Постановка задачи Коши и метод сжимающего оператора

Определение 4.1.1	*Нормальной системой дифференциальных уравнений порядка* $n \geq 2$ называется система уравнений вида $$\left\{\begin{array}{lcl} {y_1}'(x) & = & f_1\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\right) \ , \\ {y_2}'(x) & = & f_2\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\right) \ , \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ {y_n}'(x) & = & f_n\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\right) \end{array}\right.$$ или же в векторной форме $$\vec{y}\,'(x) = \vec{f}\left(x, \vec{y}(x)\right) \ ,$$

где $x \in [a, b]$ – независимая переменная, функции

$$\|\vec{y}(x)\| = \|\, y_1(x)\, y_2(x)\ \ldots\ y_n(x)\, \|^{\mathrm{T}}$$

суть неизвестные, а компоненты вектора $\vec{f}$

$$\|\,\vec{f}\,(x, \vec{y})\,\| = \left\|\begin{array}{c} f_1\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right) \\ f_2\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right) \end{array}\right\|$$

– заданные, непрерывные в некоторой непустой области $G \subseteq E^{n+1}$, функции от $n+1$ переменной.

Определение 4.1.2

Вектор-функция $\vec{y}^*(x)$ называется *решением задачи Коши*, если

– $\vec{y}^*(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a,b]$;

– для $\vec{y}^*(x)$ верно: $\left\| \begin{matrix} x \\ \vec{y}^*(x) \end{matrix} \right\| \in G \;\; \forall x \in [a,b]$;

– $\vec{y}^{*\,\prime}(x) \equiv \vec{f}(x, \vec{y}^*(x))$ на $[a,b]$ (4.1.1)

и, кроме того, выполнены *начальные условия*

$$\vec{y}^*(x_0) = \vec{y}_0 \ , \quad x_0 \in [a,b] \ , \quad \left\| \begin{matrix} x_0 \\ \vec{y}_0 \end{matrix} \right\| \in G \qquad (4.1.2)$$

Рассмотрим теперь систему интегральных уравнений

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(u, \vec{y}(u))\, du \,. \tag{4.1.3}$$

Вектор-функцию $\vec{y}(x)$ назовем *решением* этой системы, если

– $\vec{y}(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$;

– $\vec{y}(x)$ удовлетворяет условию $\left\| \begin{array}{c} x \\ \vec{y}(x) \end{array} \right\| \in G \ \forall x \in [a, b]$;

– $\vec{y}(x) \equiv \vec{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(u, \vec{y}(u))\, du \quad \forall x \in [a, b]\,.$ (4.1.4)

Для задачи Коши оказывается справедливой

Теорема 4.1.1 **Для того, чтобы вектор-функция $\vec{y}^*(x)$ являлась решением задачи Коши (4.1.1) – (4.1.2) необходимо и достаточно, чтобы $\vec{y}^*(x)$ была решением системы интегральных уравнений (4.1.3).**

Доказательство.

Пусть $\vec{y}^*(x)$ есть решение задачи Коши. Тогда интегрирование от x_0 до x тождества

$$\vec{y}\,'(x) \equiv \vec{f}(x, \vec{y}(x)) \ \forall x \in [a, b]$$

дает тождество (4.1.4), поскольку верно равенство (4.1.2).

Обратно, из непрерывности подынтегральной функции в тождестве (4.1.3) следует, что его можно дифференцировать по x – верхнему пределу интегрирования. Это дает тождество (4.1.1). Наконец, из условия (4.1.3) следует при $x = x_0$, что $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$.

Теорема доказана.

Принцип сжимающих операторов

Вначале напомним несколько определений из курса математического анализа.

Если каждому элементу x некоторого линейного пространства Λ поставлено в однозначное соответствие неотрицательное (называемое *нормой* x) число $\langle x\rangle$ такое, что $\forall x, y \in \Lambda$ и любого вещественного числа λ справедливы соотношения:

1° $\langle \lambda x\rangle = |\lambda|\,\langle x\rangle$ (однородность нормы) ;

2° $\langle x+y\rangle \le \langle x\rangle + \langle y\rangle$ (неравенство треугольника) ;

3° $\langle x\rangle = 0 \iff x = o\,,$

то такое линейное пространство называется *нормированным.*

Отметим, что нормированное пространство является метрическим с метрикой (то есть расстоянием между элементами), определяемой по формуле

$$\rho(x,y) = \langle x-y\rangle\ . \tag{4.2.1}$$

Напомним также, что метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится, называется *полным*, а полное (в смысле метрики (4.2.1)) нормированное линейное пространство называется *банаховым.*

Рассмотрим теперь некоторый оператор $\widehat{\Phi}$ с множеством определения U, принадлежащим банахову пространству X, и со значениями в том же пространстве. Иначе говоря, $\widehat{\Phi}$ есть *преобразование* вида

$$\widehat{\Phi}: \ U \to X.$$

Дадим следующие определения.

