

Линейные зависимости в линейном пространстве

Определение Пусть каждому элементу x линейного пространства Λ поставлен в соответствие единственный элемент y линейного пространства Λ^* . Тогда говорят, что в Λ задан *оператор*, действующий в Λ и имеющий значения в Λ^* , действие которого обозначается как $y = \hat{A}x$.
При этом элемент y называется *образом элемента x* , а элемент x – *прообразом элемента y* .

Операторы принято подразделять на *отображения*, если $\Lambda^* \not\subseteq \Lambda$, и *преобразования*, если $\Lambda^* \subseteq \Lambda$.

В дальнейшем, за исключением особо оговоренных случаев, будет предполагаться, что из контекста ясно, идет ли речь об отображении или о преобразовании.

Определение Оператор $y = \hat{A}x$ называется *линейным*, если для любых $x, x_1, x_2 \in \Lambda$ и любого числа λ имеют место равенства

- 1°. $\hat{A}(x_1 + x_2) = \hat{A}x_1 + \hat{A}x_2$ и
- 2°. $\hat{A}(\lambda x) = \lambda \hat{A}x$.

Примеры

1°. В пространстве 2-мерных векторов линейным оператором является правило

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

связывающее вектор-образ $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ с вектором-образом $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$.

2°. В пространстве бесконечно дифференцируемых функций линейным оператором является операция *дифференцирования*, ставящая в соответствие каждому элементу этого пространства его *производную функцию*.

3°. В пространстве *непрерывных функций* $f(\tau)$ линейным оператором является операция умножения непрерывной функции на независимую переменную τ .

Задача 01 *Является ли линейным оператор \hat{A} , ставящий каждому элементу $x \in \Lambda$ в соответствие фиксированный элемент $a \in \Lambda$?*

Решение. Если элемент $a = o$, то \hat{A} – линейный оператор. Действительно, если \hat{A} линейный, то, с одной стороны,

$$\hat{A}(\lambda a + \mu a) = \lambda \hat{A}a + \mu \hat{A}a = \lambda a + \mu a = (\lambda + \mu)a,$$

но, с другой,

$$\forall \lambda, \mu : \hat{A}(\lambda a + \mu a) = a \Rightarrow a = (\lambda + \mu)a \Rightarrow a = o.$$

Действия с линейными операторами

Определение Линейные операторы \hat{A} и \hat{B} называются *равными* (что обозначается как $\hat{A} = \hat{B}$), если

$$\forall x \in \Lambda : \hat{A}x = \hat{B}x.$$

Суммой линейных операторов \hat{A} и \hat{B} называется оператор \hat{C} , обозначаемый $\hat{A} + \hat{B}$, ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие элемент $\hat{A}x + \hat{B}x$.

Лемма **Сумма двух линейных операторов является линейным оператором.**

Определение Нулевым оператором \hat{O} называется оператор, ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие нулевой элемент этого линейного пространства.

Определение Оператором, противоположным оператору \hat{A} , называется оператор, обозначаемый $-\hat{A}$, ставящий каждому x элементу линейного пространства Λ в соответствие элемент $-(\hat{A}x)$.

Из решения задачи 01 следует, что нулевой оператор линейный. Также можно показать, что оператор противоположный любому линейному оператору также линейный.

Лемма **Для любых линейных операторов \hat{A} , \hat{B} и \hat{C} выполняются соотношения**

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{A};$$
$$(\hat{A} + \hat{B}) + \hat{C} = \hat{A} + (\hat{B} + \hat{C});$$
$$\hat{A} + \hat{O} = \hat{A}; \hat{A} + (-\hat{A}) = \hat{O}.$$

Определение *Произведением числа λ на линейный оператор \hat{A} называется оператор, обозначаемый $\lambda\hat{A}$, ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие элемент $\lambda(\hat{A}x)$.*

