Линейные уравнения $n-$го порядка. Основные понятия и свойства

Определение 2.1.2	Уравнение вида $$y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\dots$$ $$\dots+a_{n-1}(x)y'(x)+a_n(x)y(x)=b(x)\,, \qquad (2.1.1)$$ где известные функции $a_1(x),\ a_2(x),\ \dots\ a_n(x)$ и $b(x)$ непрерывны $\forall x\in X$, а искомая функция $y(x)$ n раз непрерывно дифференцируема $\forall x\in X$, называется *линейным дифференциальным уравнением $n-$го порядка.*

Данное название оправдывается тем, что неизвестная функция $y(x)$, так же как и ее производные, входит в уравнение (2.1.1) линейно, в то время как функции $a_1(x),\ a_2(x),\ \dots\ a_n(x)$ и $b(x)$ могут быть и нелинейными. Как и раньше, в случае $b(x)\equiv 0\ x\in X$ это уравнение будем называть *однородным*, иначе – *неоднородным.*

Основные свойства решений уравнения (2.1.1) описывают:

Теорема 2.1.1 **Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ суть два частных решения однородного уравнения (2.1.1), то $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ – также частное решение этого уравнения $\forall\, C_1,\ C_2$.**

Доказательство

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения однородного уравнения, то

$$y_1^{(n)}(x)+a_1(x)y_1^{(n-1)}(x)+\ldots+a_{n-1}(x)y_1'(x)+a_n(x)y_1(x)=0 \quad \text{и}$$

$$y_2^{(n)}(x)+a_1(x)y_2^{(n-1)}(x)+\ldots+a_{n-1}(x)y_2'(x)+a_n(x)y_2(x)=0\,.$$

Умножив первое равенство на C_1, а второе на C_2, и сложив результаты умножения почленно, в силу линейности операции дифференцирования получим

$$\Big(C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\Big)^{(n)}+a_1(x)\Big(C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\Big)^{(n-1)}+\ldots$$

$$\ldots+a_{n-1}(x)\Big(C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\Big)'+a_n(x)\Big(C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\Big)=0\,.$$

Но последнее равенство означает, что $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ есть частное решение однородного уравнения (2.1.1).

Теорема доказана.

Следствие 2.1.1 **Множество всех частных решений однородного уравнения (2.1.1) является линейным пространством.**

Покажите самостоятельно, что это следствие справедливо, проверив аксиоматику линейного пространства.

Теорема 2.1.2 **Если $y_0(x)$ – частное решение однородного, а $y^*(x)$ – частное решение неоднородного уравнения (2.1.1), то $y_0(x) + y^*(x)$ есть частное решение неоднородного уравнения (2.1.1).**

Доказательство

Поскольку $y_0(x)$ и $y^*(x)$ — решения однородного и неоднородного уравнений (2.1.1) соответственно, то верны равенства

$$y_0^{(n)}(x)+a_1(x)y_0^{(n-1)}(x)+\ldots+a_{n-1}(x)y_0'(x)+a_n(x)y_0(x)=0 \quad \text{и}$$

$$y^{*(n)}(x)+a_1(x)y^{*(n-1)}(x)+\ldots+a_{n-1}(x)y'^{*}(x)+a_n(x)y^*(x)=b(x).$$

Складывая эти равенства почленно и используя линейность операции дифференцирования, получаем

$$\Big(y_0(x)+y^*(x)\Big)^{(n)}+a_1(x)\Big(y_0(x)+y^*(x)\Big)^{(n-1)}+\ldots$$

$$\ldots+a_{n-1}(x)\Big(y_0(x)+y^*(x)\Big)'+a_n(x)\Big(y_0(x)+y^*(x)\Big)=b(x)\ .$$

Но последнее равенство означает, что $y_0(x)+y^*(x)$ есть частное решение неоднородного уравнения (2.1.1).

Теорема доказана.

Теорема 2.1.3 **Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ суть два частных решения неоднородного уравнения (2.1.1), то $y_1(x) - y_2(x)$ есть частное решение однородного уравнения (2.1.1).**

Доказательство

Поскольку $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения неоднородного уравнения (2.1.1), то верны равенства

$y_1^{(n)}(x)+a_1(x)y_1^{(n-1)}(x)+\ldots+a_{n-1}(x)y_1'(x)+a_n(x)y_1(x) = b(x)$ и

$y_2^{(n)}(x)+a_1(x)y_2^{(n-1)}(x)+\ldots+a_{n-1}(x)y_2'(x)+a_n(x)y_2(x) = b(x)$.

Вычитая эти равенства почленно, в силу линейности операции дифференцирования, получаем

$$\Big(y_1(x) - y_2(x)\Big)^{(n)} + a_1(x)\Big(y_1(x) - y_2(x)\Big)^{(n-1)} + \ldots$$

$$\ldots + a_{n-1}(x)\Big(y_1(x) - y_2(x)\Big)' + a_n(x)\Big(y_1(x) - y_2(x)\Big) = 0\ .$$

Но последнее равенство означает, что $y_1(x) - y_2(x)$ есть частное решение однородного уравнения (2.1.1).

Теорема доказана.

Следствие 2.1.2 **Общее решение неоднородного уравнения (2.1.1) есть сумма общего решения однородного и некоторого частного решения неоднородного уравнения (2.1.1).**

Доказательство

В одну сторону: пусть $y(x)$ есть произвольное частное решение неоднородного уравнения (2.1.1), а $y^*(x)$ — фиксированное решение этого уравнения, тогда в силу теоремы 2.1.3 $y(x) - y^*(x)$ — произвольное решение однородного.
Имеем

$$y(x) = \Big(y(x) - y^*(x)\Big) + y^*(x),$$

и значит $y(x) = y_0(x) + y^*(x)$.
Обратно: если $y_0(x)$ — произвольное решение однородного, то в силу теоремы 2.1.2 $y(x) = y_0(x) + y^*(x)$ – произвольное решение неоднородного уравнения.

