ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Определение линейного пространства

Определение

Множество Λ, состоящее из элементов $x, y, z, \ldots$, для которых определена операция сравнения, называется *линейным пространством*, если

1°. Каждой паре элементов x, y этого множества поставлен в соответствие третий элемент этого же множества, называемый их «*суммой*» и обозначаемый $x + y$, таким образом, что выполнены аксиомы

а) $x + y = y + x$;

б) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

в) существует *нулевой элемент* o, такой, что для любого $x \in \Lambda$ имеет место $x + o = x$;

г) для каждого x существует *противоположный элемент* $-x$, такой, что $-x + x = o$.

2°. Для любого элемента x и любого числа λ существует такой принадлежащий Λ элемент, обозначаемый λx и называемый «*произведением числа на элемент*», что выполнены аксиомы:

а) $1x = x$;

б) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$.

3°. Для операций сложения элементов и умножения элемента на число выполнены аксиомы дистрибутивности:

а) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

б) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad \forall x, y \in \Lambda$; и для любых чисел λ, μ.

Замечания:

1°. Под “числами” в аксиомах второй и третьей групп подразумеваются действительные или комплексные числа.

2°. Операция сравнения дает возможность устанавливать факты «равенства x и y» $(x = y)$ или «неравенства x и y» $(x \neq y)$ для любой пары двух элементов принадлежащих множеству Λ

3°. Первая группа аксиом равносильна требованию, чтобы Λ являлось *абелевой группой* относительно операции сложения.

Примеры: Линейным пространством является (предполагается, что операции сложения и умножения на число выполняются в соответствии с ранее данными определениями):

1°. Множество всех векторов на плоскости.

2°. Множество всех векторов в пространстве.

3°. Множество всех n-компонентных столбцов.

4°. Множество всех многочленов степени не выше, чем n.

5°. Множество всех матриц размера $m \times n$.

6°. $C[\alpha,\beta]$ – множество всех функций, непрерывных на $[\alpha,\beta]$.

7°. Множество всех решений *однородной* системы m линейных уравнений с n неизвестными.

Задача 2.01 *Показать, что в общем случае множество радиусов-векторов точек, принадлежащих плоскости* $(\vec{n}, \vec{r}) = \delta$, *не является линейным пространством. Выяснить, при каких значениях параметра* δ *данное множество будет линейным пространством.*

Задача 2.02 *Показать, что множество, состоящее из одного нулевого элемента, является линейным пространством.*

Задача 2.03 *Будет ли линейным пространством множество всех положительных чисел* R^+?

Решение. Ответ зависит от способа введения операций сложения и умножения на число элементов рассматриваемого множества.

1°. Пусть операции вводятся “естественным” образом. В этом случае множество положительных чисел не образует линейного пространства, поскольку в нем отсутствует нулевой элемент.

2°. Если же операцию “*сложения*” определить как обычное произведение двух чисел, а “*умножение числа* λ *на* x” определить как возведение положительного числа x в степень $\lambda \in R$:

$$\text{«}\textit{сложение } x + y\text{»} \quad := \quad x \cdot y\,; \; x > 0, \, y > 0 \;,$$
$$\text{«}\textit{произведение } \lambda x\text{»} \quad := \quad x^{\lambda}\,; \quad x > 0,$$

то множество положительных чисел будет являться линейным пространством, в котором роль нулевого элемента играет число “1”.

Решение получено

Из аксиоматики линейного пространства следуют теоремы:

Теорема 01 **Линейное пространство имеет единственный нулевой элемент.**

Теорема 02 **Для каждого элемента x линейного пространства имеет место равенство $0x = o$.**

Теорема 03 **Для каждого элемента линейного пространства существует единственный противоположный элемент.**

Теорема 04 **Для каждого $x \in \Lambda$ противоположным элементом служит элемент $-x = (-1)x$.**

Доказательство теоремы 02

Из аксиоматики линейного пространства имеем

$$x = 1x = (0+1)x = 0x + 1x = 0x + x.$$

Прибавляя к обеим частям равенства $x = 0x + x$ элемент $-x$, противоположный элементу x, получаем, что $0x = o$.

