Однородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (случай жорданова базиса)

Рассмотрим теперь процедуру построения общего решения системы уравнений (3.1.1) в случае, когда условия теоремы 3.1.3 не выполнены. Такая ситуация может возникнуть при наличии *кратных* корней у характеристического уравнения линейного преобразования $\widehat{A}$, задаваемого в U^n матрицей $\|A\|$.

Из курса линейной алгебры известно, что размерность собственного подпространства, отвечающего собственному значению кратности k, не меньше, чем единица, но не больше, чем k. Поэтому максимальное число линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственному значению кратности $k \geq 2$, может оказаться строго меньше, чем k. Это, в свою очередь, будет означать, что полное число линейно независимых собственных векторов линейного оператора $\|A\|$ окажется меньше n — размерности U^n, — ибо полное число корней характеристического уравнения (с учетом их кратности) всегда равно n. И, следовательно, в линейном пространстве частных решений системы уравнений (3.1.1) не удается построить базис вида, указанного в формулировке теоремы 3.1.3.

Примером матрицы с подобными свойствами является квадратная матрица порядка $l \geq 2$ следующего вида

$$\|J_l(\lambda_0)\| = \left\| \begin{array}{ccccccc} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\| . \qquad (3.2.1)$$

Такую матрицу называют *жордановой клеткой* порядка l. У нее все элементы, стоящие на главной диагонали, одинаковы, элементы, расположенные на первой наддиагонали, равны единице, а остальные элементы — нули.

Матрица $\|J_l(\lambda_0)\|$, определяющая некоторое линейное преобразование $\widehat{J}_l$ в U^l, имеет единственное собственное значение $\lambda = \lambda_0$ кратности l, которому отвечает лишь один линейно независимый собственный вектор $\|f\| = \|1\ 0\ 0\ \ldots\ 0\|^{\mathrm{T}}$, поскольку $\mathrm{rg}\,\|\widehat{J}_l(\lambda_0) - \lambda_0\widehat{E}\| = l - 1$. Иначе говоря, размерность собственного подпространства равна единице, и базис из собственных векторов $\|J_l(\lambda_0)\|$ в U^l не существует.

Здесь стоит отметить, что система (3.1.1) в случае, когда $\|A\| = \|J_l(\lambda_0)\|$, легко решается.

Заметим, что элементы базиса в U^l, в котором преобразование $\|\widehat{A}\|$ имеет матрицу вида (3.2.1), должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{array}{lcl}
\|\widehat{A}\|\|h_{(1)}\| = \lambda_0\|h_{(1)}\| \,, & & \|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(1)}\| = \|o\| \,, \\
\|\widehat{A}\|\|h_{(2)}\| = \lambda_0\|h_{(2)}\| + \|h_{(1)}\| \,, & & \|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(2)}\| = \|h_{(1)}\| \,, \\
\|\widehat{A}\|\|h_{(3)}\| = \lambda_0\|h_{(3)}\| + \|h_{(2)}\| \,, & \Longrightarrow & \|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(3)}\| = \|h_{(2)}\| \,, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\|\widehat{A}\|\|h_{(l)}\| = \lambda_0\|h_{(l)}\| + \|h_{(l-1)}\| & & \|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(l)}\| = \|h_{(l-1)}\| \,.
\end{array} \qquad (3.2.2)$$

Действительно, согласно определению матрицы линейного преобразования, ее столбцами (в конкретном базисе $\{\ \|h_{(1)}\|, \|h_{(2)}\|, \ \dots, \|h_{(l)}\|\ \}$) являются координатные столбцы *образов базисных элементов*. Тогда, учитывая структуру матрицы (3.2.1), мы приходим к формулам (3.2.2).

Теперь покажем, что в пространстве частных решений системы (3.1.1) возможно построить базис, позволяющий описать ее общее решение, добавив к собственным векторам $\|A\|$ дополнительные элементы пространства U^n, определяемые формулами (3.2.2).

