

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Пусть дана дважды непрерывно дифференцируемая в некоторой области $\Omega \subseteq E^2$ с ОНБ функция $f(x, y)$. Выясним, при каких условиях эта функция имеет в точке $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \in \Omega$ локальный минимум при условии $g(x, y) = 0$. Дадим

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x, y)$ имеет в точке $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ *условный минимум*, если существует $\overset{\circ}{U}_\varepsilon$ - проколота окрестность, такая, что для любой точки $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon$ имеет место

$$g(x, y) = 0$$

и выполнено неравенство

$$f(x, y) > f(x^*, y^*). \quad (1)$$

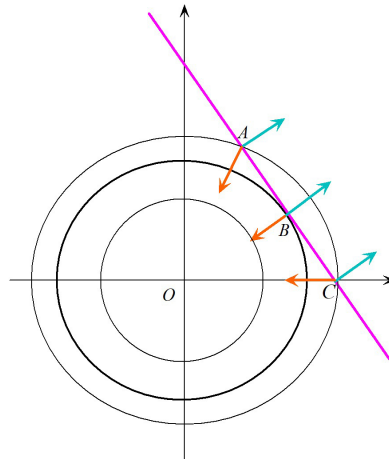
Сначала рассмотрим конкретную задачу:

Пример 1. В E^2 исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = -x^2 - y^2$ при условии $g(x, y) = x + y - 2 = 0$.

Решение: 1) Очевидно, что эту задачу можно решить *методом исключения*, выразив y из условия связи через x и подставив $y = 2 - x$ в целевую функцию. Тогда приходим к задаче максимизации функции $\Phi(x) = -x^2 - (2 - x)^2$ без ограничений, решение которой $x^* = 1, y^* = 1$ и $\Phi^* = f^* = -2$.

Функция Лагранжа и ее использование

Рассмотрим вначале геометрическую интерпретацию задачи, получив необходимые условия ее решения.



На данном рисунке серым (и черным) цветом показаны изолинии целевой функции

$$f(x, y) = -x^2 - y^2,$$

фиолетовым цветом – точки прямой $g(x, y) = x + y - 2 = 0$.

Оранжевым цветом показаны градиенты целевой функции $\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| = \left\| -2x \right\|$.

Наконец, голубым цветом – градиенты функции-ограничения $\left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\| = \left\| 1 \right\|$.

Очевидно, что, если проекция градиента целевой функции на множество точек, удовлетворяющих ограничению, *не нулевая*, то это – не экстремум и *необходимое* условие эк-

тремума заключается в коллинеарности векторов $\left\| \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right\|$ и $\left\| \begin{array}{c} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{array} \right\|$ на множестве точек

$$g(x, y) = x + y - 2 = 0.$$

Иначе говоря, $\left\| \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right\| = -\lambda \left\| \begin{array}{c} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{array} \right\|$ или, в векторной форме, $\text{grad } f + \lambda \text{ grad } g = 0$, где λ –

некоторая константа.

Откуда, в силу свойства линейности операции дифференцирования, следует, что существует функция

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y),$$

в терминах которой необходимое условие существования условного экстремума в данной задаче принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| \begin{array}{c} \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\|, \\ g(x, y) = 0. \end{array} \right.$$

В рассматриваемой задаче $L(x, y, \lambda) = -x^2 - y^2 + \lambda(x + y - 2)$. Значит, необходимое условие экстремума имеет вид

$$\begin{cases} -2x + \lambda = 0, \\ -2y + \lambda = 0, \\ x + y - 2 = 0. \end{cases}$$

Очевидным решением этой системы является тройка чисел

$$x^* = 1, \quad y^* = 1, \quad \lambda^* = 2, \quad f^* = -2.$$

Сделаем обобщение данного подхода

Для задачи:

$$\begin{aligned} & \text{исследовать на экстремум функцию } f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ & \text{при условиях: } g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad i = [1, m]. \end{aligned} \quad (2)$$

будем считать, что

$$m < n \quad \text{и} \quad \operatorname{rg} \left\| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(g_1, g_2, \dots, g_m)} \right\| = m.$$

Функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = [1, m]$ — непрерывно дифференцируемые.

Если ввести в рассмотрение функцию *Лагранжа* вида:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

то *необходимые* условия экстремума функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, при условиях

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad i = [1, m].$$

будут иметь вид

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = 0 & j = [1, n] \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 & i = [1, m]. \end{cases} \quad (3)$$

Пусть $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*$ удовлетворяют (3). Тогда *достаточное* условие экстремума будет иметь формулировку

Если квадратичная форма $d_x^2 L$ положительно (отрицательно) определена при условии $dg_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \quad i = [1, m]$, то задача (3) в точке $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*$ имеет локальный *минимум (максимум)*.

