Квадратичные формы

Билинейные формы

Исходным понятием в данной теме является *билинейная форма*

Определение 1. Пусть линейном пространстве Λ каждой упорядоченной паре элементов x и y поставлено в соответствие число $B(x,y)$ так, что

1) $B(\alpha x_1+\beta x_2,y)=\alpha B(x_1,y)+\beta B(x_2,y)$
$\forall x_1,x_2,y\in\Lambda$; $\forall\alpha,\beta$,
2) $B(x,\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha B(x,y_1)+\beta B(x,y_2)$
$\forall x,y_1,y_2\in\Lambda$; $\forall\alpha,\beta$,

тогда говорят, что в Λ задана *билинейная форма* (или *билинейная функция, функционал*).

Например, произведение двух линейных форм $F(x)$ и $G(y)$, определенных в Λ , $B(x,y)=F(x)G(y)$ есть билинейная форма.

Билинейные формы в Λ^n.

Пусть в Λ^n заданы базис $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ и билинейная форма $B(x, y)$. Найдем формулу для выражения ее значения через координаты аргументов.

Предположим, что в рассматриваемом базисе $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i$ и $y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j g_j$, тогда, согласно определению 1, справедливы равенства

$$\begin{aligned} B(x, y) &= B(\sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j g_j) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i B(g_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j g_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j B(g_i, g_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \xi_i \eta_j . \end{aligned} \quad (1)$$

Определение 2. Числа $\beta_{ij} = B(g_i, g_j)$ называются *компонентами билинейной формы* $B(x, y)$ в базисе $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, а матрица $\|B\|_g = \|\beta_{ij}\|$ – *матрицей билинейной формы* в этом базис*е.*

Из формулы (1) следует, что в Λ^n с базисом $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ билинейная форма может быть представлена в матричном виде:

$$B(x,y) = \left\| \xi_1 \quad \xi_2 \quad \dots \quad \xi_n \right\| \left\| \begin{matrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{matrix} \right\| = \| x \|_g^{\mathrm{T}} \| B \|_g \| y \|_g ,$$

где столбцы $\|x\|_g$ и $\|y\|_g$ – координатные представления элементов x и y в данном базисе.

Матрица билинейной формы зависит от выбора базиса. Правило изменения этой матрицы при замене базиса имеет вид

$$\| B \|_{g'} = \| S \|^{\mathrm{T}} \| B \|_g \| S \| ,$$

где $\| S \|$ – матрица перехода от базиса $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$.

Определение 2. Билинейная форма $B(x,y)$ называется *симметричной*, если $\forall x, y \in \Lambda$ $B(x,y) = B(y,x)$.

Для симметричности билинейной формы в Λ^n необходимо и достаточно, чтобы ее матрица была симметрической.

Квадратичные формы

Определение 3. Пусть в линейном пространстве Λ каждому элементу x поставлено в соответствие число

$$\Phi(x) = B(x,x)\,,$$

где $B(x,y)$ – некоторая билинейная форма в Λ, тогда говорят, что в Λ задана *квадратичная форма* (или *квадратичная функция, квадратичный функционал*).

В общем случае в *вещественном* линейном пространстве по заданной квадратичной форме $\Phi(x)$ нельзя восстановить порождающую ее билинейную форму $B(x,y)$, однако это можно сделать в случае *симметричной* билинейной формы.

Действительно, пусть квадратичная форма $\Phi(x)$ порождена симметричной билинейной формой $B(x,y)$, тогда $\forall x,y \in \Lambda$ имеет место равенства

$$\begin{aligned}\Phi(x+y) &= B(x+y,x+y) = B(x,x) + B(x,y) + B(y,x) + B(y,y) = \\ &= \Phi(x) + 2B(x,y) + \Phi(y)\,,\end{aligned}$$

откуда

$$B(x,y) = \frac{\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)}{2}.$$

Используя полученную формулу, можно дать

Определение 4. В Λ^n матрица билинейной формы $\frac{1}{2}\big(\Phi(x+y)-\Phi(x)-\Phi(y)\big)$ называется *матрицей квадратичной формы* $\Phi(x)$.

В силу этого определения матрица *любой* квадратичной формы *симметрическая*.