Рассмотрим эту процедуру подробнее. Пусть λ_0 – собственное значение, а $\|h_{(1)}\|$ – соответствующий ему собственный вектор линейного преобразования $\|\widehat{A}\|$, действующего в U^n. Тогда можно дать

Определение 3.2.1

Элементы $\|h_{(1)}\|, \ \|h_{(2)}\|, \ \ldots \ ,\|h_{(l)}\|$, принадлежащие U^l и являющиеся решениями уравнений

$$\begin{aligned}
&\|\widehat{A} - \lambda_0 \widehat{E}\| \|h_{(1)}\| = \|o\| \ , \\
&\|\widehat{A} - \lambda_0 \widehat{E}\| \|h_{(2)}\| = \|h_{(1)}\| \ , \\
&\|\widehat{A} - \lambda_0 \widehat{E}\| \|h_{(3)}\| = \|h_{(2)}\| \ , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\|\widehat{A} - \lambda_0 \widehat{E}\| \|h_{(l)}\| = \|h_{(l-1)}\| \ ,
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

в то время как уравнение

$$\|\widehat{A} - \lambda_0 \widehat{E}\| \|h_{(l+1)}\| = \|h_{(l)}\|$$

решений не имеет, называются *жордановой цепочкой* длиной l, начинающейся с собственного вектора $\|h_{(1)}\|$.

Элементы $\|h_{(2)}\|, \ \|h_{(3)}\|, \ \ldots \ ,\|h_{(l)}\|$ называются *присоединенными векторами* к вектору $\|h_{(1)}\|$.

Например (покажите это самостоятельно), жорданова цепочка, построенная для матрицы вида (3.2.1) с начальным собственным вектором $\|f\| = \|1\ 0\ 0\ \ldots\ 0\|^{\mathrm{T}}$, является стандартным базисом в линейном пространстве U^l.

Заметим также, что уравнения (3.2.3) можно записать в других формах, а именно: если обозначить $\|\widehat{B}\| = \|\widehat{A} - \lambda_0 \widehat{E}\|$, то в виде

$$\begin{array}{lcl} \|\widehat{B}\|\|h_{(1)}\| = \|o\|\ , & \Longrightarrow & \|\widehat{B}\|\|h_{(1)}\| = \|o\|\ , \\ \|\widehat{B}\|\|h_{(2)}\| = \|h_{(1)}\|\ , & \Longrightarrow & \|\widehat{B}\|^2\|h_{(2)}\| = \|o\|\ , \\ \|\widehat{B}\|\|h_{(3)}\| = \|h_{(2)}\|\ , & \Longrightarrow & \|\widehat{B}\|^3\|h_{(3)}\| = \|o\|\ , \\ \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots\dots \\ \|\widehat{B}\|\|h_{(l)}\| = \|h_{(l-1)}\|\ , & \Longrightarrow & \|\widehat{B}\|^l\|h_{(l)}\| = \|o\|\ . \end{array} \qquad (3.2.4)$$

Опишем теперь основные свойства жордановых цепочек.

Теорема 3.2.1 **Множество элементов в U^l, являющихся**
– какой-либо жордановой цепочкой;
– либо объединением нескольких различных жордановых цепочек,
линейно независимое.

Доказательство

Докажем первое утверждение.

Из соотношений (3.2.4) следует, что

$$\|\widehat{B}\|^s \|h_{(s+1)}\| = \|h_{(1)}\| \quad \forall s = [1, l-1]$$

и (3.2.5)

$$\|\widehat{B}\|^r \|h_{(s+1)}\| = \|o\| \quad \forall r > s,\ \forall s = [1, l-1] \ ,$$

поскольку результат умножения матрицы $\|\widehat{B}\|$ на присоединенный вектор есть или присоединенный вектор с номером на единицу меньшим, или же нулевой столбец. Действительно, $\forall s = [1, l-1]$:

$$\|\widehat{B}\|^s \|h_{(s+1)}\| = \|\widehat{B}\|^{s-1} \|\widehat{B}\| \|h_{(s+1)}\| = \|\widehat{B}\|^{s-1} \|h_{(s)}\| = \ldots$$

$$\ldots = \|\widehat{B}\|^2 \|h_{(3)}\| = \|\widehat{B}\| \|\widehat{B}\| \|h_{(3)}\| = \|\widehat{B}\| \|h_{(2)}\| = \|h_{(1)}\| \ .$$

Пусть

$$C_1\|h_{(1)}\| + C_2\|h_{(2)}\| + \ \ldots \ + C_l\|h_{(l)}\| = \|o\| \ .$$

Покажем, что в этом случае линейная комбинация в левой части равенства тривиальная.