Следствие доказано.

Важно отметить, что теоремы и следствия данного параграфа оказываются справедливыми и для комплекснозначных функций вещественного аргумента.

Продемонстрируем использование приведенных выше теорем и формул на примере решения неоднородного линейного уравнения первого порядка специального вида

$$y' - \lambda y = \sum_{k=1}^{t} P_k(x) e^{\mu_k x} \ , \tag{2.1.2}$$

где $\lambda, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_t$ – некоторые комплексные константы, а

$$P_k(x) = b_{0k} + b_{1k}x + \ldots + b_{m_k k}x^{m_k}, \quad b_{m_k k} \neq 0,$$

суть алгебраические многочлены степеней m_k, $k = [1, t]$ с комплексными коэффициентами.

Функции, имеющие вид слагаемых суммы, стоящей в правой части уравнения (2.1.2), принято называть *квазимногочленами*.

Согласно теореме 1.3.1 общее решение однородного уравнения (2.1.2) дается формулой $y_0(x) = Ce^{\lambda x}$ $\forall C$. А в силу линейности этого уравнения по y и y' его частное решение есть сумма частных решений уравнений

$$y' - \lambda y = P_{m_k}(x) e^{\mu_k x} \quad \forall k = [1, t] \, . \tag{2.1.3}$$

Теорема 2.1.4 **При $\lambda \neq \mu_k$ частным решением уравнения (2.1.3) является функция $y^*(x) = Q_{m_k}(x)e^{\mu_k x}$, а при $\lambda = \mu_k$ – функция $y^*(x) = xQ_{m_k}(x)e^{\mu_k x}$, где $Q_{m_k}(x)$ – алгебраический многочлен степени m_k.**

Доказательство

Какое-нибудь частное решение уравнения (2.1.3) попробуем найти не по формуле (1.3.3), а непосредственным выбором из функций вида $y^*(x) = R(x)e^{\mu_k x}$.
Подстановка такой $y^*(x)$ в (2.1.3) приводит к следующему уравнению для функции $R(x)$:

$$R' + (\mu_k - \lambda)R = P_{m_k}(x) \ . \qquad (2.1.4)$$

При $\lambda = \mu_k$ (*резонансный* случай) можем взять конкретно

$$R(x) = \int\limits_0^x P_{m_k}(u)\,du = x\,Q_{m_k}(x) \quad \Rightarrow \quad y^*(x) = xQ_{m_k}(x)e^{\mu_k x},$$

где $Q_{m_k}(x) = c_{0k} + c_{1k}x + \ldots + c_{m_k k}x^{m_k}$ – некоторый алгебраический многочлен степени m_k .
Если же $\lambda \neq \mu_k$ (*нерезонансный* случай), то $R(x)$ можно найти из уравнения (2.1.4) в виде комплекснозначного многочлена $Q_{m_k}(x) = d_{0k} + d_{1k}x + \ldots + d_{m_k k}x^{m_k}$.
При этом значения чисел $d_{jk}, \quad j = [0, m_k]$ (также, как и c_{jk}), находятся путем приравнивания коэффициентов при равных степенях x в правой и левой частях (2.1.4).

Теорема доказана.

Дифференциальные многочлены и их свойства

Рассмотрим линейное уравнение n-го порядка (2.1.1) в случае, когда оно однородное и имеет постоянные коэффициенты:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \ , \ a_0 \neq 0 \ . \tag{2.2.1}$$

Определение 2.2.1

Будем говорить, что задан *оператор дифференцирования* $\widehat{D} = \dfrac{d}{dx}$, действующий в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых $\forall x \in X$ функций, со значениями в линейном пространстве функций непрерывных $\forall x \in X$, если каждой непрерывно дифференцируемой функции $y(x)$ ставится в соответствие единственная непрерывная функция $y'(x)$, что символически обозначается в виде равенств: $\quad y'(x) = \widehat{D} y(x) \quad$ или $\quad y' = \widehat{D} y$.

Тогда очевидные равенства

$$\frac{d^k}{dx^k} = \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\cdots\frac{d}{dx}\right)\right)\right)}_{k} = \underbrace{\widehat{D}\widehat{D}\cdots\widehat{D}}_{k} = \widehat{D}^k$$

позволяют определить *степень дифференциального оператора с натуральным показателем* k.

Наконец, используя $\widehat{E}$ — тождественный (единичный) оператор и равенство $\widehat{D}^0 = \widehat{E}$, получаем естественное определение *нулевой степени дифференциального оператора.*

В силу данного определения и равенств $a_n y = a_n \widehat{E} y = a_n \widehat{D}^0 y$, уравнение (2.2.1) записывается в виде

$$a_0 \widehat{D}^n y + a_1 \widehat{D}^{n-1} y + \ldots + a_{n-1} \widehat{D}^1 y + a_n \widehat{D}^0 y = 0 \quad \text{или} \quad L(\widehat{D})\, y = 0 \ ,$$

где $L(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ – алгебраический многочлен n-й степени от x, называемый для уравнения (2.2.1) *характеристическим.*

При этом $y(x)$ – решение уравнения $L(\widehat{D})\,y = 0$ – можно трактовать как прообраз отображения n раз непрерывно дифференцируемой функции $y(x)$ в функцию, тождественно равную нулю $\forall x \in X$. Покажите самостоятельно *линейность* отображения $L(\widehat{D})\;y \longrightarrow 0$.

Введем для множества *дифференциальных многочленов* вида $L(\widehat{D})$ операции *сложения* и *умножения*.