Поэтому, если в Λ^n задан базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, то квадратичная форма может быть записана в виде

$$\Phi(x)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ki}\xi_k\xi_i=\left\|\begin{matrix}\xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \dots\\ \xi_n\end{matrix}\right\|=\|\,x\,\|_g^{\mathrm{T}}\|\,\Phi\,\|_g\|\,x\,\|_g,$$

где $\|x\|_g$ – координатный столбец элемента $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i g_i$ в данном базисе.

Замена базиса, в свою очередь, приводит к изменению матрицы квадратичного функционала по формуле

$$\|\,\Phi\,\|_{g'}=\|\,S\,\|^{\mathrm{T}}\|\,\Phi\,\|_g\|\,S\,\|.$$

Отметим, что иногда целесообразно строить квадратичную форму $\Phi(x)$ по порождающей билинейной форме, просимметрировав предварительно последнюю.

Действительно, для любой $B(x,y)$ можно указать симметричную билинейную форму $B^*(x,y)$, которая будет порождать *ту же самую* квадратичную форму $\Phi(x)$, что и $B(x,y)$. Например, возьмем $B^*(x,y)=\frac{1}{2}(B(x,y)+B(y,x))$. Для такой билинейной формы очевидно, что

$$\varphi_{ij}=\frac{\beta_{ij}+\beta_{ji}}{2}=\frac{\beta_{ji}+\beta_{ij}}{2}=\varphi_{ji} \quad \forall i,j=[1,n], \tag{2}$$

т.е. числа φ_{ij} суть элементы симметрической матрицы, являющейся по определению 4 матрицей квадратичной формы $\Phi(x)=B^*(x,x)$.

Пример 1. Пусть в Λ^3 задана билинейная (несимметричная!) форма

$$B\ (x,y)=\xi_1\eta_1+3\xi_2\eta_2-\xi_2\eta_1-3\xi_1\eta_2+2\xi_3\eta_1-\xi_2\eta_3-\xi_3\eta_2=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}1 & -3 & 0\\ -1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{matrix}\right\|.$$

Порождаемая ей в Λ^3 квадратичная форма в силу формулы (2) будет иметь вид

$$\Phi(x)==\left\|\begin{matrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{matrix}\right\|=\xi_1^2+3\xi_2^2-4\xi_1\xi_2+2\xi_1\xi_3-2\xi_2\xi_3\,.$$

В то же время симметричная билинейная форма

$$B^*(x,y)=\xi_1\eta_1+3\xi_2\eta_2-2\xi_1\eta_2-2\xi_2\eta_1+\xi_1\eta_3+\xi_3\eta_1-\xi_2\eta_3-\xi_3\eta_2=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{matrix}\right\|,$$

имеющая матрицу $\left\|\begin{matrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{matrix}\right\|$, будет порождать в Λ^3 ту же самую квадратичную форму $\Phi(x)=\xi_1^2+3\xi_2^2-4\xi_1\xi_2+2\xi_1\xi_3-2\xi_2\xi_3$.

Метод Лагранжа

Как уже отмечалось, квадратичная форма в Λ^n полностью и однозначно описывается своей матрицей $\| \Phi \|_g$ в выбранном базисе. При этом в разных базисах матрица квадратичной формы, как мы видели, различная.

Напомним, что правило изменения этой матрицы при замене базиса имеет вид

$$\| \Phi \|_{g'} = \| S \|^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_g \| S \| , \tag{3}$$

где $\| S \|$ – матрица перехода от базиса $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$.

Представляет интерес задача отыскания в Λ^n базисов, в которых квадратичная форма имеет *наиболее простой* и удобный для исследования вид.

Предварительно убедимся, что *значение* квадратичной формы от выбора базиса не зависит. Пусть

$$\Phi(x) = \| x \|_g^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_g \| x \|_g \quad \text{и} \quad \Phi'(x) = \| x \|_{g'}^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_{g'} \| x \|_{g'} . \tag{4}$$

Надо показать, что $\Phi'(x) = \Phi(x)$.

Действительно, с одной стороны, по формулам перехода имеем $\| x \|_g = \| S \| \| x \|_{g'}$ и, в силу правила транспонирования произведения матриц, получаем $\| x \|_g^{\mathrm{T}} = \| x \|_{g'}^{\mathrm{T}} \| S \|^{\mathrm{T}}$.

