СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Определение

Пусть линейный оператор $\hat{A}$, действует в линейном пространстве L и имеет значения в этом же пространстве. Иначе говоря, образы и прообразы для $\hat{A}$ принадлежат L, т.е. $\hat{A}$ есть *линейное преобразование* пространства L. Тогда

> *Собственным вектором* линейного преобразования $\hat{A}$, отвечающему *собственному значению* λ, называется *ненулевой* элемент $f \in L$ такой, что
> $$\hat{A} f = \lambda f . \qquad (1)$$

Итак, f это ненулевой элемент пространства L, образ которого при действии на него $\hat{A}$, есть произведение числа λ (вообще говоря, комплексного) на этот же элемент f.

В общем случае универсальных способов описания или нахождения собственных векторов и собственных значений нет. Для их нахождения приходится использовать свойства конкретного линейного пространства и линейного преобразования.

Например, для оператора дифференцирования $\hat{A}=\frac{d}{dx}$, действующего в линейном пространстве бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$, равенство (1) принимает вид *дифференциального уравнения*

$$\frac{df}{dx}=\lambda f.$$

Собственным вектором в этом случае является каждое, не равное тождественно нулю, решение этого уравнения, т.е *функция* вида $f(x)=Ce^{\lambda x} \quad \forall C \neq 0$.

Данный пример иллюстрирует тот факт, что слово "вектор" в термине "собственный вектор" есть лишь дань исторически сложившейся традиции. Собственное значение в данном примере есть любое комплексное число.

Укажем (это теоремы!) важные свойства собственных векторов, вытекающих из определения (1):

\

1) совокупность *всех* собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению (и дополненная нулевым элементом) является *инвариантным подпространством* преобразования $\hat{A}$, называемым *собственным* подпространством;

2) собственные векторы отвечающие *различным* собственным значениям, *линейно независимы.*

Забегая вперед, поясним:
подпространство $\Omega \subseteq \Lambda$ называется *инвариантным* для линейного оператора $\hat{A}$, если

$$\hat{A}x \in \Omega \quad \forall x \in \Omega .$$

Обратите также внимание на то, что свойства 1) и 2) имеют место в любом Λ , не обязательно конечномерном.

Случай конечномерного пространства

Хотя универсального "рецепта" нахождения собственных векторов нет, приятным исключением оказывается случай, когда пространство $L = L^n$ конечномерное, т.е. в нем существует базис.

Напомним важные *теоремы* о свойствах конечномерного пространства:

1) каждый элемент в L^n (в конкретном базисе) полностью и однозначно описывается своим координатным столбцом, в том числе, верно: $a = b \quad \Leftrightarrow \quad \| a \| = \| b \|$;

2) операции с элементами L^n в координатном представлении выполняются по правилам действий с матрицами, для нас важно, что $\| \lambda f \| = \lambda \| f \|$;

3) каждое линейное преобразование $\hat{A}$, имеет координатное представление в виде $\| \hat{A} \|$ − квадратной матрицы n-го порядка, столбцами которой являются координатные столбцы *образов базисных векторов*.

4) для координатного представления образа любого элемента $x \in L^n$, т.е. $\| \hat{A} x \|$, верно равенство $\| \hat{A} x \| = \| \hat{A} \| \| x \|$.

Это позволяет (*только в* L^n !) условие (1) записать в виде:

$$\| \hat{A} \| \| f \| = \lambda \| f \| \qquad \Rightarrow \qquad \| \hat{A} \| \| f \| - \lambda \| \hat{E} \| \| f \| = \| o \| \ ,$$

или же, как

$$\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \| \| f \| = \| o \| \ , \tag{2}$$

где $\hat{E}$ − единичный (тождественный) оператор, а $\| o \|$ − нулевой столбец, т.е. координатное представление нулевого элемента $o \in L^n$.