Действительно, умножив обе части равенства на $\|\widehat{B}\|^{l-1}$, получим

$$\|\widehat{B}\|^{l-1}\left(C_1\|h_{(1)}\| + C_2\|h_{(2)}\| + \ \ldots \ + C_l\|h_{(l)}\|\right) = \|o\| \ ,$$

$$C_1\|\widehat{B}\|^{l-1}\|h_{(1)}\| + C_2\|\widehat{B}\|^{l-1}\|h_{(2)}\| + \ldots + C_l\|\widehat{B}\|^{l-1}\|h_{(l)}\| = \|o\|$$

или (с учетом (3.2.5)):

$$C_l\|h_{(1)}\| = \|o\| \quad \Longrightarrow \quad C_l = 0 \ .$$

Затем, подставив $C_l = 0$ и умножив обе части на $\|\widehat{B}\|^{l-2}$, получим

$$C_{l-1}\|h_{(1)}\| = \|o\| \quad \Longrightarrow \quad C_{l-1} = 0$$

и т.д.

А из тривиальности рассматриваемой линейной комбинации следует справедливость первого утверждения теоремы.

Наконец, поскольку векторы $\|h_{(1)}\|$ *из всех* жордановых цепочек линейно независимы в своей совокупности, то оказывается справедливым и второе утверждение теоремы.

Теорема доказана.

В курсе линейной алгебры доказывается, важная для рассматриваемой задачи,

Теорема 3.2.2 (Жордана) **Для любого линейного преобразования $\widehat{A}$ в U^n существует базис (называемый *жордановым*), образованный из всех жордановых цепочек для всех попарно различных собственных значений этого преобразования.**

Определение 3.2.2	*Жордановым блоком*, отвечающим собственному значению λ_0 кратности k с q-мерным собственным подпространством, назовем квадратную порядка k блочно-диагональную матрицу $\|J(\lambda_0)\|$ вида $$\left\| \begin{array}{cccc} \|J_{l_1}(\lambda_0)\| & \|\,O\,\| & \dots & \|\,O\,\| \\ \|\,O\,\| & \|J_{l_2}(\lambda_0)\| & \dots & \|\,O\,\| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \|\,O\,\| & \|\,O\,\| & \dots & \|J_{l_q}(\lambda_0)\| \end{array} \right\| ,$$ где расположенные на главной диагонали квадратные подматрицы $\|J_{l_1}\|,\ \|J_{l_2}\|,\ \dots,\ \|J_{l_q}\|$ суть жордановы клетки вида (3.2.1), отвечающие собственному значению λ_0 и каждому из q линейно независимых собственных векторов, начинающих соответствующие жордановы цепочки, имеющих длины $l_1,\ l_2,\ \dots\ l_q$. Через $\|\,O\,\|$ обозначены нулевые подматрицы подходящего размера.

Отметим, что при этом сумма порядков (размеров) жордановых клеток в блоке равна кратности собственного значения λ_0, то есть

$$l_1 + l_2 + \dots + l_q = k \ .$$

Например, жордановы блоки с $k = 4$ и $q = 2$ могут иметь вид

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\| \qquad \left\| \begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\| \qquad \left\| \begin{array}{c|ccc} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\| .$$

Пусть линейное преобразование $\|\widehat{A}\|$, действующее в U^n, заданное матрицей $\|A\|$, имеет характеристический многочлен вида

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s} \ ,$$

причем $\lambda_j \neq \lambda_i$ при $j \neq i$ и $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$.