С другой стороны, матрица перехода $\| S \|$ невырожденная, поэтому имеет обратную матрицу $\| S \|^{-1}$. Аналогично для матрицы $\| S \|^{\mathrm{T}}$ существует $\left(\| S \|^{\mathrm{T}} \right)^{-1}$ и будут верны равенства $\| x \|_{g'} = \| S \|^{-1} \| x \|_g$ и $\| x \|_{g'}^{\mathrm{T}} = \| x \|_g^{\mathrm{T}} \left(\| S \|^{\mathrm{T}} \right)^{-1}$.

Подставляя в формулу (4) последние два равенства и формулу (3), получаем

$$\Phi'(x) = \| x \|_{g'}^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_{g'} \| x \|_{g'} = \| x \|_g^{\mathrm{T}} \left(\| S \|^{\mathrm{T}} \right)^{-1} \| S \|^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_g \| S \| \| S \|^{-1} \| x \|_g .$$

Поскольку произведение матриц обладает свойством ассоциативности, то вычисление полученного выражения можно начинать с любой пары, рядом стоящих матриц. Это дает требуемое равенство

$$\Phi'(x) = \| x \|_g^{\mathrm{T}} \| E \| \| \Phi \|_g \| E \| \| x \|_g = \| x \|_g^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_g \| x \|_g = \Phi(x) ,$$

в силу определений обратной и единичной матриц.

Теперь уточним понятие *наиболее простой вид матрицы*. Мы будем считать удобной для использования *диагональную* матрицу. Или же, применительно к квадратичной форме, дадим

Определение 5. Будем говорить, что квадратичная форма $\Phi(x)$ имеет *диагональный вид* в базисе $\{g_1, g_2, ..., g_n\} \subset \Lambda^n$, если она в нем представима как

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2 \,, \tag{5}$$

где $\lambda_i \ \forall i = [1, n]$ – некоторые числа.

Если, кроме того, числа λ_i, $i = [1, n]$ принимают лишь значения 0 или ± 1, то говорят, что квадратичная форма в данном базисе имеет *канонический* вид.

Справедливы

Теорема 1. Для любой квадратичной формы в Λ^n существует базис, в эта форма имеет канонический вид.

и

Теорема 2. Количества положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов λ_i в формуле (5) не зависит от выбора базиса.

Теорему 2 в математической литературе традиционно называют *теоремой инерции* квадратичной формы.

Задачу отыскания диагонального или канонического базисов (то есть, базисов, в которых квадратичная форма имеет соответственно диагональный или канонический вид) можно решать разными способами.

Наиболее простым из них является широко используемый в элементарной математике *метод Лагранжа* (или *метод выделения полных квадратов*).

Для задач небольшой размерности реализация этого метода может быть сведена к построению последовательности линейных невырожденных замен переменных. Что иллюстрирует

Пример 2. В линейном пространстве Λ^3 привести к каноническому виду квадратичную форму $$\Phi(x) = 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 - 2\xi_2\xi_3 \qquad (6)$$ и построить для нее канонический базис.

Решение. Поскольку квадратичная форма в условии задана в координатном виде, то будем исходный базис считать стандартным, т.е. образованным элементами с координатными столбцами $\left\{ \| g_1 \| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} , \ \| g_2 \| = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} , \ \| g_3 \| = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \right\}$.

В этом базисе матрица квадратичной формы в силу (2) будет иметь вид $\| \Phi \| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$.

В формуле (6) нет полных квадратов, поэтом создадим их "искусственно" при помощи следующей замены переменных $\begin{cases} \xi_1 = \xi_1' + \xi_2', \\ \xi_2 = \xi_1' - \xi_2', \\ \xi_3 = \xi_3'. \end{cases}$ После подстановки в (6) и упрощений получим формулу в "переменных со штрихом" вида $\Phi(x) = \xi_1'^2 - \left(\xi_2' - \xi_3'\right)^2 + \xi_2'^2$.

Теперь делаем вторую замену, следующую из очевидных соотношений $\begin{cases} \xi_1'' = \xi_1', \\ \xi_2'' = \xi_2' - \xi_2', \\ \xi_3'' = \xi_3'. \end{cases}$ а именно $\begin{cases} \xi_1' = \xi_1'', \\ \xi_2' = \xi_2'' + \xi'_2, \\ \xi_3' = \xi_3'', \end{cases}$ позволяющую получить канонический вид в переменных с "двумя штрихами" $\Phi(x) = \xi_1''^2 - \xi_2''^2 + \xi_3''^2$.