Лемма **Произведение числа на линейный оператор является линейным оператором, для которого выполняются соотношения**

$$\alpha(\beta\hat{A}) = (\alpha\beta)\hat{A}; \quad 1\hat{A} = \hat{A};$$
$$(\alpha + \beta)\hat{A} = \alpha\hat{A} + \beta\hat{A};$$
$$\alpha(\hat{A} + \hat{B}) = \alpha\hat{A} + \alpha\hat{B}.$$

Теорема **Множество всех линейных операторов, действующих в линейном пространстве Λ , является линейным пространством.**

Определение Произведением линейных операторов \hat{A} и \hat{B} называется оператор, обозначаемый $\hat{A}\hat{B}$, ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие элемент $\hat{A}(\hat{B}x)$.

Теорема Произведение линейных операторов является линейным оператором, для которого справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\hat{A}(\hat{B}\hat{C}) &= (\hat{A}\hat{B})\hat{C}; \quad \hat{A}(\hat{B} + \hat{C}) = \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}; \\ (\hat{A} + \hat{B})\hat{C} &= \hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{C}.\end{aligned}$$

В общем случае произведение линейных операторов не обладает *перестановочным свойством* (или, иначе говоря, *операторы не коммутируют*), то есть $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$.

Определение Оператор $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ называется *коммутатором* операторов \hat{A} и \hat{B} .

Коммутатор коммутирующих операторов есть *нулевой* оператор.

Задача 04 В линейном пространстве алгебраических многочленов $P_n(\tau) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k$ найти коммутатор для операторов: \hat{A} , ставящего в соответствие многочлену его производную функцию, и \hat{B} – оператора умножения многочлена на независимую переменную.

Решение. Построим оператор $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$. Для любого $P_n(\tau)$ имеем

$$\hat{A}P_n(\tau) = \frac{d}{d\tau} P_n(\tau) = \frac{d}{d\tau} \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k \right) = \sum_{k=1}^n k \alpha_k \tau^{k-1},$$

$$\hat{B}P_n(\tau) = \tau \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k \right) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^{k+1}.$$

Откуда получаем

$$\hat{B}(\hat{A}P_n(\tau)) = \tau \left(\sum_{k=1}^n k \alpha_k \tau^{k-1} \right) = \sum_{k=1}^n k \alpha_k \tau^k = \sum_{k=0}^n k \alpha_k \tau^k,$$

$$\hat{A}(\hat{B}P_n(\tau)) = \frac{d}{d\tau} \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^{k+1} \right) = \sum_{k=0}^n (k+1) \alpha_k \tau^k,$$

$$\begin{aligned} (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})P_n(\tau) &= \left(\sum_{k=0}^n (k+1) \alpha_k \tau^k \right) - \left(\sum_{k=0}^n k \alpha_k \tau^k \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k = P_n(\tau). \end{aligned}$$

Следовательно, данные линейные операторы не коммутируют.

В задаче 04 оказалось, что действие оператора $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ на любой элемент линейного пространства многочленов не приводит к изменению этого элемента. Введем для такого оператора специальное наименование.

Определение	<p>Оператор \hat{E} называется <i>единичным</i> (или <i>тождественным</i>) оператором, если каждому элементу x линейного пространства Λ он ставит в соответствие тот же самый элемент, то есть</p> $\hat{E}x = x \quad \forall x \in \Lambda.$
-------------	---

Имеют место соотношения: $\hat{A}\hat{E} = \hat{E}\hat{A} = \hat{A} \quad \forall \hat{A}$, а также линейность и единственность \hat{E} .