Определение 3.2.3	Будем говорить, что матрица $\|A\|$ имеет *нормальную жорданову форму*, если она записана в блочно-диагональном виде (см. рис. 3.1): $$\|A\| = \left\| \begin{array}{cccc} \|J(\lambda_1)\| & \| O \| & \ldots & \| O \| \\ \| O \| & \|J(\lambda_2)\| & \ldots & \| O \| \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \| O \| & \| O \| & \ldots & \|J(\lambda_s)\| \end{array} \right\| ,$$ где расположенные на главной диагонали квадратные подматрицы $$\|J(\lambda_1)\|, \ \|J(\lambda_2)\|, \ \ldots \ \|J(\lambda_s)\|$$ являются жордановыми блоками, отвечающими попарно различным собственным значениям преобразования $\widehat{A}$, а через $\| O \|$ обозначены нулевые подматрицы подходящего размера.

Резюмируя определения (3.2.1) – (3.2.3), можно сказать, что матрица имеет нормальную жорданову форму, если у нее на главной диагонали расположены m жордановых блоков, где m – число различных собственных значений матрицы $\|A\|$, а остальные элементы – нули.

При этом жорданов блок с номером j есть квадратная подматрица порядка k_j, (k_j – кратность λ_s) состоящая из q_j жордановых клеток, где q_j – максимальное число линейно независимых собственных векторов, отвечающих λ_j, равное размерности его собственного подпространства. На главной диагонали каждого блока расположено λ_j – собственное значение, которому этот блок соответствует.

Напомним еще раз, что *собственным подпространством* собственного значения λ_s называется множество *всех* собственных векторов, отвечающих этому собственному значению, [1] и в курсе линейной алгебры доказывается, что размерность собственного подпространства q_s ограничена неравенствами

$$1 \leq q_j \leq k_j \quad \forall\, j = [1, s]\ .$$

Причем, какое именно значение из этого диапазона имеет величина q_j зависит от конкретного вида матрицы $\|A\|$.

[1] Дополненное, естественно, нулевым элементом.