Теорема доказана.

Линейная зависимость, размерность и базис в линейном пространстве

Определение

1°. Выражение $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ называется *линейной комбинацией* элементов $x_1, x_2, ..., x_n$ линейного пространства Λ.

2°. Элементы $x_1, x_2, ..., x_n$ линейного пространства Λ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, не равные нулю одновременно, такие, что $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = o$.

3°. Элементы $x_1, x_2, ..., x_n$ линейного пространства Λ называются *линейно независимыми*, если из равенства $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = o$ следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Для элементов линейного пространства справедливы

Лемма 01 **Для того чтобы некоторое множество элементов линейного пространства было линейно зависимым, необходимо и достаточно, чтобы один из этих элементов являлся линейной комбинацией остальных.**

Лемма 02 **Если некоторое подмножество множества элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно зависимо, то линейно зависимы и сами элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$.**

Определение

Базисом в линейном пространстве Λ называется любой упорядоченный набор его n элементов, если

1) эти элементы *линейно независимые*;
2) любое подмножество в Λ, содержащее $n+1$ элемент, включая эти n элементов, *линейно зависимое*.

Определение

Линейное пространство Λ называется n-*мерным* и обозначается Λ^n, если в нем существует базис, состоящий из n элементов. Число n называется *размерностью* линейного пространства Λ^n и обозначается $\dim(\Lambda^n)$.

Теорема 05

Для каждого элемента линейного пространства Λ^n *существует единственное* представление в виде линейной комбинации базисных элементов.

В общем случае линейное пространство может не иметь базиса. Таким свойством обладает, например, линейное пространство, состоящее из одного нулевого элемента.

Примеры базисов в линейных пространствах

Линейное пространство	Размерность	Пример базиса
Множество всех векторов на плоскости	2	Упорядоченная пара неколлинеарных векторов на плоскости.
Множество всех векторов в пространстве	3	Упорядоченная тройка нормированных, попарно ортогональных векторов.
Множество всех n-компонентных столбов	n	n столбцов вида $\left\Vert\begin{matrix}1\\0\\\dots\\0\end{matrix}\right\Vert;\left\Vert\begin{matrix}0\\1\\\dots\\0\end{matrix}\right\Vert;\dots;\left\Vert\begin{matrix}0\\0\\\dots\\1\end{matrix}\right\Vert..$
Множество всех алгебраических многочленов степени не выше, чем n	$n+1$	$n+1$ одночлен вида $P_1(\tau)=1;\ P_2(\tau)=\tau;$ $P_3(\tau)=\tau^2;\ P_4(\tau)=\tau^3;$ $\dots;$ $P_n(\tau)=\tau^{n-1};\ P_{n+1}(\tau)=\tau^n.$
Множество всех матриц размера $m\times n$	$n\cdot m$	$n\cdot m$ всевозможных различных матриц размера $m\times n$, все элементы которых равны нулю, кроме одного, равного 1.
Множество всех функций, непрерывных на $[\alpha,\beta]$	∞	Базис не существует, поскольку для любого натурального n можно построить линейно независимый набор, состоящий из $n+1$ элемента. Например, множество функций вида $\{1,\ \tau,\ \tau^2,\ \dots,\ \tau^n\}..$
Множество решений однородной системы m линейных уравнений с n неизвестными и рангом основной матрицы, равным r	$n-r$	Нормальная фундаментальная система решений.

Подмножества линейного пространства

Подпространство

Определение Непустое множество Ω, образованное из элементов линейного пространства Λ, называется *подпространством* этого линейного пространства, если для любых $x, y \in \Omega$ и любого числа λ

1) $x + y \in \Omega$,
2) $\lambda x \in \Omega$.

Замечание: из данного определения следует, что множество Ω само является линейным пространством, поскольку для него, очевидно, выполняются все аксиомы операций в линейном пространстве.

