой* Тейлора, эти способы аппроксимации функции в окрестности некоторой точки принципиально различны.

Действительно, функция (10.8) представима формулой Тейлора с остаточным членом форме Пеано в виде $f(x) = o((x-x_0)^n)$, но она не является регулярной.

Для доказательства регулярности (то есть, представимости функкии сходящимся к ней рядом) недостаточно существования производных до n-го порядка включительно. Тут требуется доказать, что n-ый остаток степенного ряда сходится к нулевой функции в некоторой окрестности точки x_0.

Заметим, что n-ый остаток ряда может быть представлен либо в интегральной форме

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,du\,,$$

либо в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)},$$

где ξ принадлежит интервалу, ограниченного точками x_0 и x.

Представление основных элементарных функций рядом Тейлора

Приведем формулы, представляющие некоторые элементарные функции рядом Тейлора, в случае, когда $x_0 = 0$. Такие ряды принято называть *рядами Маклорена.*

Для облегчения запоминания разобъем эти формулы на три группы.

1. *Показательная и тригонометрические функции*:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,, \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \tag{10.9}$$

с $R_{cx} = +\infty$.

2. *Степенная функция*:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{\alpha}^k x^k\,, \qquad \text{где} \quad C_{\alpha}^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}\,. \tag{10.10}$$

с $R_{cx} = 1$.

Важные частные случаи: $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k\,, \quad \dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k.$

3. *Логаримические функции*:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}\,, \qquad \ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}\,. \tag{10.11}$$

с $R_{cx} = 1$.

Примеры представления функций рядом Тейлора или Маклорена

Примером эффективного использования разложения в степенные ряды может служить

Задача 10.3 *Найти представление в виде степенного ряда и радиус сходимости этого ряда для функции*

$$F(x) = \int\limits_0^x e^{-u^2}\, du\,.$$

1) Данный интеграл «неберущийся», однако функция $F'(x) = e^{-x^2}$ может быть разложена по первой из формул (10.9) в степенной ряд вида

$$F'(x) = e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{k!},$$

причем $R_{cx} = +\infty$.

2) Интегрируя это равенство, мы получаем

$$F(x) = \int\limits_0^x e^{-u^2}\,du = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!} \qquad (10.12)$$

`Решение получено.` — формульное представление для «неберущегося» интеграла в виде степенного ряда с $R_{cx} = +\infty$.

Графики частичных сумм ряда (10.12) показаны на рис.1. Эти графики иллюстрируют тот факт, что с ростом n «качество» аппроксимации улучшается, при этом оно зависит от x : чем меньше $|x|$, тем качество лучше.

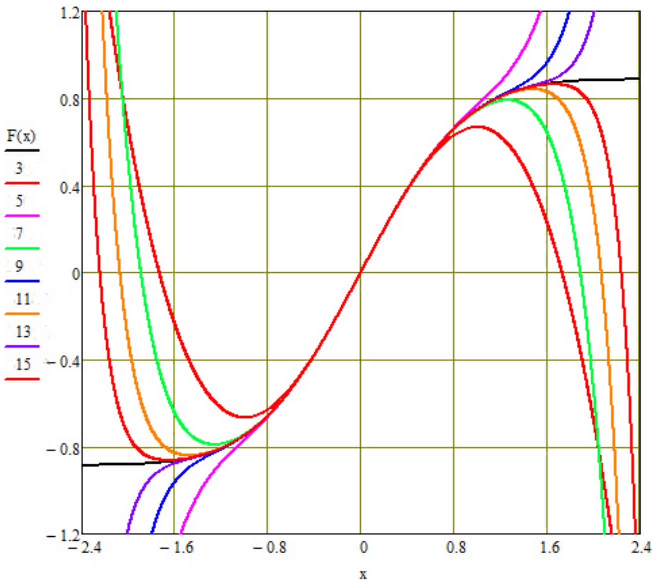

Рис. 1. Графики частичных сумм $S_n(x)$ ряда (10.12) функции $F(x)$ при $2n+1 = 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$ в задаче 10.3.

Рассмотрим еще несколько задач, в которых требуется представить функцию степенным рядом.

Задача 10.4 *Разложить функцию*

$$f(x) = \frac{5-2x}{x^2-5x+6}$$

в ряд Маклорена и найти радиус сходимости этого ряда.

Решение. 1) Разложим данную функцию на простейшие дроби — виду, удобному для использования табличных рядов

$$\frac{5-2x}{x^2-5x+6} = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{3-x} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\,.$$

2) Применение последней формулы из группы (10.10) дает разложения вида

$$\frac{1}{1-\dfrac{x}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{2^k} \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{1-\dfrac{x}{3}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{3^k}\,,$$

у первого из которых $R_{cx}=2$, а у второго — $R_{cx}=3$.

3) Пользуясь этими разложениями находим, что

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{2^k}+\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{3^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^{k+1}}\right)x^k\,,$$

Решение получено.