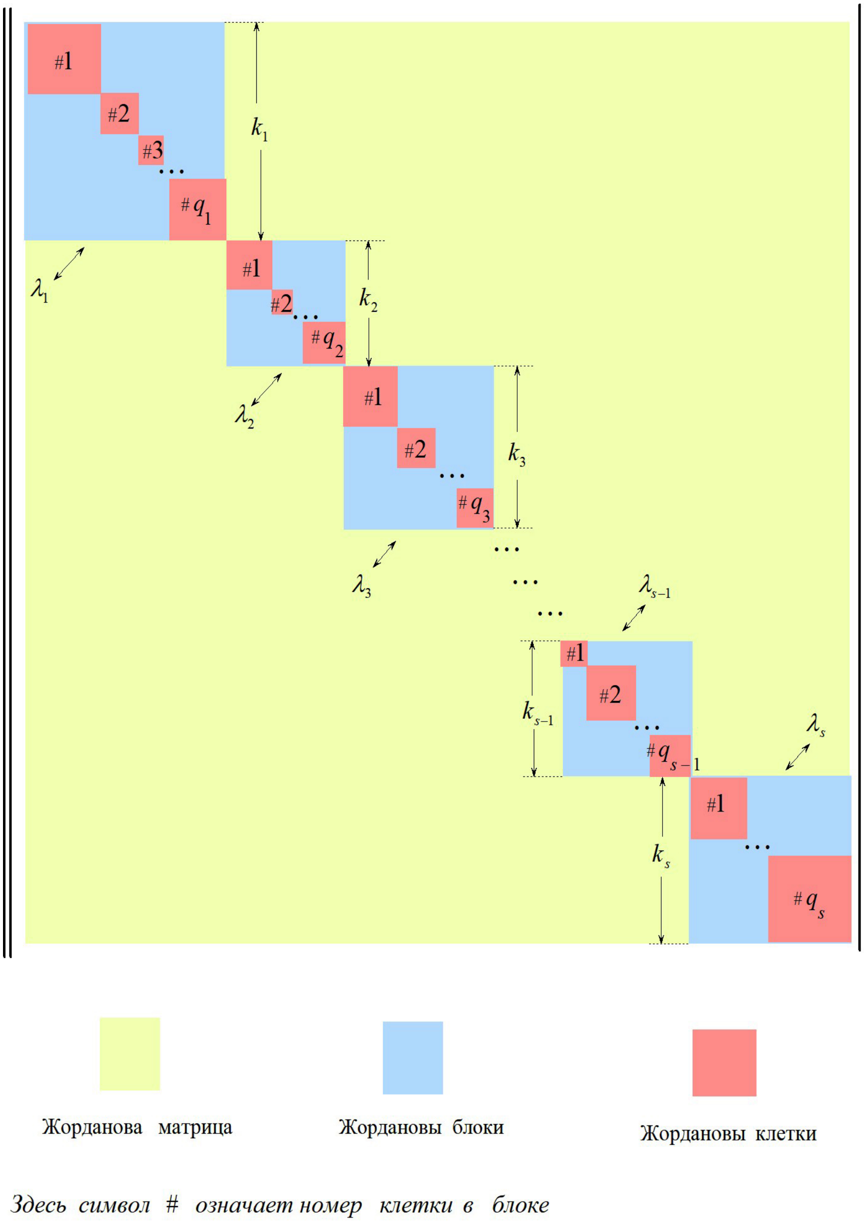

Рис. 1. Нормальная жорданова форма матрицы

В жордаровой матрице q_j равно максимальному числу *линейно независимых* собственных векторов, отвечающих λ_j, и для матрицы $\|A\|$ в жордановой форме будут справедливы следующие утверждения.

1°. Число ее жордановых блоков равно числу различных собственных значений матрицы $\|A\|$.

2°. Размер каждого блока равен кратности собственного значения, соответствующего этому блоку. Сумма размеров всех блоков равна n – размеру матрицы $\|A\|$.

3°. Число жордановых клеток в жордановом блоке равно размерности собственного подпространства собственного значения, соответствующего этому блоку, и равно числу жордановых цепочек, начинающихся с различных линейно независимых собственных векторов этого подпространства.

4°. Сумма размеров всех жордановых клеток в жордановом блоке равна размеру этого блока, то есть кратности собственного значения, соответствующего данному блоку.

Теорема 3.2.3 **Матрица каждого линейного преобразования в U^n имеет в жордановом базисе нормальную жорданову форму.**

Доказательство

По определению столбцами матрицы линейного оператора в конкретном базисе служат координатные представления образов базисных элементов.

Пусть базис жорданов и состоит из объединения всех жордановых цепочек, отвечающих собственным значениям матрицы $\|A\|$, то есть имеет вид

$$\Big\{\dots\ ,\ \|h_{(s1)}\|,\ \|h_{(s2)}\|,\ \dots\ ,\|h_{(sl)}\|\ ,\ \dots\Big\}\ ,$$

где s – номер цепочки. Тогда первый из наборов равенств (3.2.2) можно рассматривать как координатные разложения образов базисных элементов по жорданову базису, которые существуют и единственны.

Значит, координатное представление образа каждого базисного элемента является столбцом, у которого все компоненты нулевые, за исключением одного, равного λ_{0s}, или двух, равных 1 и λ_{0s} соответственно.

Следовательно, матрица $\|A\|$ в жордановом базисе имеет жорданову форму.

Теорема доказана.

Теоремы 3.2.2 (Жордана) и 3.2.3 в совокупности утверждают, что для любого линейного преобразования в U^n имеется жорданов базис, в котором матрица этого преобразования имеет жорданову форму, то есть состоит из жордановых клеток вида (3.2.1), расположенных вдоль главной диагонали.

Воспользуемся этим фактом для решения однородной системы (3.1.1) в случае, когда условия теоремы 3.1.3 не выполняются.

Пусть невырожденная матрица

$$\|S\| = \left\| \begin{array}{cccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{array} \right\|$$

есть матрица перехода от исходного базиса в U^n к жорданову базису. Тогда матрица $\|J\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\|$ будет иметь жорданову форму, причем (как показывается в курсе линейной алгебры) характеристические многочлены у матриц $\|J\|$ и $\|A\|$ одинаковые.