Определение 2.2.2	*Суммой дифференциальных многочленов* $L(\widehat{D})$ и $M(\widehat{D})$ называется дифференциальный многочлен $L(\widehat{D}) + M(\widehat{D})$ такой, что $$\Big(L(\widehat{D}) + M(\widehat{D})\Big)\,y = L(\widehat{D})y + M(\widehat{D})y \quad \forall y \in \mathcal{C}\,,$$ где $\mathcal{C}$ – линейное пространство k-раз непрерывно дифференцируемых функций. *Произведением дифференциальных многочленов* $L(\widehat{D})$ и $M(\widehat{D})$ называется дифференциальный многочлен $L(\widehat{D}) \cdot M(\widehat{D})$ такой, что $$\Big(L(\widehat{D}) \cdot M(\widehat{D})\Big)\,y = L(\widehat{D})\,\Big(M(\widehat{D})y\Big) \quad \forall y \in \mathcal{C}\,.$$

Проверьте самостоятельно, что операции сложения и умножения дифференциальных многочленов обладают свойствами *коммутативности, ассоциативности* и *дистрибутивности.* Это позволяет оперировать с ними как с обычными алгебраическими многочленами, в частности разлагать на линейные множители.

К другим полезным свойствам дифференциальных многочленов относятся соотношения, справедливость которых устанавливает

Теорема 2.2.1 **Для любого комплексного числа λ и любой функции $y(x) \in \mathcal{C}$ справедливы соотношения**

$$L(\widehat{D})e^{\lambda x} = L(\lambda)\cdot e^{\lambda x}\ , \quad L(\widehat{D})\left(e^{\lambda x}y(x)\right) = e^{\lambda x}L(\widehat{D}+\lambda)y(x)\ ,$$

$$\left(\widehat{D}-\lambda\right)^k\left(e^{\lambda x}y(x)\right) = e^{\lambda x}y^{(k)}(x) \qquad (2.2.2)$$

для любых целых неотрицательных k.

Доказательство

Первое соотношение следует из определения дифференциального многочлена и правил дифференцирования.

В справедливости второго убедимся, доказав предварительно методом математической индукции формулу

$$\widehat{D}^k \left(e^{\lambda x} y\right) = e^{\lambda x} (\widehat{D} + \lambda)^k y \; . \tag{2.2.3}$$

Эта формула очевидно справедлива для $k = 0$. Заметим также, что она верна и при $k = 1$:

$$\widehat{D} \left(e^{\lambda x} y\right) = e^{\lambda x} \widehat{D} y + e^{\lambda x} \lambda y = e^{\lambda x} \left(\widehat{D} + \lambda\right) y \; .$$

Теперь покажем, что из равенства (2.2.3) будет следовать соотношение $\widehat{D}^{k+1} \left(e^{\lambda x} y\right) = e^{\lambda x} (\widehat{D} + \lambda)^{k+1} y$. Действительно,

$$\widehat{D}^{k+1} \left(e^{\lambda x} y\right) = \widehat{D} \left(\widehat{D}^k \left(e^{\lambda x} y\right)\right) \; ,$$

но это выражение по предположению индукции равно

$$\widehat{D} \left(e^{\lambda x} \left(\widehat{D} + \lambda\right)^k y\right) =$$

$$= e^{\lambda x} \left(\widehat{D} + \lambda\right)^k \widehat{D} y + e^{\lambda x} \lambda \left(\widehat{D} + \lambda\right)^k y =$$

$$= e^{\lambda x} \left(\widehat{D} + \lambda\right)^k \left(\widehat{D} y + \lambda y\right) = e^{\lambda x} (\widehat{D} + \lambda)^{k+1} y \; .$$

Наконец, используя соотношение (2.2.3) и формулу для характеристического многочлена, получаем второе равенство, указанное в формулировке теоремы:

$$L(\widehat{D}) \left(e^{\lambda x} y\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{D}^{n-k} \left(e^{\lambda x} y\right) =$$

$$= e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{n} a_k (\widehat{D} + \lambda)^{n-k} y = e^{\lambda x} L(\widehat{D} + \lambda) y \; .$$

Третью формулу мы докажем также методом математической индукции. Она очевидна для $k = 0$ и легко проверяется при $k = 1$:

$$\left(\widehat{D}-\lambda\right)\left(e^{\lambda x}y\right)=\left(e^{\lambda x}y\right)'-\lambda e^{\lambda x}y=$$

$$=\lambda e^{\lambda x}y+e^{\lambda x}y'-\lambda e^{\lambda x}y=e^{\lambda x}y'\ .$$

Пусть формула (2.2.2) также справедлива при некотором $k>1$, тогда

$$\left(\widehat{D}-\lambda\right)^{k+1}\left(e^{\lambda x}y\right)=\left(\widehat{D}-\lambda\right)^{k}\left(\left(\widehat{D}-\lambda\right)\left(e^{\lambda x}y\right)\right)=$$

$$=\left(\widehat{D}-\lambda\right)^{k}\left(\left(e^{\lambda x}y\right)'-\lambda e^{\lambda x}y\right)=$$

$$=\left(\widehat{D}-\lambda\right)^{k}\left(e^{\lambda x}y'\right)=e^{\lambda x}\left(y'\right)^{(k)}=e^{\lambda x}y^{(k+1)}\ ,$$

что доказывает третью формулу, приведенную в формулировке теоремы.

Теорема доказана.

Заметим, что второе и третье соотношения в формулировке теоремы 2.2.1 часто называются *формулами сдвига*.

В заключение продемонстрируем, как использование дифференциальных многочленов позволяет свести решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка к последовательному решению двух уравнений 1-го порядка (т.е. использованию теоремы 2.1.4).