для которого очевидно $R_{cx}=\min\{2,3\}=2$.

Задача 10.5 *Разложить функцию*

$$f(x) = \frac{6-3x}{\sqrt{x^2-4x+8}}$$

в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$ и найти радиус сходимости этого ряда.

Решение. 1) Для того, чтобы воспользоваться табличными разложения в ряд Маклорена (10.10) предварительно сделаем замену переменной $u = x-2 \quad \Longrightarrow \quad x = u+2$, что дает

$$f(x(u)) = \frac{6-3(u+2)}{\sqrt{(u+2)^2-4(u+2)+8}} = -\frac{3u}{\sqrt{4+u^2}} = \ .$$

$$= -\frac{3}{2}u\left(1+\left(\frac{u}{2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \ .$$

2) Заметим, что согласно (10.10)

$$\left(1+\left(\frac{u}{2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1+\sum_{k=1}^{\infty} C^k_{-\frac{1}{2}} \left(\frac{u}{2}\right)^{2k} \quad \text{с} \quad R_{cx} = 2\,,$$

где

$$C^k_{-\frac{1}{2}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!} =$$

$$= \frac{(-1)^k\left(1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2k-1)\right)}{2^k k!} = \frac{(-1)^k\,(2k-1)!!}{2^k k!}\,.$$

3) Подставляя, получим

$$f(x(u)) = -\frac{3}{2}u\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(2k-1)!!}{2^k k!}\,\frac{u^{2k}}{2^{2k}}\right] = \ .$$

$$= -\frac{3}{2}u + 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\,(2k-1)!!}{2^{3k+1}k!}\,u^{2k+1}\,.$$

Возврат к исходной переменной x дает ответ

$$f(x) = -\frac{3}{2}(x-2) + 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\,(2k-1)!!}{2^{3k+1}k!}\,(x-2)^{2k+1}\,,$$

Решение получено.

где радиус сходимости ряда $R_{cx} = 2\,.$

Задача 10.6 *Разложить функцию*

$$f(x) = x \operatorname{arctg}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

в ряд Маклорена и найти радиус сходимости этого ряда.

Решение. 1) В этой задаче также можно воспользоваться табличными разложения в ряд Маклорена (10.10), но предварительно (*или это кто-то нам посоветовал, или же мы додумались сами*) найдем разложение в ряд Маклорена для *производной* от функции

$$\varphi(x) = \operatorname{arctg}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right).$$

Имеем

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+(x+\sqrt{1+x^2})^2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) =$$

$$= \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{2\Big(1+x^2+x\sqrt{1+x^2}\Big)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2}\,.$$

Здесь возникает вопрос для любознательных: полученная формула нам хорошо знакома. Значит ли это, что $\varphi(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$?

2) Разложим теперь $\varphi'(x)$ по формуле Маклорена, получим

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}\,(1+x^2)^{-1} = \frac{1}{2}\,\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}\,,$$

что после интегрирования дает

$$\varphi(x) = C + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}\,,$$

где $C = \frac{\pi}{4}$, поскольку $\varphi(0) = \frac{\pi}{4}$, с $R_{cx} = 1$.

Теперь выписываем окончательный ответ

Решение получено.

$$f(x) = x\varphi(x) = \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+2}\,.$$

Задача 10.7 *Разложить функцию*

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

в ряд Маклорена и найти радиус сходимости этого ряда.

Решение. 1) Нетрудно заметить, что величина $x+x^2$ является малой при малых $|x|$. Однако, формула

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x+x^2)^k$$

не является решением задачи, поскольку в формуле Маклорена степени переменной x должны быть упорядочены по возрастанию.

2) Чтобы преодолеть это затруднение, преобразуем данную функцию следующим образом

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^{3k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^{3k} - \sum_{k=0}^{\infty} x^{3k+1} \qquad \text{с} \;\; R_{cx} = 1\,.$$

3) Запишем полученный ряд, не используя смволов суммирования

$$f(x) = 1 - x + 0\cdot x^2 + x^3 - x^4 + 0\cdot x^5 + x^6 - x^7 + \ldots\,,$$

то есть, данный ряд порождается числовой последовательностью

$$\{a_k\} = \Big\{\; 1, -1,\; 0,\; 1, -1,\; 0,\; 1, -1,\; 0,\; \ldots \Big\},$$

которая может быть задана также формулой

$$\{a_k\} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k\right) \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots\,,$$

что в итоге дает ответ

Решение получено.

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k\right)x^k \qquad \text{с} \quad R_{cx} = 1\,.$$

Элементарные функции комплексного переменного

Степенные ряды используются для определения показательной и тригонометрических функций комплексного аргумента. В частности рядами, сходящимися во всей комплексной плоскости, задаются функции

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \, , \tag{10.13}$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \, , \tag{10.14}$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \qquad . \tag{10.15}$$

Для всех этих рядов $R_{cx} = +\infty$, То есть, они сходятся абсолютно и равномерно $\forall z$ таких, что $|z| \leq R < +\infty$.