`Определение 4.2.1`	Элемент $x^* \in U$ называется *неподвижной точкой* преобразования $\widehat{\Phi}$, если $$\widehat{\Phi}\, x^* = x^*.$$

Определение 4.2.2	Оператор $\widehat{\Phi}$ называется *сжимающим преобразованием на множестве* U, если существует число $q \in [0,1)$ такое, что $$\left\langle \widehat{\Phi}\, x - \widehat{\Phi}\, y \right\rangle \leq\; q \left\langle\, x - y\, \right\rangle \quad \forall x, y \in U\,.$$ Число q в этом случае называется *коэффициентом сжатия.*

Определение 4.2.3	Оператор $\widehat{\Phi}$ называется *непрерывным* на $x_0 \in U$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x \in U_{\delta_\varepsilon}(x_0)$ справедливо неравенство $$\left\langle \widehat{\Phi} x - \widehat{\Phi} x_0 \right\rangle < \varepsilon\,.$$ При этом оператор непрерывный на каждом элементе множества U называется непрерывным на этом множестве.

Заметим, что каждый сжимающий оператор с $q > 0$ является непрерывным на множестве U .

В общем случае оказывается справедливой (называемая в математической литературе *принципом сжимающих операторов*)

Теорема 4.2.1 **Пусть $\widehat{\Phi}$ является сжимающим преобразованием с коэффициентом сжатия q в замкнутом шаре $\overline{U}_r(x_0) \subset X$ радиуса r с центром на элементе x_0. И пусть при этом выполнено условие**

$$\left\langle \widehat{\Phi}\, x_0 - x_0 \right\rangle \leq (1-q)r\ .$$

Тогда в $\overline{U}_r(x_0) \subset X$ существует *единственная* **неподвижная для $\widehat{\Phi}$ точка x^* такая, что**

– **последовательность $x_{(m)} = \widehat{\Phi}\, x_{(m-1)}$; (где $m = 1, 2, \ldots$) сходится к x^*.**

– **при этом оценка скорости сходимости имеет вид $\left\langle\, x_{(m)} - x^* \,\right\rangle \leq q^m r$.**

Доказательство.

1°. Вначале покажем, что вся последовательность $\{x_{(m)}\}$ лежит в шаре $\overline{U}_r(x_0)$. Действительно, $\forall x \in \overline{U}_r(x_0)$ имеется оценка

$$\left\langle\, \widehat{\Phi}\, x - x_0 \,\right\rangle \leq \left\langle\, \widehat{\Phi}\, x - \widehat{\Phi}\, x_0 \,\right\rangle + \left\langle\, \widehat{\Phi}\, x_0 - x_0 \,\right\rangle \leq$$

$$\leq q\,\langle\, x - x_0 \,\rangle + (1-q)r \leq qr + (1-q)r = r$$

Из произвольности $x \in \overline{U}_r(x_0)$ следует, что вся последовательность $\{x_{(m)}\}$ лежит в шаре $\overline{U}_r(x_0)$.
2°. Введем обозначение $\alpha = (1-q)r$ и последовательно получим оценки

$$\langle\, x_{(1)} - x_0 \,\rangle = \left\langle\, \widehat{\Phi}\, x_0 - x_0 \,\right\rangle \leq \alpha\,,$$

$$\langle\, x_{(2)} - x_{(1)} \,\rangle = \left\langle\, \widehat{\Phi}\, x_{(1)} - \widehat{\Phi}\, x_0 \,\right\rangle \leq q\,\langle\, x_{(1)} - x_0 \,\rangle \leq \alpha q\,,$$

$$\langle\, x_{(3)} - x_{(2)} \,\rangle = \left\langle\, \widehat{\Phi}\, x_{(2)} - \widehat{\Phi}\, x_{(1)} \,\right\rangle \leq q\,\langle\, x_{(2)} - x_{(1)} \,\rangle \leq \alpha q^2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\langle\, x_{(m+1)} - x_{(m)} \,\rangle \leq \alpha q^m\,,$$

С помощью этих оценок покажем, что последовательность $\{x_{(m)}\}$ фундаментальна в X.

Действительно, в силу *неравенства треугольника*

$$\left\langle\, x_{(m+p)} - x_{(m)} \,\right\rangle \leq \left\langle\, x_{(m+p)} - x_{(m+p-1)} \,\right\rangle + \left\langle\, x_{(m+p-1)} - x_{(m+p-2)} \,\right\rangle + \ldots$$

$$\ldots + \left\langle\, x_{(m+1)} - x_{(m)} \,\right\rangle \leq \alpha\left(q^{m+p-1} + q^{m+p-2} + \ldots + q^{m}\right) =$$

$$= \frac{\alpha(q^{m} - q^{m+p})}{1-q} \leq \frac{\alpha q^{m}}{1-q}$$

и, окончательно, из условия $\alpha = (1-q)r$ получаем, что

$$\left\langle\, x_{(m+p)} - x_{(m)} \,\right\rangle \leq \frac{\alpha q^{m}}{1-q} = r q^{m}\,. \qquad (4.2.2)$$

3°. Из неравенства (4.2.2) следует фундаментальность последовательности $\{x_{(m)}\}$, поскольку правая часть оценки (4.2.2) не зависит от p, а, за счет выбора достаточно большого m, может быть сделана меньше $\forall\,\varepsilon > 0$.