Примеры

1°. Множество радиусов-векторов всех точек, лежащих на некоторой плоскости, проходящей через начало координат, является подпространством во множестве радиусов-векторов всех точек трехмерного геометрического пространства.

2°. Множество всех многочленов степени не выше, чем n, есть подпространство в линейном пространстве непрерывных на $[\alpha, \beta]$ функций.

3°. В пространстве n-мерных столбцов совокупность решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными и с основной матрицей ранга r образует подпространство размерности $n-r$.

4°. Подпространством любого линейного пространства будет:

а) само линейное пространство;

б) множество, состоящее из одного нулевого элемента.

Определение

Пусть даны два подпространства Ω_1 и Ω_2 линейного пространства Λ. Тогда

1°. *Суммой* подпространств Ω_1 и Ω_2 называется совокупность всех элементов $x_1 + x_2 \in \Lambda$ при условии, что $x_1 \in \Omega_1$ и $x_2 \in \Omega_2$. Сумма подпространств Ω_1 и Ω_2 обозначается $\Omega_1 + \Omega_2$.

2°. *Прямой суммой* подпространств Ω_1 и Ω_2 называется совокупность всех элементов $x_1 + x_2 \in \Lambda$ при условии, что $x_1 \in \Omega_1$ и $x_2 \in \Omega_2$ и $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{o\}$. Прямая сумма обозначается $\Omega_1 \oplus \Omega_2$.

Справедливы теоремы

Теорема 06

Как сумма, так и пересечение подпространств Ω_1 и Ω_2 в Λ суть также подпространства в Λ.

Теорема 07

Размерность *суммы* подпространств Ω_1 и Ω_2 равна

$$\dim(\Omega_1 + \Omega_2) = \dim(\Omega_1) + \dim(\Omega_2) - \dim(\Omega_1 \cap \Omega_2).$$

Линейная оболочка системы элементов

Определение Совокупность всевозможных линейных комбинаций некоторого множества элементов $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ линейного пространства Λ называется *линейной оболочкой* этого множества и обозначается $L\{x_1, x_2, ..., x_k\}$.

Пример Множество многочленов степени не выше, чем n, является линейной оболочкой набора одночленов $\{1, \tau, \tau^2, ..., \tau^n\}$ в линейном пространстве непрерывных на $[\alpha, \beta]$ функций.

Пусть задан набор элементов $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \in \Lambda$, порождающих линейную оболочку $L\{x_1, x_2, ..., x_k\}$, тогда любой элемент этой линейной оболочки имеет вид $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ и справедлива

Теорема 08 **Множество всех элементов, принадлежащих линейной оболочке $L\{x_1, x_2, ..., x_k\}$, является в Λ подпространством размерности m, где m – максимальное число линейно независимых элементов в наборе $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$.**

Гиперплоскость

Определение

Множество Γ, образованное из элементов вида $x + x_0$, где x_0 есть произвольный фиксированный элемент линейного пространства Λ, а x – любой элемент некоторого подпространства $\Omega \subset \Lambda$, называется *гиперплоскостью* (или *линейным многообразием*) в линейном пространстве Λ.

Замечания.

1°. В общем случае гиперплоскость не является подпространством.
2°. Если $\dim(\Omega) = k$, то говорят о k-мерной гиперплоскости.

Например, общее решение совместной *неоднородной* системы линейных уравнений с n неизвестными является гиперплоскостью в линейном пространстве n-компонентных столбцов.

Координатное представление элементов линейного пространства

Определение	Коэффициенты $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ разложения по базису $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i g_i$ называются *координатами* (или *компонентами*) элемента $x \in \Lambda^n$ в базисе $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$.

Заметим, что в силу теоремы 05 элемент x линейного пространства Λ^n в базисе $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ однозначно представляется n-компонентным столбцом, называемым *координатным представлением элемента* x *в базисе* $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$: $\|x\|_g = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ ... \\ \xi_n \end{Vmatrix}$.

Выясним, как операции с элементами линейного пространства выполняются в координатной форме.

