Уравнения первого порядка в дифференциалах

Если в уравнении (1.1.1) производную $y'(x)$ представить как отношение дифференциалов переменных y и x, то оно может быть записано в виде $dy - f(x,y)dx = 0$, что позволяет рассматривать уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1.4.1}$$

как обобщение линейного уравнения первого порядка $y' = f(x,y)$, называемое *уравнением первого порядка в дифференциалах.*

Мы будем предполагать, что функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в области $\Omega \in E^2$.

Что есть решение уравнения в дифференциалах?

Определение 1.4.2	Непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\left\lVert \begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right\rVert$, где $t \in \Theta \subseteq R$, называется *частным решением* уравнения (1.4.1), если $\forall\, t \in \Theta$: – $\left\lVert \begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right\rVert \in \Omega\,;$ – $\lvert x'(t)\rvert + \lvert y'(t)\rvert > 0\,;$ – $P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t) = 0\,.$

Из этого определения следует, что изображающая частное решение интегральная кривая является в области Ω гладкой линией, заданной параметрически как $\left\lVert \begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right\rVert \quad \forall t \in \Theta$. Эта интегральная кривая не обязательно является графиком какой-либо функции $y = y(x)$. Она может иметь участки, которые есть графики функции $x = x(y)$.

Рассмотрим методы решения линейных уравнений первого порядка в дифференциалах. К этим методам можно отнести рассмотренные ранее случаи уравнений с разделяющимися переменными и однородных уравнений.

Однако здесь имеются и новые возможности. Пусть в области Ω $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны. Тогда можно дать

Определение 1.4.3	Дифференциальное уравнение первого порядка, имеющее вид (1.4.1), называется *уравнением первого порядка в полных дифференциалах*, если существует функция $U(x,y)$, непрерывно дифференцируемая в области Ω такая, что $$dU \equiv P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Тогда будет справедлива теорема, утверждающая, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) \ ,$$

а все решения уравнения (1.4.1) удовлетворяют равенству $U(x,y) = C$.

Выясним, при каких условиях на $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ такая функция $U(x,y)$ существует. А если существует, то как ее можно найти?

Необходимым условием существования такой функции является выполнение равенства:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,, \tag{1.4.3}$$

которое, в силу определения 1.4.3 и условия непрерывности вторых частных производных функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, вытекает из

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Нужно отметить, что в случае, когда область Ω является *односвязной*, условие (1.4.3) оказывается *достаточным* для существования функции $U(x, y)$. Соответствующая теорема доказывается в курсе математического анализа.

Конкретный вид функции $U(x, y)$ может быть найден из системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x, y) \ , \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y) \ . \end{cases} \tag{1.4.4}$$

Задача 1.4.1 Решить уравнение

$$e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0 \ .$$

Решение. Сначала проверим выполнение условия (1.4.3). Коэффициенты при дифференциалах суть непрерывно дифференцируемые функции на всей координатной плоскости и для них

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^{-y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ ,$$

то есть данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах.

Система уравнений (1.4.4) в данном случае имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial x} = e^{-y} \ , \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = -2y - xe^{-y} \ . \end{array} \right.$$

Из первого уравнения этой системы находим, что $U(x,y) = xe^{-y} + C(y)$. Подставляя это выражение во второе уравнение, получаем

$$-xe^{-y} + C'(y) = -2y - xe^{-y} \qquad \Rightarrow \qquad C(y) = -y^2 + K \ .$$

Решение получено.

И, окончательно, из $U(x,y) = xe^{-y} - y^2 + K$ получаем ответ задачи: $xe^{-y} - y^2 = C$.

Пусть теперь уравнение (1.4.1) таково, что в Ω $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то есть данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах.

В этом случае можно поставить задачу поиска непрерывно дифференцируемой и не равной тождественно нулю в области Ω функции $\mu(x,y)$, такой что $\dfrac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$.