\
Рассмотрим теперь (2) в развернутом (координатном) виде.

$$\text{Пусть} \quad \left\| \hat{A} \right\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{matrix} \right\| \quad \text{и} \quad \left\| f \right\| = \left\| \begin{matrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_n \end{matrix} \right\|.$$

Тогда равенство (2) запишется так:

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \right\| \quad \text{или} \quad \begin{cases} (\alpha_{11} - \lambda)\,\phi_1 + \alpha_{12}\phi_2 + \dots + \alpha_{1n}\phi_n = 0, \\ \alpha_{21}\,\phi_1 + (\alpha_{22} - \lambda)\,\phi_2 + \dots + \alpha_{2n}\phi_n = 0, \\ \dots \\ \alpha_{n1}\,\phi_1 + \alpha_{n2}\phi_2 + \dots + (\alpha_{nn} - \lambda)\,\phi_n = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Система (3) состоит из n *нелинейных* уравнений с $n+1$ неизвестным, решить которую можно алгоритмом, использующим специфику ее вида.

Идея этого алгоритма состоит в том, что, если в (3) неизвестную λ принять за *параметр* (мы считаем, λ как бы известной, но могущей иметь разные значения, величиной), то относительно компонент столбца $\| f \|$ система (3) оказывается *линейной и однородной*, с основной квадратной матрицей $\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \|$ порядка n.

Из теоремы Крамера следует, что при λ, удовлетворяющих условию

$$\det \| \hat{A} - \lambda \hat{E} \| \neq 0$$

решение системы (3) существует и единственно.

В этом случае очевидно, что (3) имеет единственное решение $\phi_1 = \phi_2 = \ldots = \phi_n = 0$, которое не может быть решением исходной задачи, поскольку собственный вектор *ненулевой по определению*.

Рассмотрим остающийся случай $\det\left\|\hat{A}-\lambda\hat{E}\right\|=0$. Тут теорема Крамера ничем помочь не может, поэтому воспользуемся другой известной теоремой о том, что *максимальное* число *линейно независимых* (т.е., ненулевых) частных решений линейной однородной системы (3) равно $n-r$, где $r-$ ранг основной матрицы этой системы.

Откуда следует, что для существования собственного вектора *необходимо* выполнение неравенства $n-r\geq 1$. Т.е., нам нужно, чтобы $\operatorname{rg}\left\|\hat{A}-\lambda\hat{E}\right\|\leq n-1$.

Ранг квадратной матрицы порядка n не может быть больше, чем n, и поэтому данное условие выполнится, если $\det\left\|\hat{A}-\lambda\hat{E}\right\|=0$, поскольку матрица $\left\|\hat{A}-\lambda\hat{E}\right\|$ имеет *единственный* минор n-го порядка , равный ее детерминанту.

Откуда следует, что, выбор λ из условия

$$\det\left\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \right\| = 0 \ , \tag{4}$$

обеспечивает существование решения системы (3) с, не равными нулю одновременно, компонентами $\| f \|$. Значит,

> в любом *конечномерном* пространстве задача отыскания собственных векторов и собственных значений сводится к решению уравнения (4) и последовательному (отдельно для *каждого* найденного λ) решению системы (3).

Сообщим также, что:

> уравнение (4) принято называть *характеристическим.*
> .

Напомним при этом, что матрица любого линейного преобразования $\hat{A}$, действующего в L^n, квадратная, порядка n, и ее столбцами являются *образы базисных элементов*, (т.е., результатом действия на них преобразования $\hat{A}$).

В конечномерном линейном пространстве L^n собственные векторы и собственные значения линейного преобразования $\hat{A}$ обладают следующими свойствами.

1) Уравнение (4) есть алгебраическое уравнение n-го порядка, вид и решения которого *одинаковы в любом базисе* L^n.
2) В комплексном линейном пространстве L^n каждое линейное преобразование $\hat{A}$ имеет *хотя бы один* собственный вектор.
3) В вещественном линейном пространстве L^n каждое линейное преобразование $\hat{A}$ имеет либо *хотя бы один собственный вектор*, либо *двумерное инвариантное подпространство.*
4) *Размерность* собственного подпространства Ω_λ, отвечающего λ − корню характеристического уравнения кратности k, не меньше, чем 1 и не больше, чем k. То есть $1 \le \dim(\Omega_\lambda) \le k$.
5) Матрица линейного преобразования $\hat{A}$ в базисе *из собственных векторов* этого преобразования (в случае, когда такой базис существует) имеет *диагональный* вид, причем на ее *главной диагонали* расположены собственные значения $\hat{A}$.