Пусть в конкретном базисе $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i$ и $y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i g_i$, тогда в силу определения базиса и аксиом линейного пространства будут справедливы следующие соотношения:

1°. Для операции сравнения: два элемента в Λ^n равны тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i = x = y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i g_i$, или в координатной форме $x = y \quad \Leftrightarrow \quad \| x \|_g = \| y \|_g$.

2°. Для операции сложения: $x + y = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i + \eta_i) g_i$, или в координатной форме $\| x + y \|_g = \| x \|_g + \| y \|_g$.

3°. Для операции умножения на число: $\lambda x = \lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \xi_i) g_i$, или в координатной форме $\| \lambda x \|_g = \lambda \| x \|_g$.

Откуда следует, что *элементы конечномерного линейного пространства не только могут представляться матрицами* (*столбцами*), *но и правила выполнения операций с этими элементами совпадают с определением соответствующих матричных операций*.

Докажем правило сложения векторов в координатной форме.

$$\| x+y \|_g = \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i + \sum_{i=1}^{n} \eta_i g_i \right\|_g =$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} (\xi_i + \eta_i)\, g_i \right\|_g =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \xi_2 + \eta_2 \\ \ldots \\ \xi_n + \eta_n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \ldots \\ \eta_n \end{matrix} \right\| = \| x \|_g + \| y \|_g .$$

В Λ^n базис может быть выбран не единственным способом и потому необходимо установить правило изменения координат элемента линейного пространства Λ^n при переходе от одного базиса к другому.

Пусть в Λ^n даны два базиса: “старый” $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ и “новый” $\{g'_1, g'_2, \ldots, g'_n\}$ с соответствующими координатными разложениями элемента x: $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i g_i$ и $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi'_i g'_i$. И пусть, кроме того, известны разложения элементов “нового” базиса по элементам “старого”: $g'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{ij} g_i$; $j = [1, n]$.

Определение Матрица $\|S\|$, j-й $(\forall j = [1, n])$ столбец которой состоит из коэффициентов σ_{ij} координатных разложений элементов “нового” базиса по элементам “старого”, называется *матрицей перехода* от базиса $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \ldots, g'_n\}$.

В этом случае будет справедлива

Теорема **Координаты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n$ связаны соотношениями $\xi_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \xi'_j \quad \forall i = [1, n]$, называемыми *формулами перехода*, где коэффициенты σ_{ij} – элементы матрицы перехода $\|S\|$.**

Заметим, что если столбец *элементов* "нового" базиса выражается через столбец элементов "старого" при помощи умножения слева на транспонированную матрицу перехода $\|S\|^{\mathrm{T}}$, то *координатный* столбец в "старом" базисе равен произведению матрицы перехода на координатный столбец в "новом" базисе.

Действительно, рассматривая столбцы $\|x\|_g$ и $\|x\|_{g'}$ в формулах перехода как *двумерные* матрицы, получаем формулу $\xi_{i1} = \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \xi'_{j1} \quad \forall i = [1, n]$, которую можно записать в матричном виде $\|x\|_g = \|S\| \|x\|_{g'}$.

Можно также написать формулы *обратного перехода* (то есть от "нового" базиса к "старому")

$$\|x\|_{g'} = \|S\|^{-1} \|x\|_g \quad \text{или, в координатах,} \quad \xi'_{i1} = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} \xi_{j1} \quad \forall i = [1, n] ,$$

где τ_{ij} – элементы матрицы $\|T\| = \|S\|^{-1}$, называемой матрицей *обратного перехода*. Заметим, что матрица $\|T\|$, существует для любой матрицы перехода $\|S\|$, , поскольку последняя не вырождена.

ЗАМЕЧАНИЕ

Условия задач нередко содержат исходную информацию, например, в следующем координатном виде:

$$\textit{Пусть дан элемент пространства } \Lambda^4 \quad \left\| \begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{matrix} \right\| \ \ldots$$

без явного указания, в каком базисе используется это координатное представление.