Наконец, для построения канонического базиса найдем формулы перехода от исходной системы переменных к канонической, выразив самые "старые" переменные (без штрихов) через самые "новые" (с двумя штрихами). Получим (проверьте это самостоятельно) $\begin{cases} \xi_1 = \xi_1'' + \xi_2'' + \xi_3'', \\ \xi_2 = \xi_1'' - \xi_2'' - \xi_3'', \\ \xi_3 = \xi_3''. \end{cases}$ Значит, матрица перехода от исходного базиса к каноническому имеет вид $\| S \| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. Она очевидно невырожденная и ее столбцами (как известно!) служат координатные столбцы базиса к которому перешли, в базисе от которого переходили.

Иначе говоря. из матрицы перехода получаем канонический базис

$$\left\{ \| g_1'' \| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} , \quad \| g_2'' \| = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix} , \quad \| g_3'' \| = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix} \right\},$$

в котором матрица квадратичной формы имеет диагональный вид

$$\| \Phi \| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} .$$

Замечание: базис, в котором квадратичный функционал имеет диагональный или канонический вид, не единственный, равно как не является единственным сам канонический или диагональный вид квадратичного функционала в Λ^n, однако в силу теоремы инерции, в любом диагональном или каноническом базисе формула для квадратичной формы из примера 2 будет иметь два положительных коэффициента, один отрицательный и ни одного нулевого.

Знаковая определенность квадратичных форм

Использование элементарных преобразований для диагонального базиса квадратичной формы

Метод Лагранжа как метод непосредственного выделения полных квадратов не всегда оказывается наиболее простой (с точки зрения затрат вычислительных усилий) процедурой. Иногда приведение матрицы квадратичного функционала к диагональному (или каноническому) виду можно выполнить более эффективно путем использования некоторого набора элементарных преобразований.

Связь *диагонального* представления квадратичной формы и *канонического* является почти очевидной. Это - замена базиса, осуществляющая нормировку ненулевых λ_k с сохранением их знака. Например, делением каждой координаты ξ_k на $|\lambda_k|$.

Действительно, при переходе от исходного базиса $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ к новому $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$ с матрицей перехода $\| S \|$ матрица квадратичного функционала меняется по правилу $\| \Phi \|_{g'} = \| S \|^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_g \| S \|$.

Заметим также, что по правилу транспонирования произведения матриц имеем

$$\| \Phi \|_{g'}^{\mathrm{T}} = \left(\| S \|^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_g \| S \| \right)^{\mathrm{T}} = \| S \|^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_g^{\mathrm{T}} \left(\| S \|^{\mathrm{T}} \right)^{\mathrm{T}} = \| S \|^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_g \| S \| = \| \Phi \|_{g'} ,$$

то есть, из *симметричности* матрицы $\| \Phi \|_g$ следует *симметричность* матрицы $\| \Phi \|_{g'}$.

Этот материал - факультативный, "со звездочкой"	Будем теперь рассматривать матрицу $\lVert S \rVert$ как матрицу некоторого *элементарного* преобразования матрицы $\lVert \Phi \rVert_g$ такого, что умножение на нее слева $\lVert \Phi \rVert_g$ приводит последнюю к *верхнему треугольному* виду. То есть, матрица $\lVert \Phi \rVert_g \lVert S \rVert$ − *верхняя треугольная.* Согласно свойствам элементарных преобразований известно, что в этом же случае умножение матрицы $\lVert \Phi \rVert_g$ на $\lVert S \rVert^{\mathrm{T}}$ слева приведет ее к *нижнему треугольному* виду. Затем, если матрицу $\lVert \Phi \rVert_g \lVert S \rVert$ умножить слева на $\lVert S \rVert^{\mathrm{T}}$, то итоговая матрица $\lVert S \rVert^{\mathrm{T}} \lVert \Phi \rVert_g \lVert S \rVert$ окажется одновременно как верхней, так и нижней треугольной, т.е. *диагональной.* Пусть матрица $\lVert S \rVert$ такова, что матрица $\lVert \Phi \rVert_{g'} = \lVert S \rVert^{\mathrm{T}} \lVert \Phi \rVert_g \lVert S \rVert$ станет диагональной. При этом, матрица $\lVert S \rVert$ (как матрица перехода от исходного *стандартного* базиса к "*диагональному*" базису) по определению состоит из столбцов, получаемых при применении "диагонализирующего" преобразования к столбцам единичной матрицы. Поэтому, выполнив диагонализацию $\lVert \Phi \rVert_g$ некоторым набором элементарных преобразований (выполняемых на каждом шаге процедуры *как с ее строками, так и с ее столбцами*) и, применив тот же самый набор элементарных преобразований *только к столбцам* единичной матрицы, мы получим одновременно - как *диагональный* вид матрицы квадратичной формы $\lVert \Phi \rVert_{g'}$, - так и $\lVert x \rVert_g = \lVert S \rVert \lVert x \rVert_{g'}$ *формулы перехода* от исходного (стандартного) базиса $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \ldots, g'_n\}$, в котором матрица квадратичной формы оказывается диагональной.