Определение	<p>Оператор \hat{B} называется <i>обратным</i> для линейного оператора \hat{A} (который обозначается как \hat{A}^{-1}), если $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = \hat{E}$.</p>
-------------	---

Пример	<p>В линейном пространстве функций $f(\tau)$, имеющих на $[\alpha, \beta]$ производную любого порядка и удовлетворяющих условиям $f^{(k)}(\alpha) = 0; k = 0, 1, 2, \dots$, оператор дифференцирования $\hat{A}f = \frac{df}{d\tau}$ и $\hat{B}f = \int_{\alpha}^{\tau} f(\sigma)d\sigma$ – оператор интегрирования с переменным верхним пределом являются взаимно обратными.</p>
--------	--

Действительно,

$$\hat{A}\hat{B}f = \frac{d}{d\tau} \int_{\alpha}^{\tau} f(\sigma)d\sigma = f(\tau) = \hat{E}f \quad \text{и} \quad \hat{B}\hat{A}f = \int_{\alpha}^{\tau} \frac{df}{d\sigma} d\sigma = f(\tau) - f(a) = f(\tau) = \hat{E}f.$$

Замечания.

1°. Не для всякого линейного оператора существует обратный оператор. Например, нулевой оператор \hat{O} не имеет обратного. Действительно, пусть $\hat{O}x = o$ при всех $\forall x \in \Lambda$, тогда для любого \hat{B} имеет место

$$(\hat{B}\hat{O})x = \hat{B}(\hat{O}x) = o \quad \forall x \in \Lambda,$$

и, следовательно, равенство $\hat{B}\hat{O} = \hat{E}$ не выполняется ни при каком \hat{B} .

2°. Обратный оператор, если существует, то только единственный.

3°. В случае бесконечномерного линейного пространства из справедливости условия $\hat{A}\hat{B} = \hat{E}$ может не следовать выполнение условия $\hat{B}\hat{A} = \hat{E}$.

Это имеет место, например, в пространстве многочленов

$$P_n(\tau) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k$$

для пары операторов \hat{A} и \hat{B} , где \hat{B} есть оператор умножения многочлена на независимую переменную, а оператор \hat{A} многочлену $\sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k$ ставит в

соответствие многочлен $\sum_{k=1}^n \alpha_k \tau^{k-1}$.

Координатное представление линейных операторов

Пусть в Λ^n заданы базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и линейный оператор \hat{A} являющийся *отображением* из Λ^n в Λ^m с базисом $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$.

Известно, что $\forall x \in \Lambda^n$ существует единственное разложение

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i, \quad \text{то есть} \quad \|x\|_g = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Аналогично в Λ^m существует единственное разложение $y = \hat{A}x$, для которого в силу линейности \hat{A} справедливо представление вида

$$y = \hat{A}x = \hat{A} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i g_i \right) = \sum_{i=1}^n \xi_i \hat{A}g_i.$$

Приняв во внимание возможность и единственность в пространстве Λ^m разложения вида $\hat{A}g_i = \sum_{k=1}^m \alpha_{ki} f_k \quad \forall i = [1, n]$, получаем, что

$$y = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \xi_i \right) f_k.$$

С другой стороны, если $\|y\|_f = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_m \end{pmatrix}$ – координатное представление y в Λ^m , то имеет место ра-

венство $y = \sum_{k=1}^m \eta_k f_k$. Наконец, в силу единственности разложения элемента конечномерного пространства по базису получаем

$$\eta_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \xi_i ; k = [1, m].$$

Данные соотношения позволяют находить координатное представление образов элементов линейного пространства по координатному представлению прообраза. При этом отметим, что каждый линейный оператор вида $\hat{A}: \Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$ в паре конкретных базисов полностью и однозначно описывается матрицей размера $m \times n$ с элементами α_{ki} .

Определение Матрица размера $m \times n$, столбцы которой образованы компонентами элементов $\hat{A}g_i$:

$$\| \hat{A} \|_{fg} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

называется матрицей линейного оператора \hat{A} в базисах

$$\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \in \Lambda^n \quad \text{и} \quad \{f_1, f_2, \dots, f_m\} \in \Lambda^m.$$

В матричной форме соотношения $\eta_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \xi_i$; $k = [1, m]$ имеют вид $\|y\|_f = \|\hat{A}\|_{fg} \|x\|_g$, в чем легко убедиться, воспользовавшись их двухиндексной формой записи:

$$\eta_{k1} = \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \xi_{i1}; \quad k = [1, m].$$