Например для уравнения $x^2y^3\,dx + (x^3y^2 + x)\,dy = 0$ – это функция $\mu(x,y) = \dfrac{1}{xy}$, поскольку после умножения на нее, уравнение становится уравнением в полных дифференциалах:

$$xy^2\,dx + x^2y\,dy + \frac{dy}{y} = 0 \quad \text{или} \quad d\left(\frac{x^2y^2}{2} + \ln|y|\right) = 0.$$

Заметим, что при этом теряются решения исходного уравнения: $x = 0$ и $y = 0$.

Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы и не обращаются в ноль одновременно в Ω, то такая функция, называемая *интегрирующим множителем*, существует (всегда!) и удовлетворяет, следующему из (1.4.3), уравнению

$$Q\frac{\partial\mu}{\partial x}-P\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu\ . \qquad (1.4.5)$$

Уравнение (1.4.5) есть уравнение в частных производных первого порядка и его интегрирование, вообще говоря, более сложная задача, чем поиск решений уравнения (1.4.1).

Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

Рассмотрим теперь методы решения уравнений 1-го порядка, не разрешенных относительно производной. Эти уравнения согласно формуле (0.1.3) при $n = 1$ и определению (0.1.4) записываются в виде

$$F\left(x, y, y'\right) = 0\ , \tag{1.5.1}$$

где $F(x, y, z)$ – известная функция от трех переменных, непрерывная в непустой области $\Omega \subseteq E^3$, а $y(x)$ — искомая непрерывно дифференцируемая функция от $x \in X$.

В рамках этого параграфа условимся обозначать «штрихом» дифференцирование по переменной x, а «верхней точкой» дифференцирование по t. Для дальнейших рассуждений оказывается удобным

Определение 1.5.1	Вектор-функция $$\left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{array} \right. \qquad t \in \Theta \qquad (1.5.2)$$ называется *частным решением в параметрической форме* дифференциального уравнения (1.5.1), если $\forall t \in \Theta$: – $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы ;
	– $\varphi(t) \in X$, $\quad \dot{\varphi}(t) \neq 0$ и $\quad \left\| \begin{matrix} \varphi(t) & \psi(t) & \dfrac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} \end{matrix} \right\|^{\mathrm{T}} \in \Omega$; – $F\left(\varphi(t),\ \psi(t),\ \dfrac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} \right) \ = \ 0$.

Для решения уравнения (1.5.1) в общем случае можно применить *метод введения параметра*, состоящего в замене $y' = p$ с последующим решением алгебраическо-дифференциальной системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y, p) = 0, \\ dy = p\,dx. \end{array} \right. \tag{1.5.3}$$

Имеет место

Теорема 1.5.1 **Система уравнений (1.5.3) и уравнение (1.5.1) равносильны.**

Если $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in \Theta$ – решение уравнения (1.5.1), то в силу

$$p(t) = y'(x) = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} = \frac{\dot{\psi}(t)\ dt}{\dot{\varphi}(t)\ dt} = \frac{dy}{dx}$$

Опишем теперь схему решения системы (1.5.3). Предположим, что существуют непрерывно дифференцируемые функции $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$ и $p = h(u,v)$, определенные для всех $(u,v) \in \Psi \subseteq E^2$, такие, что

$$F(f(u,v), g(u,v), h(u,v)) \ \equiv\ 0\ .$$

Кроме того потребуем, чтобы ранг матрицы Якоби был равен двум, то есть чтобы

$$\operatorname{rg}\left\|\begin{array}{cc} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial p}{\partial u} & \dfrac{\partial p}{\partial v} \end{array}\right\| = 2.$$

Отметим, что геометрически данную замену переменных можно трактовать как смену представления некоторой гладкой поверхности S в E^3 при помощи уравнения $F(x,y,p)=0$ на ее параметрическое описание:

$$\left\{\begin{array}{l} x=f(u,v)\ , \\ y=g(u,v)\ , \\ p=h(u,v) \end{array}\right. \qquad \forall (u,v)\in\Psi\ . \tag{1.5.4}$$