Здесь и далее, для краткости будем назвать базис, в котором квадратичная форма имеет диагональный (канонический вид), диагональным (каноническим).

Применение вышеизложенного алгоритма (о котором следует помнить и который надо уметь использовать) иллюстрируют следующие примеры.

Пример 3а: *Привести в* Λ^2 *к диагональному виду квадратичную форму*

$$\Phi(x) = -3\xi_1^2 + 10\xi_1\xi_2 + 8\xi_2^2. \qquad (1)$$

Решение. В исходном базисе форма $\Phi(x)$ имеет матрицу $\left\|\begin{matrix}-3 & 5\\ 5 & 8\end{matrix}\right\|$, тогда расширенная исходная матрица будет $\left\|\begin{matrix}-3 & 5 & | & 1 & 0\\ 5 & 8 & | & 0 & 1\end{matrix}\right\|$.

1°. В процедуре выполним следующие элементарные операции:

- сначала заменим вторую строку *левой* части исходной матрицы суммой первой строки, умноженной на коэффициент 5, и второй строки, умноженной на коэффициент 3 , то есть,

$$5\cdot Стр_1 + 3\cdot Стр_2 \to Стр_2 \quad \text{получим.} \quad \left\|\begin{matrix}-3 & 5 & | & 1 & 0\\ 0 & 49 & | & 0 & 1\end{matrix}\right\|$$

- затем, в *обеих* частях (как в левой, так и в правой) *полученной* матрицы заменим второй столбец суммой первого столбца, умноженного на 5, и второго столбца, умноженного на 3, то есть,

$$5\cdot Стлб_1 + 3\cdot Стлб_2 \to Стлб_2 \quad \text{получим.} \quad \left\|\begin{matrix}-3 & 0 & | & 1 & 5\\ 0 & 147 & | & 0 & 3\end{matrix}\right\|$$

2°. Согласно изложенной ранее теории, левая часть расширенной матрицы есть матрица квадратичной формы в диагональном базисе, а правая матица перехода от исходного базиса к диагональному, то

$$\|\Phi\|_{g'} = \left\|\begin{matrix}-3 & 0\\ 0 & 147\end{matrix}\right\| \qquad \|S\| = \left\|\begin{matrix}1 & 5\\ 0 & 3\end{matrix}\right\|$$

или, в координатах

$$\Phi(x') = -3\xi'^2_1 + 147\xi'^2_2 \qquad (2) \qquad\qquad \begin{cases}\xi_1 = \xi'_1 + 5\xi'_2\\ \xi_2 = \qquad 3\xi'_2\end{cases} \qquad (3)$$

3°. Сделаем проверку, подставив формулы (3) в (1). Получим

$$\Phi(x') = -3(\xi'_1 + 5\xi'_2)^2 + 10(\xi'_1 + 5\xi'_2)_1(3\xi'_2) + 8(3\xi'_2)^2 =$$

$$= -3\xi'^2_1 - 30\xi'_1\xi'_2 - 75\xi'^2_2 + 30\xi'_1\xi'_2 + 150\xi'^2_2 + 72\xi'^2_2 = -3\xi'^2_1 + 147\xi'^2_2 .$$

Пример 3б: *Привести в* Λ^3 *к диагональному виду квадратичную форму*

$$\Phi(x) = -2\xi_1^2 - \xi_2^2 - 4\xi_3^2 - 8\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 - 8\xi_2\xi_3 .$$

Решение. В исходном базисе форма $\Phi(x)$ имеет матрицу $\begin{Vmatrix} -2 & -4 & 1 \\ -4 & -1 & -4 \\ 1 & -4 & -4 \end{Vmatrix}$.