`Задача 2.2.1` Решить уравнение $y'' + 2y' + \alpha y = 0$ при $\alpha = -3$ и при $\alpha = 1$.

`Решение` 1°. Пусть $\alpha = -3$. Уравнение $y''+2y'-3y = 0$ с помощью дифференциальных многочленов записывается в виде

$$(\widehat{D}^2 + 2\widehat{D} - 3)y = 0 \quad \text{или} \quad (\widehat{D} - 1)(\widehat{D} + 3)y = 0\,.$$

Обозначим

$$(\widehat{D} + 3)y = u(x) \tag{2.2.4}$$

и решим вначале однородное уравнение $(\widehat{D} - 1)u = 0$, т. е. $u' - u = 0$. Получим $u(x) = \tilde{C}_1 e^x \quad \forall \tilde{C}_1$.

Уравнение (2.2.4) принимает вид

$$(\widehat{D}+3)y = \tilde{C}_1 e^x \quad \text{или} \quad y' + 3y = \tilde{C}_1 e^x \,. \qquad (2.2.5)$$

Это *нерезонансный* случай, т.к. $-3 = \lambda \neq \lambda_1 = 1$, и согласно теореме 2.1.4 частное решение неоднородного уравнения (2.2.5) следует искать в виде $y^*(x) = d_0\, e^x$. Подстановка последней формулы в (2.2.5) дает

$$d_0 = \frac{\tilde{C}_1}{4} = C_1 \quad \forall C_1 \,.$$

Поскольку общее решение однородного уравнения (2.2.5) есть $y_0(x) = C_2 e^{-3x} \quad \forall C_2$, то общее решение (2.2.5) (а значит и исходного уравнения) представимо в виде

$$y(x) = y_0(x) + y^*(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} \quad \forall C_1, C_2 \,.$$

2°. Пусть теперь $\alpha = 1$. Уравнение $y'' + 2y' + y = 0$ при помощи дифференциальных многочленов можно записать так:

$$(\widehat{D}^2 + 2\widehat{D} + 1)y = 0\,, \quad \text{или} \quad (\widehat{D} + 1)^2 y = 0\,,$$

$$\text{или же как} \quad (\widehat{D} + 1)(\widehat{D} + 1)y = 0\,.$$

Обозначив

$$(\widehat{D} + 1)y = u(x)\ , \tag{2.2.6}$$

решим однородное уравнение $(\widehat{D} + 1)u = 0$ или, что то же самое, уравнение $u' + u = 0$. Его общим решением будет множество функций вида $u(x) = C_1 e^{-x} \quad \forall C_1$.

Теперь решаем уравнение (2.2.6):

$$(\widehat{D} + 1)y = C_1 e^{-x} \quad \text{или} \quad y' + y = C_1 e^{-x}\,. \tag{2.2.7}$$

Это *резонансный* случай, поскольку $-1 = \lambda = \lambda_1 = -1$, и по теореме 2.1.4 частное решение неоднородного уравнения (2.2.7) следует искать в виде $y^*(x) = x\, d_0\, e^{-x}$.

Подстановка последней формулы в уравнение (2.2.7) дает $d_0 = C_1 \quad \forall C_1$, и, следовательно, $y^*(x) = C_1\, x\, e^{-x}$.

Поскольку общее решение однородного уравнения (2.2.7) является множеством квазимногочленов нулевого порядка $y_0(x) = C_2 e^{-x} \quad \forall C_2$, то общее решение (2.2.7) (а значит и исходного уравнения) имеет вид

Решение получено.

$$y(x) = y^*(x) + y_0(x) = (C_1 x + C_2)e^{-x} \quad \forall C_1, C_2\,.$$

Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим приведенное линейное однородное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \; . \tag{2.3.1}$$

Пусть *попарно не равные друг другу* корни его характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \tag{2.3.2}$$

суть числа $\lambda_1, \; \lambda_2, \; \ldots, \; \lambda_s$, имеющие соответственно кратности равные $k_1, \; k_2, \; \ldots, \; k_s$.

В этом случае уравнение (2.3.2) может быть записано так:

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{k_s} = 0 \; ,$$

при этом, как известно из курса алгебры, $k_1 + k_2 + \; \ldots \; + k_s = n$.

Используя дифференциальные многочлены, уравнение (2.3.2) представим в виде

$$L(\widehat{D}) \, y(x) = 0 \; ,$$

поскольку характеристический многочлен уравнения (2.3.1) будет

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{k_s} \; ,$$

а соответствующий дифференциальный многочлен:

$$L(\widehat{D}) = (\widehat{D} - \lambda_1)^{k_1} (\widehat{D} - \lambda_2)^{k_2} \ldots (\widehat{D} - \lambda_s)^{k_s} \; .$$

Покажем, что справедлива

Теорема 2.3.1 **Общее решение уравнения (2.3.1) имеет вид**

$$y(x) = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + P_2(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + P_s(x)e^{\lambda_s x} \ , \quad (2.3.3)$$

где $P_j(x)\ \forall j = [1, s]$ **суть алгебраические многочлены вида** $\sum\limits_{m=1}^{k_j} C_{jm}x^{m-1}$ **, а** C_{jm} **– произвольные комплексные константы.**

Доказательство

Вначале покажем, что каждое решение уравнения (2.3.1) имеет вид (2.3.3).

Воспользуемся методом математической индукции. Доказываемая теорема при $n = 1$ верна в силу теоремы 1.3.1, и предположим, что теорема верна для уравнения порядка $n - 1$.