Если сформулированные выше условия на функции $f(u,v)$, $g(u,v)$ и $h(u,v)$ выполнены, то в силу (доказываемой в курсе математического анализа) теоремы о замене переменных в записи системы (1.5.3) можно перейти от переменных $\{x,y,p\}$ к переменным $\{u,v\}$. При этом первое ее уравнение удовлетворяется в Ψ тождественно, а второе принимает вид

$$\frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial v}dv = h(u,v)\left(\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv\right)$$

или

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u} - h\frac{\partial f}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial g}{\partial v} - h\frac{\partial f}{\partial v}\right)dv = 0\ . \tag{1.5.5}$$

Задача Коши для уравнений, не разрешенных относительно производной

Тот факт, что для уравнений вида (1.5.1) упорядоченная пара чисел $\{x_0;\ y_0\}$ может вовсе не определять или же определять неоднозначно (даже локально!) частное решение таких уравнений, приводит к необходимости изменения постановки задачи Коши для уравнений первого порядка, неразрешенных относительно производной.

Определение 1.5.2	Задача Коши для уравнения $F(x,y,y')=0$ формулируется так: найти $y(x)$, при условиях: $$\begin{cases} y(x_0)=y_0\ , \\ y'(x_0)=p_0\ , \\ F(x_0,y_0,p_0)=0\ . \end{cases} \qquad (4.6.2)$$ При этом тройка чисел $\|\ x_0\ \ y_0\ \ p_0\ \|^{\mathrm{T}} \in \Omega \subseteq E^3$ называется *начальными условиями задачи Коши.*

Определение 4.6.1	Частное решение $y^*(x)$ уравнения $F(x,y,y')=0$ называется *особым*, если в каждой точке его интегральной кривой решение задачи Коши существует, но не единственно.

Условия однозначной разрешимости задачи Коши (1.5.1) – (4.6.2) дает

Теорема 4.6.1 **Пусть функции** $F(x,\, y,\, d)$ **и** $\dfrac{\partial F}{\partial d}$ **непрерывны в области** G **и пусть** $\left.\dfrac{\partial F}{\partial d}\right|_{(x_0,\, y_0,\, d_0)} \neq 0$, **тогда найдется** $\delta > 0$ **такое, что решение задачи Коши (1.5.1) – (4.6.2) существует и единственно на интервале** $(x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$.

Рассмотрим теперь случай, когда условия теоремы 4.6.1 не выполняются.

Аналитически для существования особых решений необходимо нарушение условий теоремы 4.6.1, которое может быть сформулировано в виде системы уравнений

$$\begin{cases} F(x,y,d) = 0\,, \\ \dfrac{\partial F}{\partial d}(x,y,d) = 0\,. \end{cases} \tag{4.6.4}$$

Если из этой системы исключить d, то переменные x и y будут, вообще говоря, связаны некоторым соотношением вида $D(x,y) = 0$.

Определение 4.6.2	Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $D(x,y) = 0$, называется *дискриминантной кривой* уравнения (1.5.1).

Проиллюстрируем это определение следующими задачами.

`Задача 4.6.1a` Найти дискриминантные кривые и особые решения уравнений.

Пусть $y'^2 = y$. Решив систему (4.6.4) $\begin{cases} d^2 - y = 0\,, \\ 2d = 0 \end{cases}$ получим дискриминантную кривую вида $y = 0$. Это – очевидно решение.

При этом исходное уравнение также имеет решения вида $y(x) = \left(\dfrac{x}{2} + C\right)^2$. Нетрудно убедиться, что $y^*(x) = 0$ — особое решение (см. рис. 4.5.a).