1°. На *первом* шаге процедуры выполним следующие элементарные операции:

- заменим вторую строку исходной матрицы разностью второй и третьей строк;
- в полученной матрице заменим второй столбец разностью второго и третьего столбца,

в результате чего получаем матрицу вида $\begin{Vmatrix} -2 & -5 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{Vmatrix}$.

После этого, заменив в единичной матрице $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ второй столбец разностью второго и третьего, получим $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

2º. На *втором* шаге:

- заменяем вначале первую строку утроенной первой, сложенную со второй, взятой с коэффициентом 5.
- Затем такое же преобразование выполняется со столбцами.

Получаем следующие две матрицы:

$$\begin{Vmatrix} -93 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

3º. На *третьем* шаге заменяем третью строку первой, сложенную с третьей, взятой с коэффициентом 31.

Выполнив такие же преобразования со столбцами, соответственно получаем матрицы

$$\begin{Vmatrix} -93 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3751 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \\ -5 & -1 & 26 \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, мы заключаем, что переход к базису $\begin{Vmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} 3 \\ 5 \\ 26 \end{Vmatrix}$

по формулам перехода $\begin{cases} \xi_1 = 3\xi'_1 + 3\xi'_3, \\ \xi_2 = 5\xi'_1 + \xi'_2 + 5\xi'_3, \\ \xi_3 = -5\xi'_1 - \xi'_2 + 26\xi'_3, \end{cases}$ даст нам следующий (один из возможных) диагональный вид исходной квадратичной формы:

$$\Phi(x) = -93\xi_1'^2 + 3\xi_2'^2 - 3751\xi_3'^2 \ .$$

Исследование знака квадратичного функционала

Несмотря на неединственность координатного описания, квадратичные формы обладают рядом важных свойств, *инвариантных* относительно (то есть, не зависящих от) выбора базиса в Λ^n. О трех таких числовых характеристиках мы уже говорили. Это *количества положительных, отрицательных и нулевых* λ_k $k=[1,n]$ для координатных представлений квадратичной формы в диагональном (или каноническом) базисах.

На практике эти (и тесно с ними связанные) характеристики используют также под другими названиями.

Определение 1.

1°. Максимальное число положительных коэффициентов диагонального (канонического) вида квадратичной формы $\Phi(x)$ в Λ^n называется ее *положительным индексом инерции* и обозначается $\mathrm{rg}_+\Phi$.

2°. Максимальное число отрицательных коэффициентов диагонального (канонического) вида квадратичной формы $\Phi(x)$ в Λ^n называется ее *отрицательным индексом инерции* и обозначается $\mathrm{rg}_-\Phi$.

3°. Разность между положительным и отрицательным индексами инерции называется *сигнатурой* квадратичной формы $\Phi(x)$ в Λ^n и обозначается $\mathrm{sgn}\Phi = \mathrm{rg}_+\Phi - \mathrm{rg}_-\Phi$.

4°. Максимальное число не равных нулю коэффициентов канонического вида квадратичной формы $\Phi(x)$ в Λ^n называется его *рангом* и обозначается $\mathrm{rg}\,\Phi$.

Независимость от выбора диагонального базиса в Λ^n числовых характеристик квадратичных форм, указанных в определении 1, следует из теоремы инерции.

При решении прикладных задач также оказываются полезными числовые характеристики квадратичных форм, инвариантные для *любых* (необязательно, скажем, диагональных) базисов.

Такие свойства у квадратичных форм существуют. Например, как мы уже видели значение любой квадратичной формы одно и то же во всех базисах.

Имеются и более интересные случаи. Например, в Λ^2 форма $\Phi(x)=\xi_1^2+\xi_1\xi_2+\xi_2^2$ имеет положительные значения для любого ненулевого $x\in\Lambda^2$. А значение квадратичной формы (как мы видели) одинаково во всех базисах. Значит, это свойство будет у данной квадратичной формы в каждом базисе.

Это свойство становится очевидным, если применить метод Лагранжа (метод выделения полных квадратов):

$$\Phi(x)=\xi_1^2+\xi_1\xi_2+\xi_2^2=\xi_1^2+\xi_1\xi_2+\frac{\xi_2^2}{4}+\frac{3\xi_2^2}{4}=\left(\xi_1+\frac{\xi_2}{2}\right)^2+\left(\frac{\xi_2\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Возникает интересный с точки зрения приложений вопрос: можно ли делать заключения о наличии (или отсутствии) подобных свойств у квадратичных форм только, например, по виду их матрицы (без преобразования по Лагранжу и т.п.)?