В этом случае *по умолчанию* предполагается, что этот базис "*стандартный*", то есть образован набором элементов вида. $\left\{ \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| \right\}$, поскольку *в любом* базисе $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ справедливы равенства

$$\begin{cases} g_1 = 1 \cdot g_1 + 0 \cdot g_2 + 0 \cdot g_3 + 0 \cdot g_4 \,, \\ g_2 = 0 \cdot g_1 + 1 \cdot g_2 + 0 \cdot g_3 + 0 \cdot g_4 \\ g_3 = 0 \cdot g_1 + 0 \cdot g_2 + 1 \cdot g_3 + 0 \cdot g_4 \\ g_4 = 0 \cdot g_1 + 0 \cdot g_2 + 0 \cdot g_3 + 1 \cdot g_4 \end{cases}$$

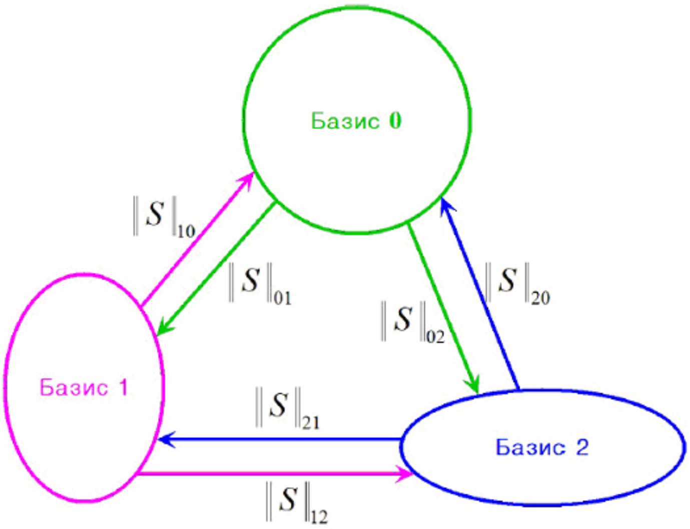
и необходимости в конкретизации базиса $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ нет.

<table>
<tr>
<td>Задача 2.04</td>
<td>

Найти матрицу перехода от базиса в Λ^3, *образованного элементами* $\{g'_1, g'_2, g$

базису $\{g''_1, g''_2, g''_3\}$, *если в некотором исходном базисе:*

$$\|g'_1\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \ \|g'_2\| = \left\| \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right\|, \ \|g'_3\| = \left\| \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|, \qquad \|g''_1\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\|, \ \|g''_2\| = \left\| \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| \ и \ \|g''_3\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right.$$



</td>
</tr>
</table>

Решение 1°. Пусть $\| x \|$, $\| x' \|$ и $\| x'' \|$ обозначают координатные столбцы элемента x в трех базисах: *исходном*, $\{ g'_1 , g'_2 , g'_3 \}$ и $\{ g''_1 , g''_2 , g''_3 \}$. Тогда, согласно определению матрицы перехода, имеют место равенства

$$\| x \| = \| S_{01} \| \| x' \| \quad \text{и} \quad \| x \| = \| S_{02} \| \| x'' \| ,$$

где столбцы в матрицах $\| S_{01} \|$ и $\| S_{02} \|$ суть координатные столбцы базисных элементов $\{ g'_1 , g'_2 , g'_3 \}$ и $\{ g''_1 , g''_2 , g''_3 \}$, то есть

$$\| S_{01} \| = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| \quad \text{и} \quad \| S_{02} \| = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| ,$$

Обозначим через $\| S_{12} \|$ искомую матрицу перехода от базиса $\{ g'_1 , g'_2 , g'_3 \}$ к базису $\{ g''_1 , g''_2 , g''_3 \}$, для которой $\| x' \| = \| S_{12} \| \| x'' \|$.

2°. Но из условий $\| x \| = \| S_{01} \| \| x' \|$ и $\| x \| = \| S_{02} \| \| x'' \|$ следует, что $\| x' \| = \| S_{01} \|^{-1} \| S_{02} \| \| x'' \|$, поскольку матрица $\| S_{01} \|$ очевидно невырожденная.