Действительно, для любой точки x_0 на вещественной оси существует число $C = -\dfrac{x_0}{2}$ такое, что

$$\begin{cases} y(x_0) \ = 0 = y^*(x_0)\,, \\ y'(x_0) = 0 = y^{*\prime}(x_0)\,. \end{cases}$$

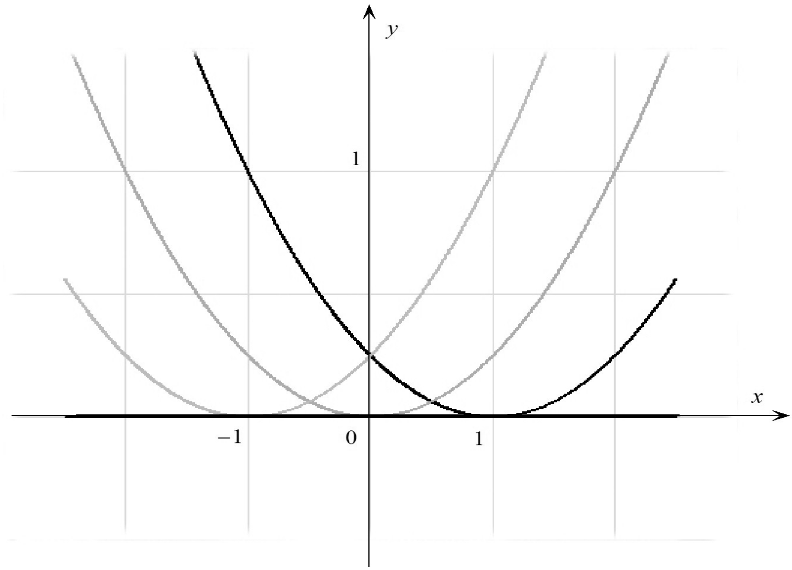

Рис. 1. Интегральные кривые задачи 4.6.1 (а)

Задача 4.6.1b

Найти дискриминантные кривые и особые решения уравнений.

Пусть $y'^2 = x$. Из системы (4.6.4) $\left\{ \begin{array}{l} d^2 - x = 0\,, \\ 2d = 0 \end{array} \right.$ находим, что дискриминантная кривая есть $x = 0$. Данное уравнение имеет решения $y = \pm\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C$, однако дискриминантная кривая $x = 0$ – не решение уравнения, а геометрическое место *точек возврата* его интегральных кривых.
(См. рис. 4.5.b)

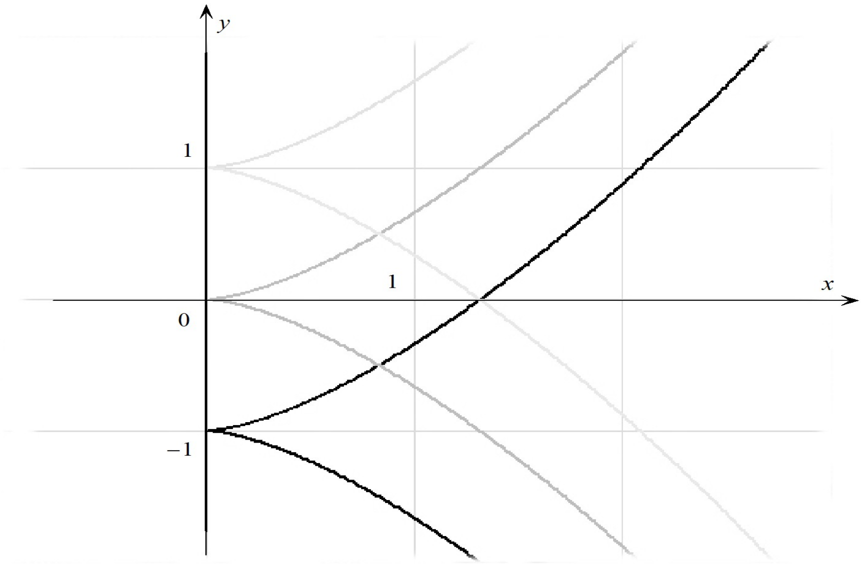

Рис. 2. Интегральные кривые задачи 4.6.1 (b)

Задача 4.6.1c

Найти дискриминантные кривые и особые решения уравнений.