Значит, корни их характеристических уравнений одинаковые и одинаковой кратности.

Выполнив замену неизвестных в системе $\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\|$ по формуле

$$\|\,x(t)\| = \|S\|\|\,y(t)\| \quad \text{или} \quad x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\,y_j(t) \quad \forall i = [1,n], \tag{3.2.6}$$

получим $\|S\|\|\dot{y}\| = \|A\|\|S\|\|y\|$ или $\|\dot{y}\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\|\|y\|$, и окончательно

$$\|\dot{y}\| = \|J\|\|y\|, \tag{3.2.7}$$

где $\|J\|$ — жорданова матрица.

Система уравнений (3.2.7) имеет блочно-диагональную матрицу. Поэтому решения $y(t)$ можно искать для каждой жордановой клетки отдельно.

Например, для самой первой клетки, положив $\lambda = \lambda_1$ и $l = l_1$, имеем (с учетом (3.2.4)) подсистему вида

$$\left\|\begin{array}{l} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dots \\ \dot{y}_{l-1} \\ \dot{y}_l \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{cccccc} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_{l-1} \\ y_l \end{array}\right\|$$

или

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2 \ , \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 + y_3 \ , \\ \dot{y}_3 = \lambda y_3 + y_4 \ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{y}_{l-1} = \lambda y_{l-1} + y_l \ , \\ \dot{y}_l = \lambda y_l \ . \end{array}\right.$$

Эту систему удобнее решать сделав предварительно подстановку

$$y_j(t) = e^{\lambda t} u_j(t) \ \ \forall j = [1, l].$$

В этом случае для $u_j(t)\ \forall j = [1, l]$ получаем систему

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = u_2(t)\ , \\ \dot{u}_2(t) = u_3(t)\ , \\ \dot{u}_3(t) = u_4(t)\ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{u}_{l-1}(t) = u_l(t)\ , \\ \dot{u}_l(t) = 0\ . \end{cases}$$

Решив эту систему, начиная с последнего уравнения, найдем, что

$$u_l(t) = C_l \ ,$$

$$u_{l-1}(t) = C_l t + C_{l-1} \ ,$$

$$u_{l-2}(t) = C_l \frac{t^2}{2} + C_{l-1} t + C_{l-2} \ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_1(t) = C_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + C_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \ldots + C_2 \frac{t}{1!} + C_1 \ .$$

Откуда

$$\begin{aligned} & y_l(t) = C_l e^{\lambda t} \ , \\ & y_{l-1}(t) = \Big(C_l t + C_{l-1} \Big) e^{\lambda t} \ , \\ & y_{l-2}(t) = \left(C_l \frac{t^2}{2} + C_{l-1} t + C_{l-2} \right) e^{\lambda t} \ , \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & y_1(t) = \left(C_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + C_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \ldots + C_2 \frac{t}{1!} + C_1 \right) e^{\lambda t} \ . \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Проведя аналогичные вычисления для всех клеток во всех жордановых блоках, получим общее решение системы уравнений (3.2.7). Переход к исходным неизвестным выполняется по формулам (3.2.6), которые позволяют получить общее решение системы (3.1.1), итоговый вид которого определяет

Теорема 3.2.4

Общее решение однородной системы (3.1.1) есть вектор-функция, каждая компонента которой имеет вид

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{q} P_{ij}(t) e^{\lambda_j t} \quad \forall i = [1, n] \, ,$$

где $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots \ \lambda_q$ **— все** *попарно различные* **собственные значения преобразования, заданного матрицей** $\|A\|$, **а** $P_{ij}(t)$ **— алгебраический многочлен:**

- **степень которого на единицу меньше максимальной из длин жордановых цепочек, отвечающих собственному значению** λ_j ;
- **и коэффициенты которого зависят от** n **произвольных комплексных постоянных** $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Заметьте, что набор констант $C_1, C_2, \ldots, C_n$ должен быть *одинаков* для всех многочленов $P_{ij}(t)$.

В заключение обсуждения вопроса о построении общего решения системы (3.1.1) сделаем некоторые замечания.