Тогда $\| S_{12} \| \| x'' \| = \| S_{01} \|^{-1} \| S_{02} \| \| x'' \|$ для *любого* элемента $\| x'' \|$, а это означает, что искомая матрица перехода $\| S_{12} \| = \| S_{01} \|^{-1} \| S_{02} \|$.

Для подсчета произведения

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

рекомендуется использовать схему вычисления выражения вида $\| A \|^{-1} \| B \|$, заключающуюся в следующем.

> Мы строим расширенную матрицу $\| A \mid B \|$, *левую* часть которой приводим к *единичной* некоторыми элементарными преобразованиями.
> В этом случае применение *тех же* преобразований к *правой* части расширенной матрицы превращает правую часть в искомое произведение $\| A \|^{-1} \| B \|$.

Действительно, пусть $\| S \| \| A \| = \| E \|$, тогда $\| S \| = \| A \|^{-1}$. Значит, $\| S \| \| B \| = \| A \|^{-1} \| B \|$.

3°. Опишем возможный ход вычислений, выполняемых *одновременно* в правой и левой частях расширенной матрицы.

Из первой строки расширенной матрицы $\| S_{01} \mid S_{02} \|$ вычитаем вторую и результат помещаем на место второй:

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\|$$

Затем складываем вторую и третью строки, записывая результат во вторую

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\|.$$

Потом из третьей строки вычитаем вторую и записываем результат на место третьей

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\|$$

Наконец, сумму всех трех строк записываем на место первой

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\|$$

В правой части получили искомую матрицу $\| S_{12} \| = \left\| \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right\|$. Это - ответ!

Решение получено

Изоморфизм линейных пространств

Рассмотрим в качестве примера два линейных пространства:

множество многочленов $P_2(\tau)$ степени не выше, чем 2, и
множество векторов трехмерного геометрического пространства.

Операции сложения многочленов и их умножения на число выглядят следующим образом:

$$(\xi_1+\xi_2\tau+\xi_3\tau^2)+(\eta_1+\eta_2\tau+\eta_3\tau^2)=$$
$$=(\xi_1+\eta_1)+(\xi_2+\eta_2)\tau+(\xi_3+\eta_3)\tau^2,$$
$$\lambda(\xi_1+\xi_2\tau+\xi_3\tau^2)=(\lambda\xi_1)+(\lambda\xi_2)\tau+(\lambda\xi_3)\tau^2.$$

Те же операции с трехмерными векторами в координатной форме в свою очередь записываются так:

$$\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\xi_1+\eta_1\\ \xi_2+\eta_2\\ \xi_3+\eta_3\end{Vmatrix};\quad \lambda\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\lambda\xi_1\\ \lambda\xi_2\\ \lambda\xi_3\end{Vmatrix}.$$

Сопоставляя эти записи, можно заключить, что природа данных множеств не играет роли, когда исследуются их характеристики, связанные только с операциями сравнения, сложения и умножения на число.

Отмеченное свойство линейных пространств носит название *изоморфизма*. Более точно его описывает

Определение

Два линейных пространства Λ_1 и Λ_2 называются *изоморфными*, если существует *взаимно однозначное* отображение $\hat{F}$: $\Lambda_1 \to \Lambda_2$, такое, что для $\forall\lambda$ и $\forall x, y \in \Lambda_1$,

1°. $\hat{F}(x+y) = \hat{F}x + \hat{F}y$;

2°. $\hat{F}(\lambda x) = \lambda \hat{F}x.$

Отображение $\hat{F}$ называется *изоморфизмом* линейных пространств Λ_1 и Λ_2.

Теорема (об изоморфизме).

Два линейных конечномерных пространства Λ_1 и Λ_2 изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.