Замечание о важности собственных векторов

Доказательство свойства 5)

Допустим, что для некоторого линейного преобразования $\hat{A}$, заданного в Λ^n, удалось найти n линейно независимых собственных векторов $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$, для которых выполнены равенства

$$\hat{A}g_1 = \lambda_1 g_1 \ ; \quad \hat{A}g_2 = \lambda_2 g_2 \ ; \ldots ; \quad \hat{A}g_n = \lambda_n g_n \ .$$

Если принять набор элементов $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ за базис, то данные соотношения можно рассматривать как координатные разложения *образов базисных элементов*:

$$\hat{A}g_k = 0 \cdot g_1 + 0 \cdot g_2 + \ldots + \lambda_k g_k + \ldots + 0 \cdot g_n \ ; \forall k = [1, n] \ .$$

Поскольку эти разложения (как разложения по базису) обязательно *существуют* и *единственны*, то, исходя из определения *матрицы линейного преобразования*, можно утверждать, что матрица линейного преобразования $\hat{A}$ в этом базисе будет иметь *диагональный* вид:

$$\| \hat{A} \|_f = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{Vmatrix},$$

благодаря чему исследование свойств преобразования $\hat{A}$ в базисе из собственных векторов оказывается проще.

Примеры решения задач на тему
"Собственные векторы и собственные значения линейных преобразований"

Пример 1. Найти в L^2 собственные значения и собственные векторы линейного преобразования $\hat{A}$, для которого в стандартном базисе $\|\hat{A}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Решение. 1) Характеристическое уравнение (4) в данном случае имеет вид:

$$\det\begin{Vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{Vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad (\lambda - 1)^2 = 0.$$

Значит, у данного преобразования одно собственное значение $\lambda_{1,2} = 1$ кратности $k = 2$.

2) Для $\lambda = 1$ составим систему (3):

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 \cdot \phi_1 + 1 \cdot \phi_2 = 0, \\ 0 \cdot \phi_1 + 0 \cdot \phi_2 = 0 \end{cases}, \text{ откуда } \quad \| f_{(1)} \| = \begin{Vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Значит, собственным вектором является *любой* элемент L^2 с координатным представлением вида $C\| f_{(1)} \|$, где $C \neq 0$. Одномерным собственным подпространством будет линейная оболочка элемента $f_{(1)}$.

Пример 2. Найти в L^3 собственные значения и собственные векторы линейного преобразования $\hat{A}$, для которого в стандартном базисе $\|\hat{A}\| = \left\|\begin{matrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|$.

Решение. **1.** Решим задачу, предположив сначала, что L^3 *комплексное* линейное пространство.

1) Составим характеристическое уравнение (4)

$$\det\left\|\begin{matrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{matrix}\right\| = 0 \text{, по правилу "треугольников"}$$

$$-(\lambda-1)^2(\lambda+1)+4(\lambda-1)=0.$$

или окончательно $(\lambda-1)(\lambda^2+3)=0$. Его решениями будут числа: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{3}$. Это − собственные значения $\hat{A}$.

2) Найдем, соответствующие этим собственным значениям, собственные векторы, последовательно решая систему (3). Для $\lambda_1 = 1$ эта система будет:

$$\begin{Vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} ,$$

а учитывая, что ранг ее матрицы 2, имеем $\begin{cases} \phi_1 - 2\phi_2 - 2\phi_3 = 0, \\ \phi_2 = 0. \end{cases}$. Тогда в качестве собственного вектора можно взять $\begin{Vmatrix} f_{(1)} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

3) Поскольку условие задачи имеет вещественную форму собственные значения λ_2 и λ_3 комплексно сопряженные. По этой же причине (*есть такая теорема*) будут комплексно сопряженными и соответствующие собственные векторы. Поэтому для их нахождения достаточно решить систему (3) только с $\lambda_2 = i\sqrt{3}$.

