Неоднородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим нормальную линейную неоднородную систему вида

$$\|\dot{x}(t)\| = \|A\|\|x(t)\| + \|b(t)\| \quad \forall t \in T \subset R^1, \qquad (3.3.1)$$

где коэффициенты матрицы $\|A\|$ — комплексные константы. Комплекснозначную непрерывную вектор-функцию $\|b(t)\|$ будем называть для краткости *неоднородностью.*

Теорема 3.3.1 **Общее решение неоднородной системы (3.3.1) представимо как сумма общего решения однородной системы (3.1.1) и частного решения той же неоднородной системы (3.3.1).**

Доказательство

Пусть $\|x^*(t)\|$ – частное решение неоднородной системы (3.3.1), а $\|y(t)\|$ – произвольное решение однородной. Тогда

$$\|\dot{x}^*(t)\| = \|A\|\|x^*(t)\| + \|b(t)\| \qquad \text{и}$$

$$\|\dot{y}(t)\| \;= \|A\|\|y(t)\| \,.$$

Сложив эти равенства почленно, получим

$$\|\dot{y}(t)\| + \|\dot{x}^*(t)\| = \|A\|\Bigg(\|y(t)\| + \|x^*(t)\|\Bigg) + \|b(t)\| \,,$$

то есть $\|x(t)\| = \|y(t)\| + \|x^*(t)\|$ – произвольное решение неоднородной системы (3.3.1).

Обратно, пусть $\|x(t)\|$ – произвольное частное решение неоднородной системы, а $\|x^*(t)\|$ – некоторое фиксированное частное решение неоднородной. Сделаем замену неизвестной $\|x(t)\| = \|y(t)\| + \|x^*(t)\|$. Тогда

$$\|\dot{y}(t)\| + \|\dot{x}^*(t)\| = \|A\|\|y(t)\| + \|A\|\|x^*(t)\| + \|b(t)\| \,,$$

и, поскольку $\|\dot{x}^*(t)\| = \|A\|\|x^*(t)\| + \|b(t)\|$, получаем

$$\|\dot{y}(t)\| = \|A\|\|y(t)\| \,.$$

То есть $\|y(t)\|$ есть решение однородной системы.

Теорема доказана.

Достаточно часто поиск частного решения неоднородной системы удается упростить путем его разделения на более простые (с вычислительной точки зрения) процедуры. Основой такого разделения может служить

Теорема 3.3.2 **Пусть $\|x_{(1)}(t)\|$ – решение системы (3.3.1) с неоднородностью $\|b_{(1)}(t)\|$, а $\|x_{(2)}(t)\|$ – решение системы (3.3.1) с неоднородностью $\|b_{(2)}(t)\|$, тогда**

$$\|x(t)\| = \|x_{(1)}(t)\| + \|x_{(2)}(t)\|$$

будет решением системы (3.3.1) с неоднородностью

$$\|b(t)\| = \|b_{(1)}(t)\| + \|b_{(2)}(t)\|.$$

Доказательство

Имеем

$$\|\dot{x}_{(1)}(t)\| = \|A\|\|x_{(1)}(t)\| + \|b_{(1)}(t)\|$$

и

$$\|\dot{x}_{(2)}(t)\| = \|A\|\|x_{(2)}(t)\| + \|b_{(2)}(t)\| \ .$$

Тогда

$$\|\dot{x}(t)\| = \|\dot{x}_{(1)}(t)\| + \|\dot{x}_{(2)}(t)\| =$$

$$= \|A\|\|x_{(1)}(t)\| + \|A\|\|x_{(2)}(t)\| + \|b_{(1)}(t)\| + \|b_{(2)}(t)\| =$$

$$= \|A\|\|x(t)\| + \|b(t)\| \ .$$

То есть

$$\|\dot{x}(t)\| = \|A\|\|x(t)\| + \|b(t)\| \ .$$

Теорема доказана.

Таким образом, согласно теореме 3.3.1, для решения неоднородной системы (3.3.1) необходимо (помимо решения соответствующей однородной системы) найти некоторое частное решение неоднородной.