Пример *Изоморфизм одномерных пространств вещественных чисел R и всех положительных чисел R^+ (с операциями, определенными в условии задачи 03) задается при помощи функций $x = \ln(y)$ и $y = e^x$; $x \in R$; $y \in R^+$.*

Очевидным следствием данной теоремы является изоморфизм любого линейного n-мерного пространства Λ^n и линейного пространства n-компонентных столбцов.

Например, имеют место

Теорема **Максимальное число линейно независимых элементов в любом конечном наборе элементов из Λ^n равно рангу матрицы, столбцы которой содержат координаты элементов данного набора в некотором базисе.**

Следствие **k элементов в Λ^n линейно зависимы тогда и только тогда, когда ранг матрицы, столбцы которой содержат координаты этих элементов в некотором базисе, меньше, чем $\min\{n,k\}$.**

Пусть в Λ^n задан базис $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, в котором координатное представление элементов представляется в виде $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i$. Тогда имеет место

Следствие **Каждая *однородная* линейная система m линейных уравнений с n неизвестными $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \xi_i = 0$, $j = [1, m]$ определяет некоторое подпространство Ω в Λ^n.**

Таким образом, каждое подпространство в Λ^n может быть задано либо однородной системой линейных уравнений, либо как линейная оболочка базиса подпространства – фундаментальной системы ее решений.

Задача 2.04а *Найти матрицу перехода от базиса в* Λ^3, *образованного элементами* $\{g_1', g_2', g_3'\}$, *к базису* $\{g_1'', g_2'', g_3''\}$, *если в некотором исходном базисе*:

$$\|g_1'\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix},\ \|g_2'\| = \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix},\ \|g_3'\| = \begin{Vmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \qquad \|g_1''\| = \begin{Vmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{Vmatrix},\ \|g_2''\| = \begin{Vmatrix} 16 \\ 5 \\ 6 \end{Vmatrix}\ и\ \|g_3''\| = \begin{Vmatrix} 22 \\ 7 \\ 8 \end{Vmatrix}.$$

Решение.

1°. Пусть $\|x\|$, $\|x'\|$ и $\|x''\|$ обозначают координатные столбцы элемента x в трех базисах: исходном, и $\{g_1', g_2', g_3'\}$ $\{g_1'', g_2'', g_3''\}$ соответственно. Тогда (по определению 7.4.2 и в силу теоремы 7.4.1) имеют место равенства

$$\|x\| = \|G\|\|x'\| \quad и \quad \|x\| = \|F\|\|x''\|,$$

где матрицы $\|G\|$ и $\|F\|$ составлены из координатных столбцов базисных элементов $\{g_1', g_2', g_3'\}$ и $\{g_1'', g_2'', g_3''\}$, то есть

$$\|G\| = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad и \quad \|F\| = \begin{Vmatrix} 7 & 16 & 22 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 8 \end{Vmatrix}.$$

Обозначим через $\|S\|$ матрицу перехода от базиса $\{g_1', g_2', g_3'\}$ к базису $\{g_1'', g_2'', g_3''\}$, для которой $\|x'\| = \|S\|\|x''\|$. Но из условий $\|x\| = \|G\|\|x'\|$ и $\|x\| = \|F\|\|x''\|$ следует, что $\|x'\| = \|G\|^{-1}\|F\|\|x''\|$, поскольку матрица $\|G\|$, очевидно, невырожденная.

Тогда $\|S\|\|x''\| = \|G\|^{-1}\|F\|\|x''\|$ для любого элемента $\|x''\|$, а это означает, что искомая матрица перехода $\|S\| = \|G\|^{-1}\|F\|$.

2°. Подсчитав произведение

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} 7 & 16 & 22 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 8 \end{Vmatrix}$$

используя, например, известную схему, для выражений вида $\|G\|^{-1}\|F\|$, получаем $\|S\| = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$.