   В этом случае система (3) имеет вид:

$$\begin{cases} (1-i\sqrt{3})\,\phi_1 - 2\phi_2 & = 0, \\ \phi_2 + (1-i\sqrt{3})\,\phi_3 & = 0. \end{cases}$$

   Конечно, эту систему можно решать методом исключения, однако удобнее просто принять, что $\phi_2 = 1 - i\sqrt{3}$. Тогда очевидно, что $\phi_1 = 2$ и $\phi_3 = -1$. В итоге получаем собственные векторы

$$\| f_{(2)} \| = \left\| \begin{matrix} 2 \\ 1 - i\sqrt{3} \\ -1 \end{matrix} \right\| \quad \text{и} \quad \| f_{(3)} \| = \left\| \begin{matrix} 2 \\ 1 + i\sqrt{3} \\ -1 \end{matrix} \right\|.$$

   Причем здесь $\| f_{(3)} \|$. получается из $\| f_{(2)} \|$. комплексным сопряжением.

2. Решим теперь данную задачу, предполагая, что L^3 *вещественное* линейное пространство.

В этом случае, выполнив выкладки как в 2), получим, что $\hat{A}$ имеет только одно собственное значение $\lambda_1 = 1$ и, соответствующее ему, одномерное собственное подпространство, являющееся линейной оболочкой элемента

$$\left\| f_{(1)} \right\| = \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

По свойству 3) линейного оператора в вещественном линейном конечномерном пространстве

каждое линейное преобразование $\hat{A}$ имеет либо хотя бы один собственный вектор, либо двумерное инвариантное подпространство.

Имеется теорема, о том, что таким инвариантным пространством является *линейная оболочка* элементов

$$\mathrm{Re}\left\| f_{(2)} \right\| = \mathrm{Re}\left\| \begin{matrix} 2 \\ 1-i\sqrt{3} \\ -1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} \right\| \qquad \text{и} \qquad \mathrm{Im}\left\| f_{(2)} \right\| = \mathrm{Im}\left\| \begin{matrix} 2 \\ 1-i\sqrt{3} \\ -1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

− вещественных элементов в L^3. Причем элементы $\mathrm{Re}\left\| f_{(2)} \right\|$ и $\mathrm{Im}\left\| f_{(2)} \right\|$ линейно независимые (*и такая теорема имеется*).

Тогда, в рассматриваемой задаче линейное преобразование $\hat{A}$ имеет инвариантное подпространство

$$\left\| \begin{matrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{matrix} \right\| = C_1 \left\| \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} \right\| + C_2 \left\| \begin{matrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{matrix} \right\| \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Пример 3. Найти в вещественном L^3 собственные значения и собственные векторы линейного преобразования $\hat{A}$, для которого в стандартном базисе

$$\left\| \hat{A} \right\| = \left\| \begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix} \right\|.$$

Решение. 1) Составляем и решаем характеристическое уравнение (4)

$$\det \left\| \begin{matrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{matrix} \right\| = 0,$$

раскладывая по первой строке, получаем $(-1-\lambda) \cdot \det \left\| \begin{matrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{matrix} \right\| = 0$

или окончательно $\lambda(\lambda+1)^2 = 0$. Откуда собственные значения суть числа: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -1$.

2) Найдем, соответствующие этим собственным значениям, собственные векторы, последовательно решая систему (3). Для $\lambda_1 = 0$ система (3) :

$$\left\| \begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| , \quad \text{или же} \quad \begin{cases} \phi_1 & = 0, \\ \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 & = 0. \end{cases}$$

В качестве собственного вектора здесь можно взять $\left\| \begin{matrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\|$

3) Поскольку собственное значение -1 имеет кратность 2, то соответствующее ему собственное подпространство может оказаться как одномерным, так и двумерным.

Составляем систему (3) $\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\| \quad \Rightarrow \quad \{\, \phi_1 + \phi_2 = 0$.

Для этой системы $n = 3$, а ранг ее основной матрицы равен 1. Следовательно, эта система будет иметь два линейно независимых (а, значит, и ненулевых) частных решения, являющихся *собственными* векторами.

Принимая ϕ_2 за основную переменную, а ϕ_1 и ϕ_3 за свободные, находим эти решения

$$\| f_{(2)} \| = \left\|\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}\right\| \quad \text{и} \quad \| f_{(3)} \| = \left\|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\| .$$

Заметим, что эти собственные векторы могут служить базисом в *двумерном собственном* подпространстве преобразования $\hat{A}$, отвечающему собственному значению $\lambda = -1$.

Пример 4. В линейном пространстве квадратных матриц найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$, ставящего в соответствие каждой такой матрице результат ее умножения справа на матрицу $\begin{Vmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{Vmatrix}$.