Полученный результат формулируется как

Теорема **Между множеством всех линейных операторов вида $\hat{A}: \Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$ и множеством всех матриц размера $m \times n$ имеется взаимно однозначное соответствие.**

Задача 05. В линейном пространстве алгебраических многочленов степени не выше, чем n , вида $P_m(\tau) = \sum_{k=0}^m \xi_k \tau^k$ с базисом $\{1, \tau, \tau^2, \dots, \tau^n\}$ найти матрицу оператора дифференцирования $\hat{D} = \frac{d}{d\tau}$ по переменной τ .

Решение: 1) Размерность линейного пространства алгебраических многочленов степени не выше, чем n равна $n+1$. А действующий в этом пространстве оператор дифференцирования является линейным преобразованием.

2) Образом базисного элемента τ^k при действии оператора дифференцирования для $1 \leq k \leq n$ будет функция $k\tau^{k-1}$, а для $k=0$ - многочлен, равный 0 при $\forall \tau$.

3) По определению столбцами матрицы оператора являются *координатные столбцы* образов базисных элементов. А для образа $k+1$ -го базисного элемента *координатное разложение* имеет вид

$$k\tau^{k-1} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot \tau + \dots + k \cdot \tau^{k-1} + 0 \cdot \tau^k + \dots + 0 \cdot \tau^n.$$

Поэтому искомая матрица будет

$$\|\hat{D}\| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Задача 06. В линейном пространстве квадратных матриц второго порядка

$X = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix}$ задано преобразование \hat{M} формулой $Y = \hat{M} X \equiv A X$,

где $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$, а матрица Y есть образ матрицы X при данном преобразовании.

Требуется найти матрицу этого преобразования в стандартном базисе $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, для которого

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

1) Имеем: размерность линейного пространства квадратных матриц второго порядка равна 4, а линейность данного преобразования следует из свойства дистрибутивности умножения матриц:

$$\|A\|(\lambda_1 \|X\|_1 + \lambda_2 \|X\|_2) = \lambda_1 \|A\| \|X\|_1 + \lambda_2 \|A\| \|X\|_2 = \lambda_1 \|Y\|_1 + \lambda_2 \|Y\|_2$$

2) Координатное представление (координатный столбец) элемента в линейном пространстве квадратных матриц второго порядка вида

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix} \text{ есть 4-х компонентный столбец } \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \\ \xi_{21} \\ \xi_{22} \end{pmatrix}. \text{ Координатное пред-}$$

ставление линейного преобразования в этом пространстве будет квадратной матрицей 4-го порядка, столбцы которой суть координатные представления образов базисных элементов.

3) Найдем эти представления. Имеем

$$\begin{aligned} \hat{M}e_1 &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \|\hat{M}e_1\| = \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \hat{M}e_2 &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} \Rightarrow \|\hat{M}e_2\| = \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -6 \end{vmatrix} \\ \hat{M}e_3 &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \|\hat{M}e_3\| = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \hat{M}e_4 &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \|\hat{M}e_4\| = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -7 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

4) Из полученных координатных представлений образов базисных элементов составляем искомую матрицу преобразования \hat{M}

$$\|\hat{M}\|_e = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

Действия с линейными операторами в координатной (матричной) форме

Будем рассматривать далее операторы вида $\hat{A}: \Lambda^n \rightarrow \Lambda^n$, то есть линейные преобразования, действующие в Λ^n с базисом $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, матрица которых квадратная, порядка n . Введенные ранее операции с матрицами позволяют описать в конкретном базисе действия с линейными операторами в следующей форме.