Решение получено

Задача 2.05 *В линейном пространстве многочленов степени не выше, чем 3, найти базис и размерность пересечения двух линейных оболочек элементов:*

$$\begin{aligned} x_1(\tau) &= 1+2\tau+\tau^2+3\tau^3, \\ x_2(\tau) &= -1+8\tau-6\tau^2+5\tau^3, \\ x_3(\tau) &= 10\tau-5\tau^2+8\tau^3 \end{aligned}$$

$$и \quad \begin{aligned} y_1(\tau) &= 1+4\tau-\tau^2+5\tau^3, \\ y_2(\tau) &= 3-2\tau+6\tau^2+3\tau^3, \\ y_3(\tau) &= 4+2\tau+5\tau^2+8\tau^3. \end{aligned}$$

Решение.

1°. Каждая из линейных оболочек является подпространством. Первое из них Π_1 образовано элементами вида $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$, а второе Π_2 – соответственно элементами

$$y = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3 .$$

Составим однородные системы линейных уравнений, задающих эти подпространства. Пусть каждое из уравнений этих систем имеет вид

$$\left\| \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{matrix} \right\| = 0 .$$

Тогда, воспользовавшись изоморфизмом между Π_1 и пространством четырехкомпонентных столбцов вида

$$\left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{matrix} \right\| = \lambda_1 \left\| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \right\| + \lambda_2 \left\| \begin{matrix} -1 \\ 8 \\ -6 \\ 5 \end{matrix} \right\| + \lambda_3 \left\| \begin{matrix} 0 \\ 10 \\ -5 \\ 8 \end{matrix} \right\| ,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – любые числа, приходим к условию

$$\left\| \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{matrix} \right\| = \left\| \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \right\| (\lambda_1 \left\| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \right\| + \lambda_2 \left\| \begin{matrix} -1 \\ 8 \\ -6 \\ 5 \end{matrix} \right\| + \lambda_3 \left\| \begin{matrix} 0 \\ 10 \\ -5 \\ 8 \end{matrix} \right\|) = 0 ,$$

которое будет выполняться при любых $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, если числа $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ образуют решение следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+3\alpha_4=0, \\ -\alpha_1+8\alpha_2-6\alpha_3+5\alpha_4=0, \\ 10\alpha_2-5\alpha_3+8\alpha_4=0. \end{cases}$$

Решив эту систему, например, по схеме, описанной в § 6.8, получим общее решение в виде

$$\left\|\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{matrix}\right\| = \kappa_1 \left\|\begin{matrix}-4\\ 1\\ 2\\ 0\end{matrix}\right\| + \kappa_2 \left\|\begin{matrix}-7\\ -4\\ 0\\ 5\end{matrix}\right\| ;\ \forall \kappa_1,\kappa_2$$

откуда заключаем, что существует два независимых набора искомых чисел $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, и, следовательно, однородная система линейных уравнений, задающая подпространство Π_1 имеет вид

$$\begin{cases} -4\xi_1+\xi_2+2\xi_3 = 0, \\ -7\xi_1-4\xi_2+5\xi_4=0. \end{cases}$$

Аналогично строим однородную систему линейных уравнений, задающую Π_2:

$$\begin{cases} -22\xi_1+9\xi_2+14\xi_3 = 0, \\ -11\xi_1-6\xi_2+7\xi_4=0. \end{cases}$$

Наконец, подпространство $\Pi_1 \cap \Pi_2$ будет задаваться системой

$$\begin{cases} -4\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = 0, \\ -7\xi_1 - 4\xi_2 + 5\xi_4 = 0, \\ -22\xi_1 + 9\xi_2 + 14\xi_3 = 0, \\ -11\xi_1 - 6\xi_2 + 7\xi_4 = 0, \end{cases}$$

общее решение которой есть

$$\left\|\begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{matrix}\right\| = \sigma_1 \left\|\begin{matrix} 2 \\ -6 \\ 7 \\ -2 \end{matrix}\right\|,$$

и, следовательно, для $\Pi_1 \cap \Pi_2$ имеем $\dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) = 1$ и базис, состоящий из одного элемента $\left\|\begin{matrix} 2 \\ -6 \\ 7 \\ -2 \end{matrix}\right\|$.

Решение получено