Запишем дифференциальный оператор $L(\widehat{D})$ в виде

$$L(\widehat{D}) = M(\widehat{D})(\widehat{D} - \lambda_s) \ ,$$

где

$$M(\widehat{D}) = (\widehat{D} - \lambda_1)^{k_1}(\widehat{D} - \lambda_2)^{k_2} \ldots (\widehat{D} - \lambda_s)^{k_s - 1} \ .$$

В этом случае уравнение $L(\widehat{D})\, y(x) = 0$ можно записать как

$$M(\widehat{D})(\widehat{D} - \lambda_s)\, y(x) = 0 \qquad \text{или} \qquad M(\widehat{D})\, u(x) = 0 \ ,$$

положив $(\widehat{D} - \lambda_s)\, y(x) = u(x)$.

Уравнение $M(\widehat{D})\, u(x) = 0$ линейное однородное порядка $n - 1$. Если $k_s \geq 2$, то корнями его характеристического уравнения являются числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_s$ кратности $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_s - 1$ соответственно.
Если же кратность $k_s = 1$, то корнями характеристического уравнения будут только числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{s-1}$ с кратностями $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_{(s-1)}$.

По индуктивному предположению решение уравнения $M(\widehat{D})u(x) = 0$ имеет вид

– в случае, если $k_s \geq 2$:

$$u(x) = Q_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + Q_{s-1}(x)e^{\lambda_{s-1} x} + Q_s(x)e^{\lambda_s x},$$

где $Q_1(x),\ \ldots,\ Q_{s-1}(x)$ — алгебраические многочлены степени $k_1 - 1,\ \ldots, k_{(s-1)} - 1$, а многочлен $Q_s(x)$ имеет порядок $k_s - 2$;

– в случае, если $k_s = 1$:

$$u(x) = Q_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + Q_{s-1}(x)e^{\lambda_{s-1} x},$$

то есть слагаемое с индексом s здесь отсутствует.

Найдем теперь вид функции $y(x)$ из уравнения

$$(\widehat{D} - \lambda_s)y(x) = u(x) \tag{2.3.4}$$

или (что то же самое) из $y' - \lambda_s y = u(x)$.

Это уравнение первого порядка, правая часть которого есть сумма квазимногочленов. Применив теорему 2.1.4, непосредственной проверкой убеждаемся, что в случае, когда $k_s = 1$, частное решение для (2.3.4) имеет вид (*резонанса* нет):

$$y^*(x) = R_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + R_{s-1}(x)e^{\lambda_{s-1} x},$$

а общее решение однородного уравнения (в силу теоремы 1.3.1) – $y_0(x) = C \cdot e^{\lambda_s x}$. Сумма $y^*(x) + y_0(x)$ есть функция, указанная в формулировке теоремы.

Рассмотрим теперь случай, когда $k_s \geq 2$. Для уравнения (2.3.4) это *резонансный* случай. Поэтому по теореме 2.1.4 частным решением уравнение (2.3.4) будет функция

$$y^*(x) = R_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + R_{s-1}(x)e^{\lambda_{s-1} x} + xR_s(x)e^{\lambda_s x},$$

в которой многочлен $R_s(x)$ имеет порядок $k_s - 2$.

Таким образом, при $k_s \geq 2$ в сумме $y^*(x) + y_0(x)$ возникает слагаемое вида $\Big(xR_s(x) + C\Big)e^{\lambda_s x}$, которое является квазимногочленом порядка $k_s - 1$, содержащим k_s произвольных комплексных констант.

Итак, мы получили, что общее решение уравнения (2.3.4) имеет вид (2.3.3).

Осталось убедиться, что любая функция вида (2.3.3) есть решение уравнения (2.3.1). Для этого достаточно показать, что если λ_0 — корень кратности k уравнения $L(\lambda) = 0$, то каждая из функций

$$e^{\lambda_0 x},\ xe^{\lambda_0 x},\ x^2 e^{\lambda_0 x},\ \ldots,\ x^{k-1} e^{\lambda_0 x} \tag{2.3.5}$$

есть решение уравнения $L(\widehat{D})y = 0$.

Дифференциальный многочлен уравнения (2.3.1), как было показано ранее, имеет вид

$$L(\widehat{D}) = (\widehat{D} - \lambda_1)^{k_1} (\widehat{D} - \lambda_2)^{k_2} \ldots (\widehat{D} - \lambda_s)^{k_s} \ ,$$

причем среди его сомножителей обязательно имеется множитель $(\widehat{D} - \lambda_0)^k$.

Результат действия этого оператора на функцию $x^m e^{\lambda_0 x}$, где целое число $m \in [0, k-1]$, можно получить, использовав вторую *формулу сдвига* (2.2.2).

Действительно, согласно формуле (2.2.2):

$$(\widehat{D} - \lambda_0)^k \Big(x^m e^{\lambda_0 x} \Big) = e^{\lambda_0 x} \big(x^m \big)^{(k)} = 0\,.$$

Откуда следует, что функция $y(x) = x^m e^{\lambda_0 x}$ удовлетворяет условию $L(\widehat{D})y = 0$ и, значит, является частным решением однородного уравнения (2.3.1).

Теорема доказана.

Следствие 2.3.1 **Если все корни характеристического уравнения (2.3.2)** $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ *простые* **(то есть кратности** $k = 1$**), то общее решение уравнения (2.3.1) имеет вид**

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}\ , \qquad (2.3.6)$$

где $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ – **произвольные комплексные константы.**

Доказательство

Очевидно следует из утверждения теоремы 2.3.1, поскольку все квазимногочлены в формуле 2.3.3 — нулевой степени.

Следствие доказано.