Как и в случае линейного неоднородного уравнения n-го порядка, это частное решение неоднородной системы может быть найдено в квадратурах при помощи формулы общего решения однородной методом *вариации постоянных*, что доказывает

Теорема 3.3.3 **Решением системы (3.3.1) является вектор-функция**

$$\|x^*(t)\| = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)\|g_{(k)}(t)\| \ , \tag{3.3.2}$$

где $\left\{ \|g_{(1)}(t)\|, \|g_{(2)}(t)\|, \ldots, \|g_{(n)}(t)\| \right\}$ **— некоторый базис в линейном** n**-мерном пространстве частных решений однородной системы (3.1.1), а функции** $C_k(t)$ **находятся из матричного уравнения**

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k(t)\|g_{(k)}(t)\| = \|b(t)\| \ .$$

Доказательство

Подставив (3.3.2) в (3.3.1), получим

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k \|g_{(k)}\| + \sum_{k=1}^{n} C_k \|\dot{g}_{(k)}\| = \|A\| \sum_{k=1}^{n} C_k \|g_{(k)}\| + \|b(t)\| \, ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k \|g_{(k)}\| = \sum_{k=1}^{n} C_k \left(-\|\dot{g}_{(k)}\| + \|A\| \|g_{(k)}\| \right) + \|b(t)\| \, .$$

Выражения, стоящие в круглых скобках, равны нулю, поскольку каждый базисный элемент $\|g_{(k)}\|$ есть решение однородной системы (3.1.1.) Поэтому получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k(t) \|g_{(k)}(t)\| = \|b(t)\| \, .$$

Теорема доказана.

В случае, когда неоднородности в системе (3.3.1) выражаются только через суммы и произведения вещественных функций at^k, $e^{\alpha t}$, $\cos\beta t$ и $\sin\beta t$, ее частное решение может быть найдено без использования интегрирования — *методом неопределенных коэффициентов.* Действительно, при $\mu = \alpha + i\beta$ оказывается справедливой

Теорема 3.3.4

Пусть система уравнений (3.3.1) такова, что $\|\dot{x}(t)\| = \|A\|\|x(t)\| + \|p(t)\|e^{\mu t}$ **, где**

$$\|p(t)\| = \|a_{(m)}\|\,t^m + \|a_{(m-1)}\|\,t^{m-1} + \ldots + \|a_{(1)}\|\,t + \|a_{(0)}\|\ .$$

Тогда частное решение системы (3.3.1) имеет вид $\|\,q(t)\|e^{\mu t}$ **, где** $\|q(t)\|$ **– вектор-многочлен**

- **той же самой степени, что и** $\|\,p(t)\,\|$**, если** μ **не является корнем характристического уравнения;**
- **степени не выше, чем** $m + l$**, если** μ **является корнем характеристического уравнения, а** l **– размер максимальной из жордановых клеток, отвечающих этому корню в жордановой форме матрицы** $\|A\|$**.**

Доказательство

Приведем матрицу $\|A\|$ к жордановой форме $\|J\|$ тем же преобразованием $\|S\|$, что было использовано в § 3.2 для однородной системы. В этом случае $\|S\|$ есть матрица перехода в пространстве U^n от исходного базиса к жорданову, и справедливы соотношения

$$\|x(t)\| = \|S\|\|y(t)\| \quad \text{и} \quad \|J\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\| \, .$$

В результате вместо (3.2.6) получим для жордановой клетки, отвечающей λ – корню характеристического уравнения, систему уравнений

$$\|\dot{y}(t)\| = \|J\|\|y(t)\| + e^{\mu t}\|\bar{p}(t)\| \, ,$$

которая заменой неизвестных по формулам $y_j(t) = e^{\lambda t}u_j(t)$ приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = u_2(t) + \bar{p}_1(t)e^{(\mu-\lambda)t} \, , \\ \dot{u}_2(t) = u_3(t) + \bar{p}_2(t)e^{(\mu-\lambda)t} \, , \\ \dot{u}_3(t) = u_4(t) + \bar{p}_3(t)e^{(\mu-\lambda)t} \, , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{u}_{l-1}(t) = u_l(t) + \bar{p}_{l-1}(t)e^{(\mu-\lambda)t} \, , \\ \dot{u}_l(t) = \bar{p}_l(t)e^{(\mu-\lambda)t} \, , \end{cases}$$

где $\bar{p}_j(t)$ – алгебраические многочлены степени не выше, чем m. Из этой системы последовательно находим функции $u_l(t),\ u_{l-1}(t),\ \ldots, u_2(t),\ u_1(t)$.