Из полноты банахова пространства X, при этом следует сходимость $\{x_{(m)}\}$ к некоторому элементу $x^* \in X$.

Тогда, перейдя к пределу в (4.2.2) при $p \to +\infty$, получим оценку скорости сходимости, указанную в формулировке теоремы.

4°. Мы уже показали, что вся последовательность $\{x_{(m)}\}$ лежит в шаре $\overline{U}_r(x_0)$, а, положив $m = 0$ в неравенстве (4.2.2) и перейдя в $\left\langle\, x_{(p)} - x_0 \,\right\rangle \le r$ к пределу при $p \to +\infty$, в силу замкнутости шара получим, что

$$x^* \in \overline{U}_r(x_0)\,.$$

$5°$. Из условия сжимаемости оператора $\widehat{\Phi}$ в шаре $\overline{U}_r(x_0)$ следует его непрерывность на этом множестве. Поэтому в равенстве $\widehat{\Phi}\,x_{(m-1)} = x_{(m)}$ можно перейти к пределу при $m \to +\infty$ и получить, что $\widehat{\Phi}\,x^* = x^*$, поскольку

$$\lim_{m\to+\infty} x_{(m)} = \lim_{m\to+\infty} \widehat{\Phi}\,x_{(m-1)} \;\Rightarrow$$

$$\lim_{m\to+\infty} x_{(m)} = \widehat{\Phi}\Big(\lim_{m\to+\infty} x_{(m-1)}\Big)\,.$$

Значит x^* – неподвижная точка оператора $\widehat{\Phi}$.

$6°$. Осталось убедиться в единственности $x^* \in \overline{U}_r(x_0)$. Предположим, что $\widehat{\Phi}\,x^* = x^*$ и $\widehat{\Phi}\,x^{**} = x^{**}$. Тогда, в силу сжимаемости оператора $\widehat{\Phi}$

$$\langle\, x^* - x^{**} \,\rangle = \Big\langle\, \widehat{\Phi}\,x^* - \widehat{\Phi}\,x^{**} \,\Big\rangle \le q\,\langle\, x^* - x^{**} \,\rangle\,,$$

но это возможно лишь при $x^{**} = x^*$.

Далее мы сформулируем и докажем основную теорему о существовании и единственности локального решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений n-го порядка

Предварительно дадим

Определение 4.3.1	Будем говорить, что вектор-функция $\vec{f}(x,\vec{y})$ при $\left\Vert \begin{matrix} x \\ \vec{y} \end{matrix} \right\Vert \in G \subseteq E^{n+1}$ удовлетворяет в G *условию Липшица* относительно $\vec{y}$ равномерно по $x \in [a,b]$, если $\exists L > 0$ такое, что $\left\langle \vec{f}(x,\vec{y}_{(1)}) - \vec{f}(x,\vec{y}_{(2)}) \right\rangle \le L \left\langle \vec{y}_{(1)} - \vec{y}_{(2)} \right\rangle \forall x \in [a,b]$ $\forall \left\Vert \begin{matrix} x \\ \vec{y}_{(1)} \end{matrix} \right\Vert \in G$ и $\forall \left\Vert \begin{matrix} x \\ \vec{y}_{(2)} \end{matrix} \right\Vert \in G$. Число L в этом случае называется *константой Липшица.*

Опираясь на известные из курса математического анализа теоремы об условиях эквивалентности норм в банаховом пространстве, далее (для упрощения рассуждений) под нормой элемента $\vec{y}(x)$ рассматриваемого пространства n-мерных вектор-функций мы будем понимать число

$$\langle \vec{y}(x) \rangle = \max_{k=[1,n]} \max_{x \in [a,b]} |y_k(x)| \ .$$

Тогда будет справедлива

Лемма 4.3.1 **Если $\vec{y}(x)$ непрерывная на $[a,b]$ вектор-функция, то имеет место неравенство**

$$\left\langle \int\limits_a^b \vec{y}(x)\,dx \right\rangle \leq \int\limits_a^b \langle \vec{y}(x) \rangle \ dx = \langle \vec{y}(x) \rangle \left(b-a\right) \ .$$

Доказательство.

Имеем оценку

$$\left| \int\limits_a^b y_k(x)\,dx \right| \leq \int\limits_a^b |\, y_k(x)|\ dx \leq \int\limits_a^b \langle\ \vec{y}(x) \rangle\ dx = \langle \vec{y}(x) \rangle \left(b-a\right) \ ,$$

которая верна $\forall k = [1,n]$.

Следовательно, она верна и для *максимальной по* k левой части и потому утверждение леммы справедливо.

Лемма доказана.