Следствие 2.3.2 **Линейное пространство, образованное частными решениями уравнения (2.3.1), конечномерное. Базисом в этом пространстве может служить, например, любой упорядоченный набор, составленный из следующих n функций:**

Таблица 2.3.1

$e^{\lambda_1 x}$	$e^{\lambda_2 x}$	$\dots$	$e^{\lambda_s x}$
$xe^{\lambda_1 x}$	$xe^{\lambda_2 x}$	$\dots$	$xe^{\lambda_s x}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	$\dots$	$\dots$	$x^{k_s-1}e^{\lambda_s x}$
	$x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}$		

Доказательство

Следует из линейной независимости данного набора функций, равенства $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$ и утверждения теоремы 2.3.1.

Следствие доказано.

Заметьте, что число заполненных клеток табл. 2.3.1, вообще говоря, различно для разных ее столбцов, поскольку корни характеристического уравнения могут иметь разные кратности.

Выделение вещественных решений

Достаточно часто в вычислительной практике оказывается, что уравнение (2.3.1) имеет *вещественные* коэффициенты

$$y^{(n)} + \rho_1 y^{(n-1)} + \ldots + \rho_{n-1} y' + \rho_n y = 0 \,, \tag{2.4.1}$$

и требуется найти все его вещественные решения. Соответствующее характеристическое уравнение будет

$$\lambda^n + \rho_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \rho_{n-1} \lambda + \rho_n = 0 \; . \tag{2.4.2}$$

Получим формулу общего вещественного решения этого уравнения, предполагая, что все комплексные решения, определяемые формулой (2.3.3), нами уже найдены.

Убедимся вначале, что справедливы следующие утверждения.

Лемма 2.4.1 **Пусть уравнение (2.4.2) имеет комплексный корень λ_0 кратности k, то есть верно равенство**

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k M_{n-k}(\lambda),$$

где $M_{n-k}(\lambda_0) \neq 0$. Тогда оно имеет корень $\overline{\lambda}_0$, причем той же кратности k.

Доказательство

В силу вещественности коэффициентов в уравнении (2.4.2) и согласно свойствам комплексного сопряжения

$$L(\overline{\lambda}_0) = \overline{\lambda}_0^n + \rho_1 \overline{\lambda}_0^{n-1} + \ldots + \rho_{n-1}\overline{\lambda}_0 + \rho_n = \overline{L(\lambda_0)} = \overline{0} = 0 \ .$$

Из того условия, что λ_0 есть корень кратности k характеристического уравнения (2.4.2), используя для нахождения $L^{(m)}(\lambda) \ \ \forall m \in [1, k-1]$ формулу Лейбница, аналогичными рассуждениями получаем, что

$$L'(\overline{\lambda}_0) = L''(\overline{\lambda}_0) = \ldots = L^{(k-1)}(\overline{\lambda}_0) = 0, \text{ причем } L^{(k)}(\overline{\lambda}_0) \neq 0,$$

а это дает $\quad L(\lambda) = (\lambda - \overline{\lambda}_0)^k M_{n-k}(\lambda) \ , \quad M_{n-k}(\overline{\lambda}_0) \neq 0 \, .$

Лемма доказана.

Лемма 2.4.2

Для того чтобы комплекснозначная функция $y(x) = u(x) + iv(x)$ являлась решением уравнения (2.3.1), необходимо и достаточно, чтобы вещественные функции $u(x)$ и $v(x)$ также были решениями этого уравнения.

Доказательство

Из линейности дифференциального оператора $L(\widehat{D})$, условия равенства комплексных чисел и соотношений

$$L(\widehat{D})y(x) = L(\widehat{D})\left(u(x) + iv(x)\right) = L(\widehat{D})u(x) + iL(\widehat{D})v(x)$$

следует, что

$$L(\widehat{D})y(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad L(\widehat{D})\left(u(x) + iv(x)\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} L(\widehat{D})u(x) = 0\,, \\ L(\widehat{D})v(x) = 0\,. \end{array} \right.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.4.3

Пусть комплексно-сопряженные функции

$$y(x) = u(x) + iv(x) \quad \textbf{и} \quad \overline{y}(x) = u(x) - iv(x)$$

линейно независимы на промежутке X**. Тогда будут линейно независимыми вещественные функции** $u(x) = \operatorname{Re} y(x)$ **и** $v(x) = \operatorname{Im} y(x)$.

Доказательство

Заметим предварительно, что

$$u(x) = \frac{y(x) + \overline{y}(x)}{2} \qquad \text{и} \qquad v(x) = \frac{y(x) - \overline{y}(x)}{2i}\,.$$

Из условия

$$\varkappa\, u(x) + \mu\, v(x) = 0 \quad \forall x \in X \tag{2.4.3}$$

и равенств

$$0 = \varkappa\, u(x) + \mu\, v(x) = \varkappa \frac{y(x) + \overline{y}(x)}{2} + \mu \frac{y(x) - \overline{y}(x)}{2i} =$$

$$= \left(\frac{\varkappa}{2} + \frac{\mu}{2i} \right) y(x) + \left(\frac{\varkappa}{2} - \frac{\mu}{2i} \right) \overline{y}(x)\,,$$

а также в силу линейной независимости $y(x)$ и $\overline{y}(x)$ получаем, что выражения в круглых скобках должны быть равны нулю одновременно.

Тогда, приняв во внимание равенство $\dfrac{1}{i} = -i$, получаем

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varkappa - i\mu & = & 0\,, \\ \varkappa + i\mu & = & 0\,. \end{array} \right.$$

Эта система линейных уравнений имеет по теореме Крамера единственное решение $\varkappa = \mu = 0$. Значит, функции $u(x)$ и $v(x)$ линейно независимы, поскольку оказалось, что из равенства (2.4.3) обязательно следует $\varkappa = \mu = 0$.

Лемма доказана.

Теперь опишем процедуру выделения вещественных решений из общего решения уравнения (2.4.1).