Во-первых, из теоремы 3.2.4 следует, что общее решение системы (3.1.1) можно искать методом неопределенных коэффициентов, формально не прибегая к построению жорданова базиса. Возможный вариант такого подхода описан в приложении. Во-вторых, в случае вещественной матрицы $\|A\|$ выделение вещественного решения выполняется тем же методом, что был рассмотрен в § 3.1.

Наконец, для задач с невысокой размерностью, которые часто встречаются в приложениях, целесообразно использовать итоговые формулы (3.2.8) для общих решений, записанные в удобном для запоминания формате. Приведем их в исходных переменных (без вывода) для $n = 2,\ 3$, исключая случаи, удовлетворяющие условиям теоремы 3.1.3.

Пусть $n = 2$ и λ есть двукратное собственное значение, у которого собственное подпространство одномерное. Тогда общее решение системы (3.1.1) можно представить в виде

$$\|x(t)\| = C_1 \|h_{(1)}\| e^{\lambda t} + C_2 \left(\|h_{(1)}\| t + \|h_{(2)}\| \right) e^{\lambda t} \ , \tag{3.2.9}$$

где $\|h_{(1)}\|$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ, а $\|h_{(2)}\|$ – присоединенный к нему вектор, найденный по формулам (3.2.2).

Пусть теперь $n = 3$. В случае, когда λ_1 простое и ему отвечает собственный вектор $\|h_{(1)}\|$, а λ_2 двукратное с собственным вектором $\|h_{(2)}\|$ и присоединенным $\|h_{(3)}\|$, формула общего решения такова:

$$\|x(t)\| = C_1\|h_{(1)}\|e^{\lambda_1 t} + C_2\|h_{(2)}\|e^{\lambda_2 t} + C_3\left(\|h_{(2)}\|t + \|h_{(3)}\|\right)e^{\lambda_2 t} \ .$$

Если в трехмерной задаче кратность собственного значения λ равна трем, то возможны два случая.

Или размерность собственного подпространства есть два, и жордановых цепочек две, одна из которых состоит лишь из собственного вектора $\|h_{(1)}\|$, а вторая состоит из собственного вектора $\|h_{(2)}\|$ и присоединенного $\|h_{(3)}\|$, тогда решение имеет вид

$$\|x(t)\| = C_1\|h_{(1)}\|e^{\lambda t} + C_2\|h_{(2)}\|e^{\lambda t} + C_3\left(\|h_{(2)}\|t + \|h_{(3)}\|\right)e^{\lambda t} \ .$$

Или же размерность собственного подпространства с собственным вектором $\|h_{(1)}\|$ равна единице, то в единственной жордановой цепочке будут два присоединенных к $\|h_{(1)}\|$ вектора $\|h_{(2)}\|$ и $\|h_{(3)}\|$. Общее решение в этом случае дается формулой

$$\|x(t)\| = \Bigg(C_1\|h_{(1)}\| + C_2\left(\|h_{(1)}\|t + \|h_{(2)}\|\right) + \\ + C_3\left(\|h_{(1)}\|\frac{t^2}{2!} + \|h_{(2)}\|\frac{t}{1!} + \|h_{(3)}\|\right)\Bigg)e^{\lambda t} \ .$$

Во всех формулах $C_1,\ C_2$ и C_3 – произвольные комплексные константы.

Следует заметить, что использование теоремы Жордана возможно потребует бо́льших вычислительных ресурсов, чем представляется изначально.

Дело в том, что жорданова цепочка, вообще говоря, может начинаться не с любого собственного вектора, отвечающего конкретному собственному значению. Например, в U^3 линейное преобразование, заданное матрицей

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| ,$$

имеет троекратное нулевое собственное значение и, соответствующее ему, двумерное собственное подпространство.

Убедитесь непосредственной проверкой, что для собственного вектора $\|1\ 0\ 0\|^{\mathrm{T}}$ присоединенные векторы существуют, а для $\|0\ 1\ 0\|^{\mathrm{T}}$ — не существуют. То есть для построения жордановой цепочки предварительно надо найти те собственные векторы, для которых уравнения (3.2.2) разрешимы.