Пусть $y'^2 - 4y^3(1-y) = 0$. Система (4.6.4) в этом случае такова

$$\begin{cases} d^2 - 4y^3(1-y) = 0\,, \\ 2d = 0\,. \end{cases}$$

Значит, дискриминантная кривая задается уравнением $y^3(1-y) = 0$ и состоит из двух ветвей: $y = 0$ и $y = 1$. Легко видеть, что обе они являются решениями. Проверьте самостоятельно, что исходное уравнение также имеет решения

$$y = \frac{1}{1 + (x - C)^2}\,.$$

Заметим, что при этом на $y = 1$ единственность нарушается, а на $y = 0$ – нет. Значит, $y = 0$ – неособое решение. Наконец, поскольку $y = 1$ есть касательная к нелинейным интегральным кривым, делаем заключение, что $y = 1$ – особое решение. (См. рис. 4.5.c)

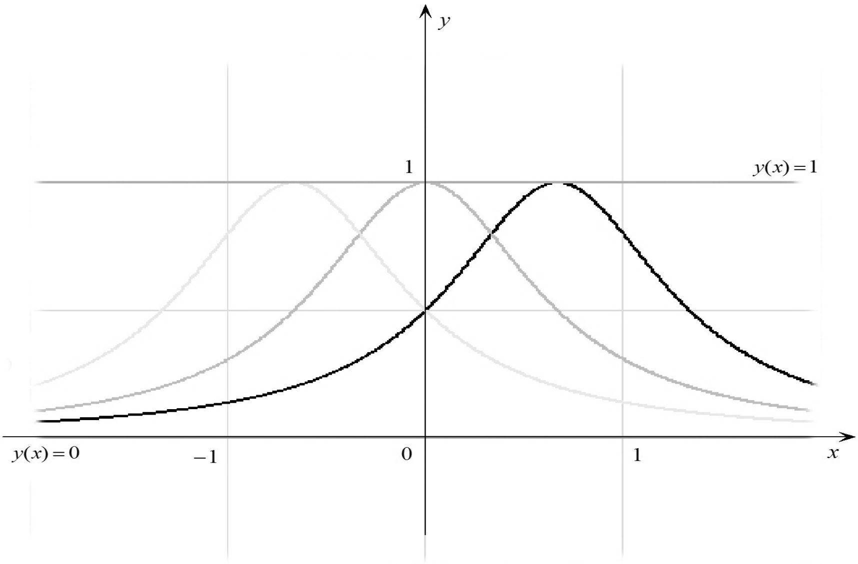

Рис. 3. Интегральные кривые задачи 4.6.1 (c)

В общем случае, для выделения особого решения уравнения (1.5.1) следует:

1°. Найти общее решение уравнения (1.5.1).

2°. Найти дискриминантные кривые уравнения (1.5.1), которые являются частными решениями этого уравнения.

3°. Проверить выполнение определения особого решения для дискриминантных кривых, являющихся частными решениями уравнения (1.5.1).

Более конкретно, последовательность шагов исследования в п. 3° следующая.

Пусть $y(x, C)$ $\forall x \in [a, b]$ есть однопараметрическое множество частных решений уравнения (1.5.1), а $y^*(x)$ – частное решение этого уравнение, которое подозревается в том, что оно особое. Решение $y^*(x)$ будет особым, если $\forall x \in [a, b]$ у *переопределенной* системы

$$\left\{\begin{array}{ccc} y(x,C) & = & y^*(x)\ , \\ \dfrac{\partial y(x,C)}{\partial x} & = & \dfrac{d\,y^*(x)}{d\,x} \end{array}\right. \tag{4.6.5}$$

найдется хотя бы одно решение $C = C(x)$.