1°. Сравнение операторов: $\hat{A} = \hat{B} \Leftrightarrow \|\hat{A}\|_g = \|\hat{B}\|_g.$

2°. Сложение операторов: $\|\hat{A} + \hat{B}\|_g = \|\hat{A}\|_g + \|\hat{B}\|_g.$

3°. Умножение оператора на число: $\|\lambda \hat{A}\|_g = \lambda \|\hat{A}\|_g.$

4°. Произведение операторов: $\|\hat{A}\hat{B}\|_g = \|\hat{A}\|_g \|\hat{B}\|_g.$

5°. Обращение операторов: $\|\hat{A}^{-1}\|_g = \|\hat{A}\|_g^{-1}.$

Следствие

Размерность линейного пространства линейных отображений вида $\Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$ равна $m \times n$.

Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса

Выясним, как меняется $\|\hat{A}\|_{fg}$ – матрица линейного отображения $\hat{A}: \Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$ при замене базисов. Пусть в Λ^n даны два базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$, связанные матрицей перехода $\|G\|$, а в Λ^m – два базиса $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ и $\{f'_1, f'_2, \dots, f'_m\}$ с матрицей перехода $\|F\|$. Найдем соотношение, связывающее $\|\hat{A}\|_{fg}$ и $\|\hat{A}\|_{f'g'}$.

В этом случае справедлива

Теорема **Матрица линейного оператора $\|\hat{A}\|_{f'g'}$ в базисах $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ и $\{f'_1, f'_2, \dots, f'_m\}$ связана с матрицей этого же оператора $\|\hat{A}\|_{fg}$ в базисах $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ соотношением**

$$\|\hat{A}\|_{f'g'} = \|F\|^{-1} \|\hat{A}\|_{fg} \|G\|.$$

Следствия **Матрица линейного преобразования при переходе от базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ в Λ^n изменяется по правилу**

$$\|\hat{A}\|_{g'} = \|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_g \|S\|.$$

Определитель матрицы линейного преобразования не зависит от выбора базиса в Λ^n .

Действительно из $\det \|\hat{A}\|_{g'} = \det (\|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_g \|S\|)$, силу

$$\det (\|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_g \|S\|) = (\det \|S\|^{-1})(\det \|\hat{A}\|_g)(\det \|S\|) \quad \text{и} \quad \det \|S\|^{-1} = \frac{1}{\det \|S\|}, \text{ где } \det \|S\| \neq 0,$$

получаем, что $\det \|\hat{A}\|_{g'} = \det \|\hat{A}\|_g$.

Область значений и ядро линейного оператора

Трактуя линейный оператор, действующий в линейном пространстве как некоторое обобщение понятия функции, естественно рассмотреть вопрос об области определения и области значений линейных операторов.

Под *областью значений линейного оператора* \hat{A} будем понимать множество образов всех элементов $x \in \Lambda$, то есть элементов вида $\hat{A}x$. В этом случае очевидно, что для любого линейного оператора его область определения совпадает с Λ .

Ответ на вопрос: “Что представляет собой область значений линейного оператора?” дает

Теорема Пусть \hat{A} – линейный оператор, действующий в линейном пространстве Λ .
Тогда

1°. Множество элементов $\hat{A}x \forall x \in \Lambda$ есть подпространство в Λ .

2°. Если, кроме того, $\Lambda = \Lambda^n$ с базисом $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, то размерность этого подпространства равна $\text{rg} \|\hat{A}\|_g$.

Следствие **Размерность области значений линейного оператора \hat{A} , действующего на некотором подпространстве линейного пространства $\Lambda^* \subseteq \Lambda$, не превосходит $\dim(\Lambda^*)$.**

Другой важной характеристикой линейного оператора является совокупность элементов линейного пространства Λ , называемая *ядром* линейного оператора и обозначаемая $\ker \hat{A}$.

⁴ **Определение** *Ядро* линейного оператора \hat{A} состоит из элементов $x \in \Lambda$, таких, что $\hat{A}x = o$.