Опишем некоторые свойства рядов (10.13) — (10.15) .

1. Используя теорему о перемножении абсолютно сходящихся рядов, можно доказать, что

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,. \tag{10.16}$$

2. Запишем коэффициенты рядов (10.13) — (10.15) для функций e^{iz}, $\cos z$ и $\sin z$, (учитывая, что по правилу умножения комплексных чисел $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, …) в виде таблицы

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
e^{iz}	1	i	$-\frac{1}{2!}$	$-\frac{i}{3!}$	$\frac{1}{4!}$	$\frac{i}{5!}$	$-\frac{1}{6!}$	$-\frac{i}{7!}$	$\frac{1}{8!}$	$\cdots$
$\cos z$	1		$-\frac{1}{2!}$		$\frac{1}{4!}$		$-\frac{1}{6!}$		$\frac{1}{8!}$	$\cdots$
$\sin z$		1		$-\frac{1}{3!}$		$\frac{1}{5!}$		$-\frac{1}{7!}$		$\cdots$

Нетрудно заметить, что если третью строку умножить на i и сложить со второй, то получится первая строка. Таким образом мы приходим к *формуле Эйлера*

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z\,. \tag{10.17}$$

3. Из (10.14) следует, что $\cos z$ четная функция, а $\sin z$ — нечетная, поэтому

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \,. \tag{10.18}$$

Почленное сложение (10.17) и (10.18) дает

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \operatorname{ch} iz \,, \tag{10.19}$$

а почленное вычитание —

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \operatorname{sh} iz \,,$$

что отчасти оправдывает использование терминов «гиперболический синус» и «гиперболический косинус».

Проверьте самостоятельно, что функция e^z *периодическая* с периодом равным $2\pi i$.

4. Совместное использование равенств (10.16) и (10.17) позволяет *любое* комплексное число $z = a + ib$ записать как в *тригонометрической* форме
$$z = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,,$$
так и в *показательной*
$$z = \rho\, e^{i\varphi}\,,$$
где $\rho = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$, а φ на промежутке $[0,\,2\pi)$ однозначно определяется системой
$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,. \end{cases}$$

Удобство использования показательной формы записи комплексного числа демонстрируют

Задача 10.8 *Записать в стандартной форме значение комплексного числа* $\sqrt[3]{-1}$.

Решение. 1) Напомним, что стандартная форма комплексного числа имеет вид $z = a + i\,b$.

Чтобы получить его для числа $\sqrt[3]{-1}$, используем последовательно стандартную, тригонометрическую (с учетом периодичности) и показательную формы комплексного числа (-1):

$$(-1) = -1 + i \cdot 0 =$$

$$= \cos(\pi + 2\pi n) + i\,\sin(\pi + 2\pi n) = e^{i(\pi + 2\pi n)}\,,$$

где $n \in \mathbb{Z}$.

2) В данной задаче необходимость учета периодичности тригонометрических функций обусловлена тем, что символ $\sqrt[3]{-1}$ может обозначать не *одно*, а несколько комплексных чисел. Действительно,

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{e^{i(\pi+2\pi n)}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}n\right)} = \\ = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}n\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}n\right) =$$

$$= \begin{cases} \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{при} \quad n=0\,, \\ \cos\pi + i\sin\pi = -1+i\,0 & \text{при} \quad n=1\,, \\ \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{при} \quad n=2\,. \end{cases}$$

Решение получено.

При других n значения числа $\sqrt[3]{-1}$ повторяются.

Задача 10.9 *Найти значение комплексного числа* i^i .

Решение. Число i, стоящее в основании степени, запишем в показательной форме как $e^{i\frac{\pi}{2}}$. Тогда, с учетом $i^2 = -1$, получим

$$i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i^2\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \, .$$

Решение получено. Это число — вещественное.

Задача 10.10 *Найти какое-нибудь вещественное решение уравнения*

$$\cos\sqrt{x} = 5\,.$$

Решение. 1) По формуле (10.19) имеем

$$\cos\sqrt{x} = \frac{e^{i\sqrt{x}} + e^{-i\sqrt{x}}}{2}\,.$$

Введем новое неизвестное $u = e^{i\sqrt{x}}$. Тогда данное уравнение примет вид

$$u + \frac{1}{u} = 10 \qquad \text{или} \qquad u^2 - 10u + 1 = 0\,.$$

Его решение $u = 5 \pm \sqrt{24}\,$.

2) Теперь, например, из условия $e^{i\sqrt{x}} = 5 + \sqrt{24}$ находим значение x .

$$i\sqrt{x} = \ln(5 + \sqrt{24}) \qquad \Longrightarrow \qquad x = -\ln^2(5 + \sqrt{24})\,.$$

В качестве дополнительного упражнения, самостоятельно постройте график функции $y = \cos\sqrt{x}$ на всей вещественной оси.

Решение получено.