# Линейные операторы в евклидовом пространстве

Ранее мы рассмотрели оператор ортогонального проектирования на конечномерное подпространство в евклидовом пространстве. Однако в этом пространстве можно выделять и другие специфические классы линейных операторов, для определения которых используется операция *скалярного произведения*.

Рассмотрим еще три класса линейных преобразований, существующих только в *евклидовых* пространствах. Это *сопряженные*, *самосопряженные* и *ортогональные* операторы.

Для большей наглядности приведем сразу определения этих операторов. А их основные свойства рассмотрим по отдельности.

Определение 1. В евклидовом пространстве $E$, :

1°. Линейный оператор $\hat{A}^+$ называется *сопряженным* линейному оператору $\hat{A}$, если $\forall x, y \in E$ имеет место равенство $(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+ y)$.

2°. Линейный оператор $\hat{R}$ называется *самосопряженным*, если $\forall x, y \in E$ имеет место равенство $(\hat{R}x, y) = (x, \hat{R}y)$.

3°. Линейный оператор $\hat{Q}$ называется *ортогональным*, если $\forall x, y \in E$ имеет место равенство $(\hat{Q}x, \hat{Q}y) = (x, y)$.

## Свойства сопряженных операторов

Вначале приведем примеры сопряженных операторов.

Пример 1. Построим оператор, сопряженный линейному оператору дифференцирования $\hat{A} = \dfrac{d}{d\tau}$ , который действует в евклидовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций, равных нулю вне некоторого конечного интервала, со скалярным произведением $(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(\tau) d\tau$ .

Для этого воспользуемся правилом интегрирования "по частям", согласно которому имеют место равенства

$$(\hat{A}x, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(\tau)}{d\tau} y(\tau) d\tau = x(\tau) y(\tau) \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \frac{dy(\tau)}{d\tau} d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left( -\frac{dy(\tau)}{d\tau} \right) d\tau = (x, \hat{A}^{+} y) .$$

Из которых следует, искомым сопряженным оператором будет оператор $\hat{A}^{+} = -\dfrac{d}{d\tau}$.

Пример 2. Рассмотрим теперь конечномерное евклидово пространство $E^n$ с базисом $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ и выясним *связь матриц линейных операторов* $\hat{A}$ *и* $\hat{A}^+$ в этом базисе.

Решение: Пусть матрицы операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}^+$ имеют соответственно вид $\|\hat{A}\|_g$ и $\|\hat{A}^+\|_g$, а координатные столбцы элементов $x$ и $y$ в базисе $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ –

$$\|x\|_g = \left\|\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \dots\\ \xi_n\end{matrix}\right\| \quad \text{и} \quad \|y\|_g = \left\|\begin{matrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \dots\\ \eta_n\end{matrix}\right\|,$$

тогда равенство $(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+ y)$ можно записать как

$$(\|\hat{A}\|_g \|x\|_g)^{\mathrm{T}} \|\Gamma\|_g \|y\|_g = \|x\|_g^{\mathrm{T}} \|\Gamma\|_g \|\hat{A}^+\|_g \|y\|_g ,$$

где $\|\Gamma\|_g$ – базисная матрица.

В силу соотношения $(\|A\|\|B\|)^{\mathrm{T}} = \|B\|^{\mathrm{T}}\|A\|^{\mathrm{T}}$ последнее равенство можно преобразовать к виду $\|x\|_g^{\mathrm{T}}(\|\hat{A}\|_g^{\mathrm{T}}\|\Gamma\|_g - \|\Gamma\|_g\|\hat{A}^+\|_g)\|y\|_g = 0,$ а поскольку это равенство справедливо при любых $x$ и $y$, то, заключаем, что матрица, стоящая в круглых скобках, – нулевая, а из соотношения

$$\|\hat{A}\|_g^{\mathrm{T}}\|\Gamma\|_g - \|\Gamma\|_g\|\hat{A}^+\|_g = \|O\| \text{ следует } \|\hat{A}^+\|_g = \|\Gamma\|_g^{-1}\|\hat{A}\|_g^{\mathrm{T}}\|\Gamma\|_g ,$$

которое, в частности, для ортонормированного базиса $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ имеет вид $\|\hat{A}^+\|_e = \|\hat{A}\|_e^{\mathrm{T}}$.