В силу леммы 2.4.1 для $\lambda_r = \alpha_r + i\beta_r$ – каждого невещественного (то есть с $\beta_r \neq 0$) корня кратности k_r характеристического уравнения (2.4.2) – будет существовать сопряженный корень $\overline{\lambda}_r = \alpha_r - i\beta_r$, причем той же кратности. Следовательно, в табл. 2.3.1 для каждой базисной функции $y_{qr}(x) = x^q e^{\lambda_r x}$, где $q = 0, 1, 2, \ldots, k_r - 1$, найдется сопряженная ей функция $\overline{y}_{qr}(x) = x^q e^{\overline{\lambda}_r x}$. Действительно, по формуле Эйлера:

$$y_{qr}(x) = x^q e^{\lambda_r x} = x^q e^{(\alpha_r + i\beta_r)x} = x^q e^{\alpha_r x}(\cos\beta_r x + i\sin\beta_r x) \quad \text{и}$$

$$\overline{y}_{qr}(x) = x^q e^{\overline{\lambda}_r x} = x^q e^{(\alpha_r - i\beta_r)x} = x^q e^{\alpha_r x}(\cos\beta_r x - i\sin\beta_r x)\ .$$

Поэтому вещественные линейно независимые функции

$$u_{qr}(x) = x^q e^{\alpha_r x}\cos\beta_r x \qquad \text{и} \qquad v_{qr}(x) = x^q e^{\alpha_r x}\sin\beta_r x$$

будут, согласно лемме 2.4.2, решениями уравнения (2.4.1).

Перейдем в линейном пространстве решений от базиса, содержащегося в табл. 2.1, к новому базису, заменив каждую пару функций $\{\, y_{qr}(x),\ \ \overline{y}_{qr}(x)\,\}$ на пару функций $\{\, u_{qr}(x),\ \ v_{qr}(x)\,\}$. Заметим при этом, что в силу леммы 2.4.3 из линейной независимости функций $y_{qr}(x),\ \overline{y}_{qr}(x)$ и соотношений

$$u_{qr}(x) = \frac{y_{qr}(x) + \overline{y}_{qr}(x)}{2} \qquad \text{и} \qquad v_{qr}(x) = \frac{y_{qr}(x) - \overline{y}_{qr}(x)}{2i}$$

следует линейная независимость функций $u_{qr}(x),\ v_{qr}(x)$.

Новый базис состоит из n вещественных функций, которые обозначим как $\psi_j(x)$. В нем любое вещественное решение уравнения (2.4.1) представимо как некоторая вещественная линейная комбинация функций $\psi_j(x)$.

Таким образом, доказана

Теорема 2.4.1 **Общее вещественное решение уравнения (2.4.1) имеет вид**

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} R_j \psi_j(x) \ ,$$

где R_j – произвольные вещественные константы.

В заключение рассмотрим простой, но очень важный для физических и технических приложений пример.

Задача 2.4.1 Найти все вещественные решения уравнения $y''+\omega^2 y=0$, если $\omega>0$.

Решение Характеристическое уравнение имеет в данном случае вид $\lambda^2+\omega^2=0$. У него есть два сопряженных корня $\lambda_{1,2}=\pm i\omega$ кратности 1 каждое. Поэтому общее комплексное решение исходного уравнения будет

$$y(x)=C_1 e^{i\omega x}+C_2 e^{-i\omega x}.$$

По формуле Эйлера: $e^{i\omega x}=\cos\omega x+i\sin\omega x$. Значит,

$$u(x)=\mathrm{Re}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{x}}=\cos\omega x \quad \text{и}$$

$$v(x)=\mathrm{Im}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{x}}=\sin\omega x.$$

Переходя в E^2 – в линейном пространстве решений исходного уравнения – от базиса $\left\{e^{i\omega x};\ e^{-i\omega x}\right\}$ к базису $\{\cos\omega x;\ \sin\omega x\}$, получаем окончательно

$$y(x)=R_1\cos\omega x+R_2\sin\omega x\ ,$$

где R_1 и R_2 – произвольные вещественные константы.

Решение получено.

Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим теперь случай неоднородных линейных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x) \ , \qquad (2.5.1)$$

предполагая, что общее решение соответствующего однородного уравнения уже найдено.

Как и ранее, числа

$$\{ \, a_1, \, a_2, \, \ldots, \, a_{n-1}, \, a_n \, \}$$

являются произвольными комплексными константами, а $b(x)$ есть комплекснозначная, непрерывная функция, зависящая от вещественного аргумента $x \in X$.

Согласно следствию 2.1.2 для построения общего решения неоднородного уравнения (2.5.1) достаточно найти какое-нибудь его частное решение.

Воспользуемся методом *вариации постоянных* (методом Лагранжа), основой которого является

Теорема 2.5.1 **Пусть общее решение *однородного* уравнения (2.5.1) имеет вид**

$$y(x) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x) + \cdots + C_n g_n(x) \ ,$$

где функции $\{g_1(x),\ g_2(x),\ \ldots\ g_n(x)\}$ образуют базис в пространстве частных решений однородного уравнения. Тогда *неоднородное* уравнение (2.5.1) имеет решение вида

$$y^*(x) = C_1(x) g_1(x) + C_2(x) g_2(x) + \cdots + C_n(x) g_n(x) \ ,$$

где непрерывно дифференцируемые функции $\{C_1(x),\ C_2(x),\ \ldots\ C_n(x)\}$ находятся из системы линейных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} C'_1(x)g_1(x) + C'_2(x)g_2(x) + \cdots + C'_n(x)g_n(x) \ = \ 0 \ , \\ C'_1(x)g'_1(x) + C'_2(x)g'_2(x) + \cdots + C'_n(x)g'_n(x) \ = \ 0 \ , \\ C'_1(x)g''_1(x) + C'_2(x)g''_2(x) + \cdots + C'_n(x)g''_n(x) \ = \ 0 \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C'_1(x)g_1^{(n-1)}(x) \ + \ \ldots \ + \ C'_n(x)g_n^{(n-1)}(x) \ = \ b(x) \ . \end{array}\right.$$