Теорема **Если $\Lambda = \Lambda^n$ и $\text{rg} \hat{A} = r$, то $\ker \hat{A}$ есть подпространство и $\dim(\ker \hat{A}) = n - r$.**

Задача 07. Пусть в базисах $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \Lambda^4$ и

$\left\{ g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \Lambda^3$ матрица линейного отображения

$$\Lambda^4 \xrightarrow{\hat{A}} \Lambda^3 \text{ имеет вид } \|\hat{A}\|_{ge} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти *базисы* как в *ядре*, так и в *области значений* данного линейного отображения \hat{A} .

Решение: 1) По определению ядром линейного оператора \hat{A} является совокупность всех элементов $x \in \Lambda$ таких, что $\hat{A}x = o$. Причем в конечномерном пространстве это уравнение может быть записано в матричном виде $\|\hat{A}\|x\| = \|o\|$, который для решаемой задачи будет

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 - 3\xi_2 + \xi_4 = 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 = 0, \\ -2\xi_2 - \xi_3 + 2\xi_4 = 0. \end{cases}$$

Общее решение последней однородной системы линейных уравнений имеет вид

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2$$

и является *описанием ядра*, отображения, заданного в условии задачи.

Как известно, это ядро есть линейное пространство. Базисом в ядре в этом случае может служить фундаментальная система решений, например, пара элементов

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2) Множество значений линейного отображения согласно определению имеет вид $y = \hat{A}x \quad \forall x \in \Lambda$. В конечномерном случае это равенство принимает вид $\|y\| = \|\hat{A}\|x\|$, что для решаемой задачи приводит к системе линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 - 3\xi_2 + \xi_4 = \eta_1, \\ -\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 = \eta_2, \\ -2\xi_2 - \xi_3 + 2\xi_4 = \eta_3. \end{cases} \quad (\text{I})$$

Здесь $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$ - координатное представление произвольного элемента $y \in \Lambda^3$.

Теперь заметим, что множеством значений преобразования \hat{A} является совокупность всех тех $y \in \Lambda^3$, для которых система (I) совместна. Эту совокупность найдем, используя теорему Кронекера-Капелли.

Предварительно приведем последовательными элементарными преобразованиями расширенную матрицу системы (I) к упрощенному виду. Для этого достаточно из третьей строки вычесть сумму первых двух и записать результат на место третьей. Получим

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 & \eta_1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \eta_2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & \eta_3 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 & \eta_1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 \end{array} \right\|$$

Поскольку элементарные преобразования не меняют рангов матриц, то очевидно, что ранг основной матрицы системы (I) будет равен рангу расширенной, если $-\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 = 0$. А это по теореме Кронекера_Капелли означает совместность системы (I).

Последнее равенство задает искомое множество значений линейного оператора \hat{A} . Его можно рассматривать как однородную систему, состоящую из одного уравнения с тремя неизвестными, общее решение которой имеет вид

$$\left\| \begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{array} \right\| = \mu_1 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right\| + \mu_2 \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\| \quad \forall \mu_1, \mu_2.$$

Ее фундаментальную систему решений (например, столбцы $\left\| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right\|$ и $\left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\|$) можно принять за базис во множестве значений линейного отображения \hat{A} .

При решении задач следует учитывать, что в конечномерном случае при выбранном базисе матрица линейного оператора существует и единственна. Поэтому для ее построения можно использовать *любой* метод, вплоть до подбора.

Например, пусть в Λ^4 линейное преобразование \hat{A} переводит четыре линейно независимых элемента $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ соответственно в четыре элемента $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

И пусть столбцами матрицы $\|X\|$ являются координатные представления элементов $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ в некотором (например, стандартном) базисе, а столбцами матрицы $\|Y\|$ – координатные представления элементов $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

Тогда, исходя из определения произведения матриц, можно показать, что в этом базисе матрица преобразования $\|\hat{A}\|$ должна удовлетворять равенствам

$$\|Y\| = \|\hat{A}\| \|X\| \quad \text{или} \quad \|\hat{A}\| = \|Y\| \|X\|^{-1}.$$

Произведение $\|Y\| \|X\|^{-1}$ удобно вычислять по следующей схеме:

- 1) Составляем объединенную матрицу $\|Y|X\|$.
- 2) Правую подматрицу некоторым набором элементарных преобразований приводим к единичной.
- 3) Левую подматрицу изменяем тем же набором элементарных преобразований.