Пример 2. В E^3 исследовать на экстремум функцию $u(x, y, z) = x - y + 2z$ при условии $x^2 + y^2 + 2z^2 = 16$.

Решение: 1) Функция Лагранжа для этой задачи будет

$$L = x - y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + 2z^2 - 16).$$

Условия ее стационарности вместе с уравнением связи образуют систему

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -1 + 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2 + 4\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 16. \end{cases}$$

Если из первых трех уравнений выразить $x = -\frac{1}{2\lambda}$, $y = \frac{1}{2\lambda}$, $z = -\frac{1}{2\lambda}$ и подставить в четвертое, то получим из $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{2}{4\lambda^2} = 16$, что $\lambda = \pm \frac{1}{4}$.

2) Получаем две стационарные точки, подозрительные на экстремум:

$$\lambda^* = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x^* = -2 \\ y^* = 2 \\ z^* = -2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \lambda^* = -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x^* = 2 \\ y^* = -2 \\ z^* = 2 \end{cases}$$

3) Проверяем достаточные условия. Находим

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda \quad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 4\lambda$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} = 0$$

Откуда $d^2L = 2\lambda(dx)^2 + 2\lambda(dy)^2 + 4\lambda(dz)^2$. Эта квадратичная форма положительно определена при $\lambda = \frac{1}{4}$ и отрицательно определена при $\lambda = -\frac{1}{4}$.

Кроме того, должно выполняться равенство $2xdx + 2ydy + 4zdz = 0$. Однако, последнее равенство на знаковую определенность d^2L не повлияет и может быть проигнорировано. Итак

$$\lambda_1^* = \frac{1}{4} \quad \begin{cases} x_1^* = -2 \\ y_1^* = 2 \\ z_1^* = -2 \end{cases} \quad f_1^* = -8 \quad - \text{точка минимума}$$

и

$$\lambda_2^* = -\frac{1}{4} \quad \begin{cases} x_2^* = 2 \\ y_2^* = -2 \\ z_2^* = 2 \end{cases} \quad f_2^* = 8 \dots - \text{точка максимума.}$$

Пример 3. В E^2 исследовать на экстремум функцию $u(x, y) = x^2 + xy + y^2$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Решение: 1) Функция Лагранжа в этой задаче

$$L = x^2 + xy + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

2) Условия ее стационарности будут

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + y + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = x + 2y + 2\lambda y = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (2 + 2\lambda)x + y = 0 \\ x + (2 + 2\lambda)y = 0 \end{cases} \quad (4)$$

2) Имеем (по теореме Крамера), что, если $\det \begin{vmatrix} 2+2\lambda & 1 \\ 1 & 2+2\lambda \end{vmatrix} \neq 0$,
то $x = y = 0$, а это очевидно (в силу $x^2 + y^2 = 1$) не решение.

Если же $\det \begin{vmatrix} 2+2\lambda & 1 \\ 1 & 2+2\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{3}{2} \end{cases}$, то возможны два случая.

3) $\lambda_1^* = -\frac{1}{2}$, при этом, в силу (4)

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_{11}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_{11}^* = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} & \text{— точка } D \\ \begin{cases} x_{12}^* = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_{12}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} & \text{— точка } C \end{cases}.$$

Матрица Гессе функции Лагранжа будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} 2 + 2\lambda_1^* & 1 \\ 1 & 2 + 2\lambda_1^* \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Она *положительно полуопределена* и тут требуется дополнительное исследование.

Здесь, в точках C и D ,

$$d^2L = (dx)^2 + 2dxdy + (dy)^2 = (dx + dy)^2,$$

при этом должно быть выполнено равенство $xdx + ydy = 0$.

А поскольку в этих точках $x + y = 0$, то $dx = dy$. Значит, $d^2L = 4(dx)^2$ и точки C и D — это *минимумы* с $f^* = \frac{1}{2}$.

4) $\lambda_2^* = -\frac{3}{2}$, при этом (в силу (4))

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_{21}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_{21}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} & \text{— точка } A \\ \begin{cases} x_{22}^* = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_{22}^* = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} & \text{— точка } B \end{cases}.$$

Матрица Гессе тут будет иметь вид $\begin{vmatrix} 2 + 2\lambda_2^* & 1 \\ 1 & 2 + 2\lambda_2^* \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$

Она отрицательно полуопределена и здесь также требуется дополнительное исследование.

Имеем, в точках A и B ,

$$d^2L = -(dx)^2 + 2dxdy - (dy)^2 = -(dx - dy)^2,$$

при этом должно быть выполнено равенство $xdx + ydy = 0$.

А поскольку в этих точках $x - y = 0$, то $dx = dy$. Значит, $d^2L = 4(dx)^2$ и точки A и B — это максимумы с $f^* = \frac{3}{2}$.