Доказательство

Найдем выражения для производных от функции $y^*(x)$ до $n-$го порядка включительно, используя следующую процедуру:

$$\text{если } y^* = \sum_{k=1}^{n} C_k g_k \ , \quad \text{то} \quad {y^*}' = \sum_{k=1}^{n} (C'_k g_k + C_k g'_k) \ .$$

Потребуем, кроме того, чтобы $\sum\limits_{k=1}^{n} C'_k g_k = 0$, ибо в этом случае ${y^*}' = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k g'_k$, то есть формула для производной упрощается.

Дифференцируя еще раз, получаем, что ${y^*}'' = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k g''_k$, при условии, что $\sum\limits_{k=1}^{n} C'_k g'_k = 0$.

Эту процедуру последовательно выполняем до получения формул

$$y^{*(n-1)} = \sum_{k=1}^{n} C_k g_k^{(n-1)}, \quad \text{при условии, что } \sum_{k=1}^{n} C'_k g_k^{(n-2)} = 0 \ .$$

и

$$y^{*(n)} = \sum_{k=1}^{n} \left(C_k g_k^{(n)} + C'_k g_k^{(n-1)} \right) \ .$$

Теперь, подставляя полученные выражения для функции $y^*(x)$ и ее производных в уравнение (2.5.1), приходим к

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \left(g_k^{(n)} + \ldots + a_{n-1} g'_k + a_n g_k \right) + \sum_{k=1}^{n} C'_k g_k^{(n-1)} = b(x) \ ,$$

а учитывая, что каждая функция $g_k(x)$ есть частное решение *однородного* уравнения (2.5.1), (т.е. выражения в больших круглых скобках равны нулю), получаем условие

$$\sum_{k=1}^{n} C'_k g_k^{(n-1)} = b(x) \ ,$$

которое в совокупности с использованными ранее равенствами

$$\sum_{k=1}^{n} C'_k g_k^{(j)} = 0 \quad \forall j = [0, n-2]$$

образует систему уравнений, указанную в условии теоремы.

В матричной форме данная система имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cccc} g_1(x) & g_2(x) & \dots & g_n(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) & \dots & g_n'(x) \\ g_1''(x) & g_2''(x) & \dots & g_n''(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_1^{(n-1)}(x) & g_2^{(n-1)}(x) & \dots & g_n^{(n-1)}(x) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} C_1' \\ C_2' \\ C_3' \\ \dots \\ C_n' \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ b(x) \end{array} \right\| . \qquad (2.5.2)$$

В § 5.3 (теорема 5.3.3) будет показано, что определитель основной матрицы системы (2.5.2) (называемый *определителем Вронского* или *вронскианом*) отличен от нуля для системы линейно независимых функций $\{g_1(x),\ g_2(x),\ \dots\ g_n(x)\}$, являющихся частными решениями однородного уравнения (2.5.1). Поэтому, в силу теоремы Крамера, функции $C_k'(x)\ \ \forall k = [1, n]$ существуют и единственны.

Теорема доказана.

Следствие 2.5.1 **Уравнение (2.5.1) интегрируется в квадратурах.**

Доказательство

Следует из утверждения теоремы 2.5.1 и очевидной возможности представления каждой функции

$$C_k(x) = \int\limits_{x_0}^{x} C'_k(u)du \quad \forall k = [1, n]$$

в виде интеграла с переменным верхним пределом.

Следствие доказано.

Для некоторых классов функций $b(x)$ общее решение уравнения (2.5.1) удается выразить через элементарные функции. Важный для приложений такой случай описывает

Теорема 2.5.2 **Пусть** $b(x)$ **квазимногочлен вида** $P_m(x)e^{\mu x}$, **где** $P_m(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m$, **а** $y^*(x)$ – **некоторое частное решение неоднородного уравнения (2.5.1). Тогда найдется алгебраический многочлен** $Q_m(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_m x^m$ **такой, что**

- $y^*(x) = Q_m(x)e^{\mu x}$, **если** μ **не является корнем характеристического многочлена уравнения (2.5.1) (так называемый** *нерезонансный* **случай);**
- $y^*(x) = x^k Q_m(x)e^{\mu x}$, **если** μ **корень характеристического многочлена уравнения (2.5.1) кратности** k **(***резонансный* **случай).**

Следствие 2.5.2 **Пусть коэффициенты уравнения (2.5.1) вещественны, а** $b(x) = e^{\alpha x}\left(A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x\right)$, **где** α, β **– вещественные числа,** $A(x)$ **и** $B(x)$ **– вещественные многочлены, один из которых степени** m**, а второй степени не выше, чем** m. **Тогда уравнение (2.5.1) имеет частное решение вида**

— $y^*(x) = e^{\alpha x}\left(C(x)\cos\beta x + D(x)\sin\beta x\right)$, **если** $\alpha + i\beta$ **не является корнем характеристического многочлена уравнения (2.5.1) (***нерезонансный* **случай);**

— $y^*(x) = x^k e^{\alpha x}\left(C(x)\cos\beta x + D(x)\sin\beta x\right)$, **если** $\alpha + i\beta$ **– корень характеристического многочлена для уравнения (2.5.1) кратности** k **(***резонансный* **случай).**

Функции $C(x)$ **и** $D(x)$ **— вещественные алгебраические многочлены степени** m.