Если $\mu \neq \lambda$, то $u_l(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \bar{p}_l(s) e^{(\mu-\lambda)s} ds = \bar{q}_l(t) e^{(\mu-\lambda)t}$,

причем степень многочлена $\bar{q}_l(t)$ такая же, что и у многочлена $\bar{p}_l(t)$. Для других решений ситуация аналогичная. Значит, первое утверждение теоремы справедливо.

Если $\mu = \lambda$, то $e^{(\mu-\lambda)t} \equiv 1$, и при каждом интегрировании степень многочлена увеличивается на единицу. После l шагов получаем многочлен степени не выше, чем $m + l$.

Из всех жордановых клеток, отвечающих собственному значению λ, выбираем клетку максимального размера. Ее l и определяет наибольший порядок алгебраических многочленов $\bar{q}_j(t)$.

Выполнив обратный переход (как в § 3.2) от функций $\|u(t)\|$ к функциям $\|x(t)\|$ по формулам

$$\|x(t)\| = \|S\| \|y(t)\| \ ,$$

получим второе утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Описанный метод проиллюстрируем примером.

Задача 3.3.2 Решить систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \dot{x} & = & 3x & - & y & + & e^t + e^{2t} - 2t^2 \ , \\ \dot{y} & = & 2x & & & + & 3e^t + 2e^{2t} - t^2 \ . \end{array}\right.$$

Решение 1°. Представим для удобства решаемую систему в матричной форме:

$$\left\|\begin{array}{c}\dot{x}\\ \dot{y}\end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{cc}3 & -1\\ 2 & 0\end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c}x\\ y\end{array}\right\| + \left\|\begin{array}{c}1\\ 3\end{array}\right\| e^t + \left\|\begin{array}{c}1\\ 2\end{array}\right\| e^{2t} + \left\|\begin{array}{c}-2t^2\\ -t^2\end{array}\right\|$$

или

$$\left\|\begin{array}{c}\dot{x}\\ \dot{y}\end{array}\right\| = \|A\| \left\|\begin{array}{c}x\\ y\end{array}\right\| + \|b_{(1)}\| e^t + \|b_{(2)}\| e^{2t} + \|b_{(3)}\| t^2 .$$

введя (полезные для дальнейших расчетов) обозначения

$$\|A\| = \left\|\begin{array}{cc}3 & -1\\ 2 & 0\end{array}\right\| , \quad \|b_{(1)}\| = \left\|\begin{array}{c}1\\ 3\end{array}\right\| ,$$

$$\|b_{(2)}\| = \left\|\begin{array}{c}1\\ 2\end{array}\right\| , \qquad \|b_{(3)}\| = \left\|\begin{array}{c}-2\\ -1\end{array}\right\| ,$$

2°. Теперь найдем (имея в виду применение теоремы 3.3.1) по стандартной схеме, описанной в § 3.1, общее решение однородной системы:

$$\left\|\begin{array}{c}\dot{x}\\ \dot{y}\end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{cc}3 & -1\\ 2 & 0\end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c}x\\ y\end{array}\right\| .$$

Находим собственные значения линейного преобразования с матрицей $\|A\|$:

$$\det \left\|\begin{array}{cc}3-\lambda & -1\\ 2 & -\lambda\end{array}\right\| = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc}\lambda_1 & = & 1 ,\\ \lambda_2 & = & 2\end{array}$$

и соответствующие собственные векторы:

$$\left\|\begin{array}{cc}2 & -1\\ 2 & -1\end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c}\xi_{1(1)}\\ \xi_{2(1)}\end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c}0\\ 0\end{array}\right\| \quad \Longrightarrow \quad \left\|\begin{array}{c}\xi_{1(1)}\\ \xi_{2(1)}\end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c}1\\ 2\end{array}\right\| ,$$

$$\left\|\begin{array}{cc}1 & -1\\ 2 & -2\end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c}\xi_{1(2)}\\ \xi_{2(2)}\end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c}0\\ 0\end{array}\right\| \quad \Longrightarrow \quad \left\|\begin{array}{c}\xi_{1(2)}\\ \xi_{2(2)}\end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c}1\\ 1\end{array}\right\| .$$

Тогда, согласно теореме 3.1.3, получаем общее решение однородной системы

$$\left\| \begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right\| = C_1 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\| e^t + C_2 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| e^{2t} .$$

3°. Используя теорему 3.3.2, найдем теперь частные решения исходной неоднородной системы отдельно для каждой из неоднородностей, содержащих соответственно $\left\|b_{(1)}\right\|$, $\left\|b_{(2)}\right\|$ и $\left\|b_{(3)}\right\|$.