Для того, что бы корректно ответить на этот вопрос вводится понятие *знаковой определенности* квадратичной формы.

Определение 2.

1°. Квадратичная форма $\Phi(x)$ называется *положительно* (*отрицательно*) *определенным на подпространстве* $\Omega^+ \subset \Lambda$, если $\Phi(x) > 0$ ($\Phi(x) < 0$) для любого ненулевого $x \in \Omega^+$.

2°. Если же Ω^+ (или Ω^-) совпадает с Λ, то говорят, что квадратичная форма $\Phi(x)$ является *положительно* (*отрицательно*) *определенной*.

3°. Если же $\Phi(x) \geq 0$ ($\Phi(x) \leq 0$) для всех ненулевых $x \in \Lambda$, то говорят, что квадратичная форма является *положительно* (*отрицательно*) *полуопределенной.* Иногда для таких квадратичных форм используют также и названия *неотрицательно* (*неположительно*) *определенная*.

4°. Если же $\Phi(x)$ на множестве $x \in \Lambda$ имеет как положительные, так и отрицательные значения, то говорят, что квадратичная форма не является *знакоопределенной.*

Заметьте, что в определении 2 нет предположений о существовании базиса в Λ.

С другой стороны, в Λ^n из теоремы инерции (как не очень сложно заметить) следует

Теорема 1. **Максимальная размерность подпространства в Λ^n, на котором квадратичная форма положительно (отрицательно) определена, равняется положительному (отрицательному) индексу инерции этой формы.**

В том случае, когда по каким-либо причинам применение определения 2 требует значительных затрат вычислительных ресурсов, можно попробовать использовать следующие условия, носящие название "*критерий Сильвестра*",

Предварительно вспомним, что для любой матрицы $\left\| \alpha_{ij} \right\|$ *минором порядка k* называется *детерминант* ее квадратной подматрицы, образованной элементами с некоторыми наборами строковых и столбцовых индексов: $\{ i_1, i_2, \dots i_k \}$ и $\{ j_1, j_2, \dots j_k \}$. В случае, когда эти наборы одинаковые, миноры называются *главными*.

Теорема 2. (Критерий Сильвестра)	**Для положительной определенности квадратичной формы в Λ^n необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы, *имеющие вид*** $$\Delta_k = \det\begin{Vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1k} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{k1} & \varphi_{k2} & \cdots & \varphi_{kk} \end{Vmatrix}; \quad k = [1,n], \qquad (1)$$ **были положительными.**

Теорема 3. **Для отрицательной определенности квадратичной формы в Λ^n необходимо и достаточно, чтобы главные миноры четного порядка вида (1) матрицы этой формы были положительны, а нечетного порядка – отрицательны.**

Поясним доказательство теоремы 3.

Пусть квадратичная форма $\Phi(x)$ *отрицательно* определенная, тогда форма $-\Phi(x)$ будет, очевидно, *положительно* определенной. Применяя к ней теорему 2 (критерий Сильвестра положительной определенности), получаем для главного минора k-го порядка (используя *линейное свойство* определителя, т.е., вынося из каждой строки -1) условие

$$\Delta_k = \det\begin{Vmatrix} -\varphi_{11} & -\varphi_{12} & \cdots & -\varphi_{1k} \\ -\varphi_{21} & -\varphi_{22} & \cdots & -\varphi_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\varphi_{k1} & -\varphi_{k2} & \cdots & -\varphi_{kk} \end{Vmatrix} = (-1)^k \det\begin{Vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1k} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{k1} & \varphi_{k2} & \cdots & \varphi_{kk} \end{Vmatrix} > 0 \quad \forall k = [1,n] \ ,$$

из которого следует утверждение теоремы 3.

Теорема 4. **Для отсутствия свойства знаковой определенности квадратичной формы в Λ^n необходимо и достаточно, чтобы** $\begin{cases} \mathrm{rg}_+ \Phi \geq 1, \\ \mathrm{rg}_- \Phi \geq 1. \end{cases}$

Факультативно (вне программы курса), для любознательных сообщим, что, к примеру:

> квадратичная форма *полуопределена положительно* тогда и только тогда, когда все (а не только угловые, вида (1)) ее главные миноры неотрицательны.