Теперь сформулируем (без доказательств, которые можно найти в конспектах лекций или других ресурсах) основные свойства сопряженных операторов в виде следующих теорем.

Теорема 1. **Каждый линейный оператор в евклидовом пространстве $E^n$ имеет единственный сопряженный оператор.**

Теорема 2. **Для любых линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, действующих в $E$, имеет место равенство $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+$.**

Теорема 3. **Имеет место равенство $(\hat{A}^+)^+ = \hat{A}$.**

Теорема 4. ***Ортогональное дополнение области значений* оператора $\hat{A}$ в $E^n$ является *ядром* оператора $\hat{A}^+$.**

Теорема 4 допускает любопытную интерпретацию. Если ее условие и утверждение записать в координатной форме, то получится теорема, равносильная теореме *Фредгольма*, о необходимом и достаточном условии совместности неоднородной системы линейных уравнений. Кому интересно, проверьте это самостоятельно.

## Самосопряженные операторы

Линейный оператор $\hat{R}$ называется *самосопряженным*, если $\forall x, y \in E \quad (\hat{R}x, y) = (x, \hat{R}y)$.

Пример 3. В евклидовом пространстве операторы вида $\hat{A} + \hat{A}^{+}$, $\hat{A}\hat{A}^{+}$ и $\hat{A}^{+}\hat{A}$ будут самосопряженными для любого линейного оператора $\hat{A}$.

Решение: Действительно, для оператора $\hat{A}^{+}\hat{A}$, например, мы будем иметь, что $\forall x, y \in E$. $(\hat{A}^{+}\hat{A}x, y) = (\hat{A}x, \hat{A}y) = (x, \hat{A}^{+}\hat{A}y)$, откуда и следует его самосопряженность.

А, если в качестве $\hat{A}$ взять из примера 1 оператор $\hat{A} = \frac{d}{d\tau}$, то из предыдущих рассуждений следует, то оператор

$$\hat{A}\hat{A}^{+} = \frac{d}{d\tau}\left(-\frac{d}{d\tau}\right) = -\frac{d^2}{d\tau^2}$$

будет *самосопряженным*. Запомним это!

Сформулируем основные свойства самосопряженных операторов в виде следующих теорем.

Теорема 1. **Линейный оператор $\hat{R}$ в $E^n$ является самосопряженным тогда и только тогда, когда его матрица в каждом ортонормированном базисе *симметрическая*.**

Теорема 2. **Все собственные значения самосопряженного оператора $\hat{R}$ в $E^n$ *вещественные* числа.**

Теорема 3. **Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, *попарно ортогональны*.**

Теорема 4. **Пусть $E'$ – инвариантное подпространство самосопряженного оператора $\hat{R}$, действующего в $E$, и пусть $E''$ – ортогональное дополнение к $E'$ в $E$. Тогда $E''$ – также инвариантное подпространство оператора $\hat{R}$.**

Теорема 5. **Для любого самосопряженного оператора $\hat{R}$ в $E^n$ *существует ортонормированный базис*, состоящий из собственных векторов $\hat{R}$.**

Теорема 6. **Два самосопряженных оператора $\hat{A}$ и $\hat{B}$ имеют общую систему собственных векторов в $E^n$ тогда и только тогда, когда $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$.**

И мы не планировали здесь доказывать эти теоремы, все же трудно удержаться и не привести доказательство теоремы 3, редкое по своей компактности и изящности.

Доказательство теоремы 3.