Тогда на месте левой подматрицы оказывается искомое произведение $\|\hat{A}\| = \|Y\| \|X\|^{-1}$.

Виды линейных отображений

Как уже было отмечено, в тех случаях, когда область значений оператора не принадлежит области определения, следует говорить об отображении. Для отображений также выделяются специальные случаи так называемых *биективных*, *инъективных* и *сюръективных* отображений. Рассмотрим эти случаи подробнее.

Определение Отображение $y = \hat{A}x$, $x \in \Omega$, $y \in \Theta$ множества Ω в множество Θ называется *инъективным* (или *инъекцией*), если из условия $\hat{A}x_1 = \hat{A}x_2$ вытекает $x_1 = x_2$, $x_1, x_2 \in \Omega$.

Отображение $y = \hat{A}x$, $x \in \Omega$, $y \in \Theta$ множества Ω на множество Θ называется *сюръективным* (или *сюръекцией*), если каждый элемент из Θ имеет прообраз в Ω .

Наконец, отображение, являющееся одновременно и инъективным и сюръективным, будет *взаимно однозначным*, или *биекцией*.

Примеры отображений различных типов

Тип отображения	Инъективное	Неинъективное
Сюръективное		
Несюръективное		

В случае инъекции множество всех значений оператора $y = Ax$, $x \in \Omega$, $y \in \Theta$ может не совпадать с Θ .

В случае сюръекции прообраз любого элемента из Θ всегда существует в Ω , но, вообще говоря, он не единственен

Отметим также, что в конечномерном случае сюръективность отображения $\hat{A}: \Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$ означает выполнение условия $\Theta = \Lambda^m$, а инъективность – условия $\ker \hat{A} = \{0\}$. Альтернативную форму условий инъективности и сюръективности в конечномерном случае дает

Теорема Ранг матрицы линейного оператора, являющегося сюръективным отображением, равен числу ее строк, а ранг матрицы инъективного отображения равен числу ее столбцов.

Иными словами, для $\hat{A}: \Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$ инъективность равносильна выполнению равенств $\text{rg} \|\hat{A}\|_{fg} = \dim(\Lambda^n) = n$, а сюръективность $\text{rg} \|\hat{A}\|_{fg} = \dim(\Lambda^m) = m$.

Задача 08 Линейное отображение $\hat{A}: \Lambda^3 \rightarrow \Lambda^3$ в некотором базисе задано матрицей

$$\|\hat{A}\| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}. \text{ Найти его ядро и множество значений. Выяснить, является ли}$$

данное отображение инъективным или сюръективным.

Решение. 1°. Пусть $\|x\| = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$ и $\|y\| = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$ – координатные представления соответственно прооб-

раза и образа оператора $y = \hat{A}x$. Тогда ядро – множество элементов x , таких, что $\hat{A}x = o$, задается в координатном представлении системой линейных уравнений

$$\|\hat{A}\|x\| = \|o\| \quad \text{или} \quad \begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 = 0, \\ 2\xi_1 + 3\xi_2 + 4\xi_3 = 0, \\ 3\xi_1 + 5\xi_2 + 7\xi_3 = 0, \end{cases}$$

общее решение которой есть

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда заключаем, что ядро линейного отображения \hat{A} есть линейная оболочка элемента $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, и поскольку оно не состоит только из нулевого элемента, то данное отображение *неинъективное*.

К этому же заключению можно прийти, приняв во внимание, что $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 < 3$ – числа столбцов матрицы отображения.