Заметим, что теорема 4 не очень удобна для решения задач, поскольку здесь фактически требуется знать какой-нибудь диагональный базис.

Однако, в качестве альтернативы можно попытаться выяснить, при каких условиях нарушаются *одновременно* теоремы 2 и 3 .

В качестве иллюстрации рассмотрим

Пример 4: *Исследовать в* Λ^2 *на знаковую определенность при любом* $\lambda \in \mathbf{R}$ *квадратичную форму* $\Phi(x) = \lambda\xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2 + (\lambda - 4)\xi_2^2$.

Решение. 1°. Матрица квадратичной формы здесь будет $\|\Phi\| = \left\|\begin{matrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda - 4 \end{matrix}\right\|$. Она имеет только два главных минора вида, указанного в теореме 2 :

$$\Delta_1 = \det\|\lambda\| = \lambda \qquad \text{и} \qquad \Delta_2 = \det\left\|\begin{matrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda - 4 \end{matrix}\right\| = \lambda^2 - 4\lambda - 4 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ ,$$

где $\lambda_1 = 2 - 2\sqrt{2} \approx -0.8$ и $\lambda_2 = 2 + 2\sqrt{2} \approx 4.8$.

2°. Квадратичная форма будет положительно определенной по критерию Сильвестра (теорема 2), тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \Delta_1 > 0, \\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda > 0, \\ (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda > \lambda_2 .$$

3°. Квадратичная форма будет отрицательно определенной по критерию Сильвестра (теорема 3), тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \Delta_1 < 0, \\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < 0, \\ (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda < \lambda_1 .$$

4°. Используя пункты 2° и 3°, приходим к заключению, теоремы 2 и 3 одновременно нарушаются в случае $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$. Причем форма нарушения есть *строгое* неравенство вида $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) < 0$. Следовательно, $\Phi(x)$ не является знакоопределенной для $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$.

5°. Среди вещественных λ остались неисследованными только два значения: $\lambda = \lambda_1 = 2 - 2\sqrt{2}$ и $\lambda = \lambda_2 = 2 + 2\sqrt{2}$. Здесь мудрить не будем. Просто найдем конкретные формулы для $\Phi(x)$ в этих случаях.

Имеем, вспоминая упражнения по алгебре для 8 класса:

1) при $\lambda = 2 - 2\sqrt{2}$

$$\Phi(x) = \left(2 - 2\sqrt{2}\right)\xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2 - \left(2 + 2\sqrt{2}\right)\xi_2^2 =$$

$$= (-2)\left(\left(\sqrt{2} - 1\right)\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + \left(\sqrt{2} + 1\right)\xi_2^2\right) =$$

$$= (-2)\left(\left(\sqrt{\sqrt{2} - 1}\;\xi_1\right)^2 - 2\sqrt{\sqrt{2} - 1}\,\xi_1\sqrt{\sqrt{2} + 1}\,\xi_2 + \left(\sqrt{\sqrt{2} + 1}\,\xi_2\right)^2\right),$$

поскольку, как можно заметить, $\sqrt{\sqrt{2} - 1}\sqrt{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1} = 1$. Тогда окончательно получаем, что

$$\Phi(x) = (-2)\left(\sqrt{\sqrt{2} - 1}\;\xi_1 - \sqrt{\sqrt{2} + 1}\,\xi_2\right)^2 \le 0\ ,$$

причем $\Phi(x) = 0$ в некоторых ненулевых точках, например, вида

$$x = \{\ \sqrt{\sqrt{2} + 1}\ t\ ;\ \sqrt{\sqrt{2} - 1}\ t\ \}\quad \forall t \ne 0\ ,$$

т.е. квадратичная форма $\Phi(x)$ при $\lambda = 2 - 2\sqrt{2}$ отрицательно полуопределена (определена неположительно).

2) Покажите самостоятельно, что при $\lambda = 2 + 2\sqrt{2}$ квадратичная форма полуопределена положительно.

Замечания: 1) Данную задачу, конечно можно было бы решить методом Лагранжа, не прибегая к использованию теорем 2 и 3, однако, для $n \ge 3$ это уже вряд ли разумно.

2) В экзаменационной практике встречаются задачи с формулировкой типа: "исследовать квадратичную форму на положительную определенность", не на *знаковую*(!), а только на *положительную* определенность. Будьте внимательны и не делайте лишнюю работу.