Решение. 1) Предварительно напомним, что данное пространство линейное конечномерное, размерности 4. Далее, результатом умножения любой квадратной матрицы 2-го порядка на любую фиксированную квадратную матрицу этого же порядка является опять же квадратная матрица 2-го порядка. Поэтому оператор $\hat{A}$ является преобразованием. (В качестве небольшого упражнения покажите, что это преобразование линейное.)

Таким образом, для нахождения собственных векторов и собственных оказывается возможным использование алгоритма, основанного на решении уравнения (4) и системы уравнений (3).

Для использования этого алгоритма требуется знать матрицу преобразования, которая, в свою очередь, зависит от базиса. Поскольку в условии задачи базис не задан, мы можем выбрать его, исходя из собственных предпочтений.

Напомним, что в 4-х мерном базисом может служить любой упорядоченный набор четырех линейно независимых элементов. Поскольку мы рассматриваем линейное пространство матриц размера 2×2, то этот набор может, например, иметь вид:

$$\left\{ \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix};\ \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix};\ \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix};\ \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \right\}.$$

Из очевидного равенства

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{Vmatrix} = \alpha_1 \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} + \alpha_2 \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} + \alpha_3 \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} + \alpha_4 \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad (5)$$

следует, что координатным представлением каждой матрицы размера 2×2 в нашем базисе будет служить 4-х компонентный столбец $\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{Vmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Найдем теперь матрицу преобразования, указанного в условии задачи. Напомним, что матрицей линейного преобразования линейного 4-х мерного служит квадратная матрица размера 4×4, столбцы которой суть координатные представления образов базисных элементов.
В нашем случае образы базисных элементов определяются так:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -7 & -2 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

с координатным столбцом $\begin{Vmatrix} -7 & -2 & 0 & 0 \end{Vmatrix}^{\mathrm{T}}$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

с координатным столбцом $\begin{Vmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}^{\mathrm{T}}$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -7 & -2 \end{Vmatrix},$$

с координатным столбцом $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -7 & -2 \end{Vmatrix}^{\mathrm{T}}$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 1 \end{Vmatrix},$$

с координатным столбцом $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 8 & 1 \end{Vmatrix}^{\mathrm{T}}$

Из полученных координатных представлений формируем матрицу преобразования $\hat{A}$

$$\| \hat{A} \| = \begin{Vmatrix} -7 & 8 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{Vmatrix},$$

2) Теперь составляем характеристическое уравнение (4). Оно имеет вид

$$\det\begin{Vmatrix} -7-\lambda & 8 & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7-\lambda & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 1-\lambda \end{Vmatrix} = 0,$$

Применив правило разложения определителя по строке и использовав формулы сокращенного умножения, получим в итоге уравнение

$$(\lambda+3)^4 = 0 .$$

Это означает, что указанное в условии преобразование имеет единственное собственное значение $\lambda_{1,2,3,4} = -3$ кратности 4.

Осталось найти собственные векторы. Система (3) при $\lambda = -3$ будет такова:

$$\left\| \begin{matrix} -4 & 8 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|$$ или, в покомпонентной форме, $$\begin{cases} -\phi_1 + 2\phi_2 = 0, \\ -\phi_3 + 2\phi_4 = 0. \end{cases}$$

Приняв ϕ_2 и ϕ_3 за основные неизвестные, а ϕ_1 и ϕ_4 за свободные, получим два линейно независимых собственных вектора

$$\| f_{(1)} \| = \left\| \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| \quad \text{и} \quad \| f_{(2)} \| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\|,$$

которые образуют базис *двумерного* собственного подпространства оператора $\hat{A}$, отвечающего собственному значению $\lambda = -3$ *кратности* 4.

\

В заключение заметим, что мы нашли собственные векторы в форме их координатных представлений. Сами собственные векторы (если учесть равенство (5)) суть матрицы 2-го порядка $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$.

Ради любопытства проверим, что эти матрицы удовлетворяют определению собственного вектора.

Действительно, верны равенства

$$\hat{A} f = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -6 & -3 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = -3 \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \lambda f \ .$$

Левый конец этой цепочки равенств есть результат действия оператора на собственный вектор, а правый конец − умножение на этот вектор собственного значения.