Пусть для самосопряженного оператора $\hat{R}$ имеют место равенства $\hat{R}f_1 = \lambda_1 f_1$ и $\hat{R}f_2 = \lambda_2 f_2$ , где ненулевые элементы $f_1$ и $f_2$ – собственные векторы оператора $\hat{R}$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – соответствующие им собственные значения. Умножив эти равенства соответственно: первое – скалярно справа на $f_2$ , второе – скалярно слева на $f_1$ , получим

$$\begin{cases} (\hat{R}f_1, f_2) = (\lambda_1 f_1, f_2), \\ (f_1, \hat{R}f_2) = (f_1, \lambda_2 f_2) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (\hat{R}f_1, f_2) = \lambda_1 (f_1, f_2), \\ (f_1, \hat{R}f_2) = \lambda_2 (f_1, f_2). \end{cases}$$

Вычитая эти равенства почленно и учитывая, что $\hat{R}$ – самосопряженный оператор (т.е. левые части равны), приходим к равенству $(\lambda_1 - \lambda_2)(f_1, f_2) = 0$ , откуда, в силу $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , $(f_1, f_2) = 0$ .

В качестве упражнения проверьте справедливость следующих следствий:

Следствие 1. **(*Признак самосопряженности*): если линейный оператор в $E^n$ имеет симметриическую матрицу в некотором ортонормированном базисе, то он самосопряженый.**

Следствие 2. **Размерность собственного инвариантного подпространства, отвечающего некоторому собственному значению самосопряженного оператора, равна кратности этого собственного значения.**

Следствие 3. **Если $\|R\|$ симметрическая матрица, то существует ортогональная матрица $\|Q\|$ такая, что матрица $\|D\| = \|Q\|^{-1}\|R\|\|Q\| = \|Q\|^{\mathrm{T}}\|R\|\|Q\|$ диагональная.**

## Ортогональные операторы

Линейный оператор $\hat{Q}$, действующий в евклидовом пространстве $E$, называется *ортогональным* (или *изометрическим*), если $\forall x, y \in E$ имеет место равенство $(\hat{Q}x, \hat{Q}y) = (x, y)$.

Из этого определения следует, что ортогональный оператор сохраняет нормы элементов и величины углов между ними. Действительно,

$$\left| \hat{Q}x \right| = \sqrt{(\hat{Q}x, \hat{Q}x)} = \sqrt{(x, x)} = |\, x \,| \ ;$$

$$\cos\psi = \frac{(\hat{Q}x, \hat{Q}y)}{\left| \hat{Q}x \right| \left| \hat{Q}y \right|} = \frac{(x, y)}{|\, x \,|\,|\, y \,|} = \cos\varphi \ ; \quad x, y \in E,$$

где $\varphi$ – величина угла между ненулевыми элементами $x$ и $y$, а $\psi$ – величина угла между элементами $\hat{Q}x$ и $\hat{Q}y$.

Сформулируем (без доказательств) основные свойства ортогональных операторов в виде следующих теорем.

Теорема 7. **Если ортогональный оператор $\hat{Q}$ имеет *сопряженный* оператор, то он имеет и *обратный* оператор, причем $\hat{Q}^{-1} = \hat{Q}^{+}$.**

Теорема 8. **Матрица ортогонального оператора в $E^n$ в каждом ортонормированном базисе *ортогональная*.**

Теорема 9. **Любой линейный оператор $\hat{A}$ в $E^n$ с $\det\|\hat{A}\| \neq 0$ может быть единственным образом представлен в виде $\hat{A} = \hat{Q}\hat{R}$, где оператор $\hat{Q}$ ортогональный, а оператор $\hat{R}$ – самосопряженный и имеющий положительные собственные значения.**

Теорема 9 в математической литературе часто именуется теоремой *о полярном разложении*.

В качестве упражнения проверьте справедливость следующих следствий:

Следствие 3. **Операторы $\hat{Q}^{+}$ и $\hat{Q}^{-1}$ также ортогональные.**

Следствие 4. **(*Признак ортогональности*) Для того чтобы линейный оператор в $E^n$ был *ортогональным*, достаточно, чтобы его матрица была ортогональной в некотором *ортонормированном* базисе.**