Рассмотрим подробно случай неоднородности $\left\|b_{(1)}\right\| e^t$, которая является векторным квазимногочленом с $\mu = = \lambda_1 = 1$, причем $m = 0$, а $l = 1$, поскольку μ совпадает с однократным корнем характеристического многочлена. Значит, частное решение следует искать в виде

$$\left\|r^*_{(1)}\right\| = \Big(\left\|a_{(01)}\right\| + t\left\|a_{(11)}\right\|\Big)e^t,$$

где первый нижний индекс у $\left\|a_{(ij)}\right\|$ равен показателю степени t, а второй – номеру частного решения. Его подстановка в неоднородную систему

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \end{array} \right\| = \left\|A\right\| \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\| + \left\|b_{(1)}\right\| e^t$$

дает

$$\Big(\left\|a_{(01)}\right\| + \left\|a_{(11)}\right\| + t\left\|a_{(11)}\right\|\Big)e^t =$$

$$= \left\|A\right\| \Big(\left\|a_{(01)}\right\| + t\left\|a_{(11)}\right\|\Big)e^t + \left\|b_{(1)}\right\| e^t .$$

Откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, находим, что

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \left\|A\right\| \left\|a_{(11)}\right\| & = & \left\|a_{(11)}\right\| , \\ \left\|A\right\| \left\|a_{(01)}\right\| + \left\|b_{(1)}\right\| & = & \left\|a_{(01)}\right\| + \left\|a_{(11)}\right\| \end{array} \right.$$

или

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Big(\left\|A\right\| - \left\|E\right\|\Big)\left\|a_{(11)}\right\| & = & \left\|o\right\| , \\ \Big(\left\|A\right\| - \left\|E\right\|\Big)\left\|a_{(01)}\right\| & = & \left\|a_{(11)}\right\| - \left\|b_{(1)}\right\| . \end{array} \right. \qquad (3.3.4)$$

Заметим, что основные матрицы в обоих уравнениях системы (3.3.4) вырождены. Это есть следствие равенства $\mu = \lambda_1 = 1$, то есть резонанса. При этом первое уравнение (как однородное) совместно и имеет неединственное решение вида $\left\| a_{(11)} \right\| = \alpha \left\| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\|$. Второе же уравнение неоднородное, оно будет иметь решения, вообще говоря, не при любом $\left\| a_{(11)} \right\|$. Его можно сделать совместным, подобрав подходящее значение α.

Действительно, расширенная матрица второго уравнения системы (3.3.4) будет иметь ранг, равный рангу основной матрицы (что по теореме Кронекера-Капелли гарантирует совместность), если будут выполнены равенства

$$\mathrm{rg} \left\| \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & \alpha - 1 \\ 2 & -1 & 2\alpha - 3 \end{array} \right\| = \mathrm{rg} \left\| \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 2 \end{array} \right\| = 1\,.$$

Это дает $\alpha = 2$ и $\left\| a_{(11)} \right\| = \left\| \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} \right\|$. Вектор $\left\| a_{(01)} \right\|$ здесь неоднозначен, его можно взять равным $\left\| a_{(01)} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \right\|$ и тогда $\left\| r^*_{(1)} \right\| = \left(\left\| \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \right\| + t \left\| \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} \right\| \right) e^t\,.$

Случаи неоднородностей $\left\| b_{(2)} \right\|$ и $\left\| b_{(3)} \right\|$ рассматриваются аналогично первому. Второй случай также резонансный, причем частным решением оказывается квазимногочлен нулевой степени (теорема 3.3.4 это допускает) вида $\left\| r^*_{(2)} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| e^{2t}$. В третьем случае резонанса нет, а частное решение имеет вид

Решение получено.

$$\left\| r^*_{(3)} \right\| = -\frac{1}{4} \left\| \begin{matrix} 5 \\ 13 \end{matrix} \right\| - \frac{t}{2} \left\| \begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix} \right\| + \frac{t^2}{2} \left\| \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right\|\,.$$