2°. Область значений линейного отображения \hat{A} состоит из элементов $y \in \Theta$, таких, что $y = \hat{A}x \forall x \in \Omega$. В координатной форме принадлежность элемента y ко множеству значений означает совместность системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix},$$

следовательно, нам необходимо выяснить, при каких значениях η_1, η_2, η_3 данная система линейных уравнений совместна. Это можно сделать, например, при помощи теоремы Кронекера–Капелли, сравнив ранги основной и расширенной матриц данной системы. Затем из условия

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & \eta_1 \\ 2 & 3 & 4 & | & \eta_2 \\ 3 & 5 & 7 & | & \eta_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & \eta_1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2\eta_1 - \eta_2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = 2$$

найдем, что для совместности необходимо и достаточно, чтобы $\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = 0$, что, в свою очередь, означает, что множество значений отображения \hat{A} состоит из элементов вида

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2,$$

являющихся решениями уравнения $\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = 0$.

Заметим, наконец, что поскольку не каждый элемент $y \in \Theta = \Lambda^3$ имеет прообраз в $\Omega = \Lambda^3$, то данное отображение не является и сюръективным.

Линейные формы

В заключение рассмотрим простой, но важный для практики частный случай линейного отображения вида $\hat{A}: \{\Lambda \xrightarrow{\hat{A}} \Lambda^1\}$. Здесь результат действия \hat{A} на элемент $x \in \Lambda$ естественно обозначить функционально, как $f(x)$, т.е. $\hat{A}x = f(x)$.

Такого вида зависимость называют *линейной функцией*, *линейным функционалом* или *линейной формой*, поскольку при этом множество значений *числовое*.

Важно помнить, что в конечномерном случае, т.е. при $\Lambda = \Lambda^n$, матрица преобразования \hat{A} имеет, в силу формулы (1), размер $1 \times n$, т.е. является n -компонентной строкой. Это вытекает из нашего (сделанного ранее) выбора n -компонентного столбца как координатного представления элемента пространства.

Формула для нахождения значений линейной формы $f(x) \in \mathbf{R}$ $x \in \Lambda^n$ в Λ^n является обычной линейной функцией от n числовых переменных. Действительно, пусть в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \in \Lambda^n$ координатный столбец $\|x\|_g = \|\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_n\|^T$, а значения формы на базисных элементах $\phi_k = f(g_k)$ $k = [1, n]$, что дает $\|\hat{A}\|_g = \|f\|_g = \|\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n\|$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \phi_k \xi_k = \|f\|_g^T \|x\|_g.$$

Задача 9: Пусть Λ^n линейное пространство алгебраических многочленов $x = P_4(\tau) = \xi_1 + \xi_2 \tau + \xi_3 \tau^2 + \xi_4 \tau^3$ степени не выше, чем 3, с базисом вида $\{g_1(\tau) = 1, g_2(\tau) = \tau, g_3(\tau) = \tau^2, g_4(\tau) = \tau^3\}$, а линейная форма есть определенный интеграл от многочлена в пределах от 0 до 1. Найти координатное представление этой формы в данном базисе.

Решение: в нашем случае $f(x) = \int_0^1 P_4(\tau) d\tau$, а искомое координатное представление линейного оператора $\hat{A}: \{ \Lambda^4 \rightarrow \Lambda^1 \}$ есть четырех компонентная строка вида

$$\|f\|_g = \| f(P_4(g_1(\tau))) \quad f(P_4(g_2(\tau))) \quad f(P_4(g_3(\tau))) \quad f(P_4(g_4(\tau))) \|.$$

Конкретно

$$f(P_4(g_1(\tau))) = \int_0^1 1 \cdot d\tau = 1,$$

$$f(P_4(g_2(\tau))) = \int_0^1 \tau d\tau = \frac{1}{2},$$

$$f(P_4(g_3(\tau))) = \int_0^1 \tau^2 d\tau = \frac{1}{3},$$

$$f(P_4(g_4(\tau))) = \int_0^1 \tau^3 d\tau = \frac{1}{4}.$$

Откуда следует ответ задачи: $\|f\|_g = \left\| 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \right\|.$